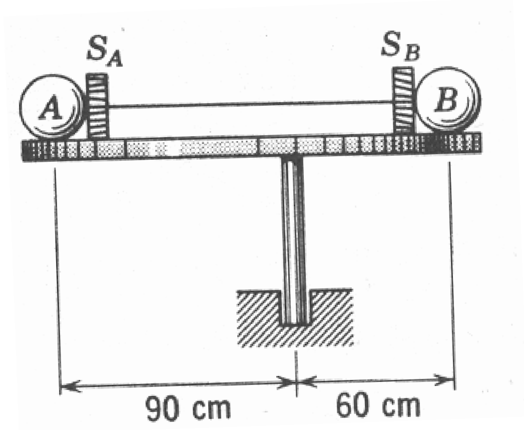
TERCERA PRÁCTICA DE DINÁMICA

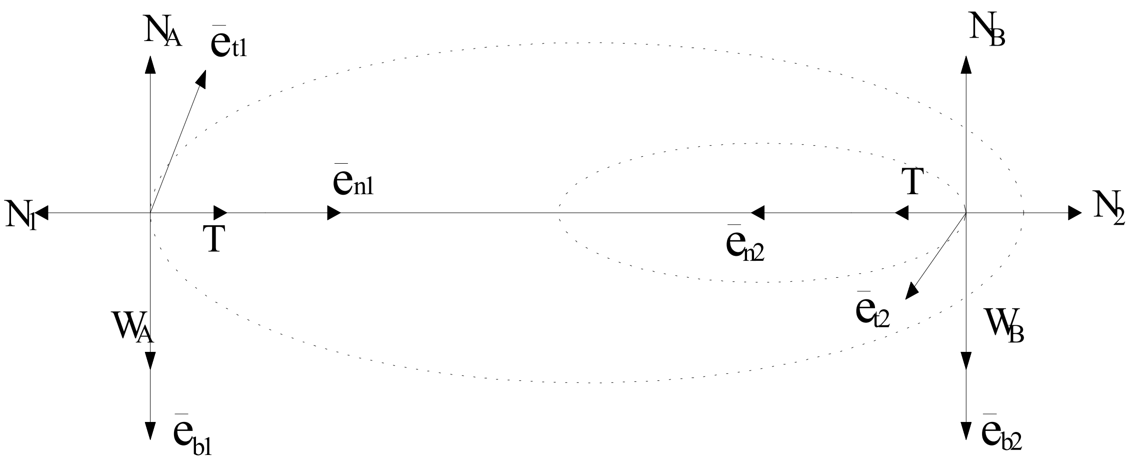
1.- Las esferas A y B pesan 50 y 200 N, respectivamente. Estas esferas están colocadas sobre una mesa giratoria, unida por una cuerda "elástica", que hace que se apoyen sobre topes S_A y S_B. Cuando la mesa está en reposo la tensión en la cuerda es de 150 N ¿cuáles serán las fuerzas entre las esferas y los topes cuando la mesa se hace girar a 20 R.P.M. alrededor de la vertical?



Solución

Habrá fuerzas entre los topes y las esferas siempre que el alargamiento inicial se mantenga en la cuerda elástica de acuerdo a la ley de Hooke (Tensión constante).

1).- D.C.L.:



2).- Relaciones cinemáticas:

No hay aceleraciones en la direcciones tangencial y binormal, pero si, en la dirección normal, para ambas esferas.

$$a_{nA} = \omega^2 r_A = \left(20 * \frac{\pi}{30}\right)^2 *0.9 = 3.95 \text{ m/seg}^2$$

$$a_{nB} = \omega^2 r_B = \left(20 * \frac{\pi}{30}\right)^2 *0.6 = 2.63 \text{ m/seg}^2$$

3).- Relaciones cinéticas (en las direcciones centrípetas o normales):

Para "A":

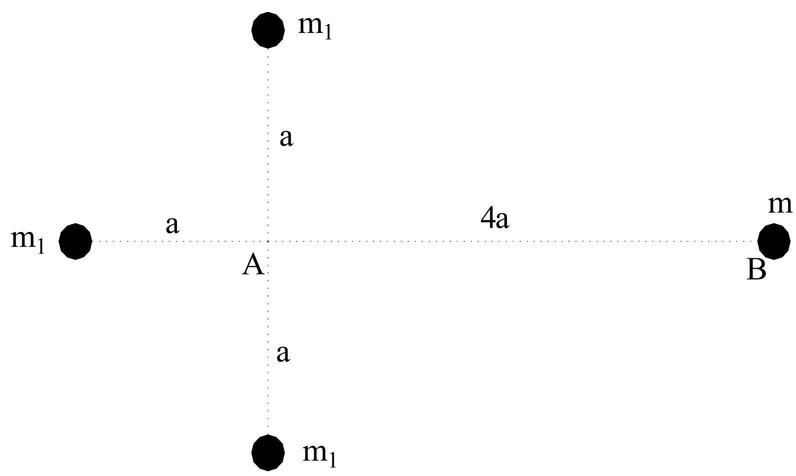
$$-N_1 + T = \tfrac{50}{9.81} * 3.95 \quad \rightarrow \quad N_1 = 150 - \tfrac{50}{9.81} * 3.95 = 129.86 \cong 130 \text{ N}$$

Para “B”:

$$-N_2 + T = \tfrac{200}{9.81} * 2.63$$

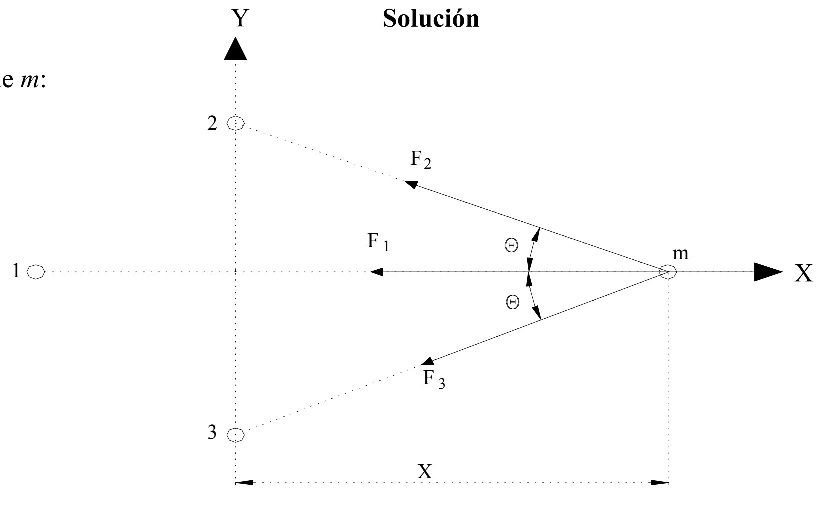
$$N_2 = 150 - \tfrac{200}{9.81} * 2.63 = 93.38 \text{ N}$$

2.- Tres puntos de igual masa m_1 y fijos en un sistema inercial, atraen a un punto móvil de masa *m* situado en el eje de simetría del sistema, con fuerzas directamente proporcionales a las masas y a las distancias respectivas. La atracción unitaria, esto es, la fuerza de atracción a la unidad de distancia entre masas unidad, es igual a K. ¿Con qué velocidad llegara el móvil *m* al punto A, sabiendo que inicialmente está en reposo?



Solución

1).- D.C.L. de *m*:



2).- Las fuerzas de atracción, sobre *m* (suponiendo *m* a una distancia X en el eje de simetría de los dos puntos más próximos a *m*) son:

$$\overline{F_1} = -K\, m_1 m \,(a + X)\, \bar{i}$$

$$\overline{F_2} = K\, m_1 m\, d \left(-\cos\theta\, \bar{i} + \operatorname{sen}\theta\, \bar{j}\right)$$

$$\overline{F_3} = K\, m_1 m\, d \left(-\cos\theta\, \bar{i} - \operatorname{sen}\theta\, \bar{j}\right)$$

Las fuerzas de atracción en el eje Y de 2 y 3 se anulan entre si, luego las fuerzas que producen trabajo sobre *m* son:

$$F_1 = -K\, m_1 m \left(a + X\right)$$

$$F_2 = -K\, m_1 m\ X$$

$$F_3 = -K\, m_1 m\ X$$

3).- Por el principio de trabajo y energía:

a).- Cálculo del trabajo:

$$W_{B-A} = \int_{4a}^{0} -K\, m_1 m \left(a + X\right) dX + 2\int_{4a}^{0} -K\, m_1 m\ X\ dX$$

$$W_{B-A} = -K m_1 m \left(aX + \frac{X^2}{2} \right)\Bigg|_{4a}^{0} - 2K m_1 m \frac{X^2}{2}\Bigg|_{4a}^{0} = 28\, a^2 K\ m_1 m \qquad \text{(Unidades de trabajo)}$$

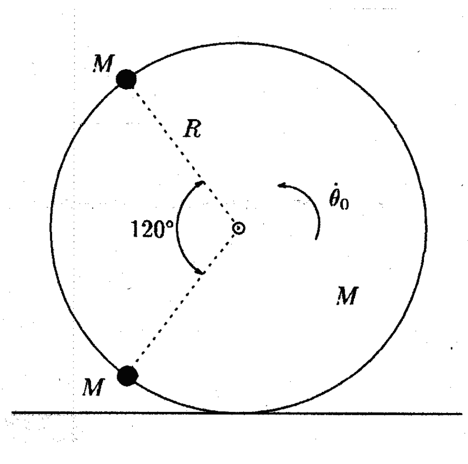
b).- Igualando el trabajo al cambio de energía cinética de *m*:

$$W_{B-A} = \Delta\ E_K$$

$$28\, a^2 K\ m_1 \cancel{m} = \frac{1}{2} \cancel{m}\, V_A^2 - \frac{1}{2} \cancel{m}\, \cancel{V}_B^{0\ 2}$$

$$V_A^2 = 56\, a^2 K\ m_1$$

$$V_A = a\ \sqrt{56\ K\ m_1} \qquad \text{(Unidades de velocidad)}$$



3.- Un disco Homogéneo de masa M y radio R rueda sobre una recta horizontal manteniéndose en un plano vertical. En el perímetro del disco y a 120° están situadas dos masas puntuales M, de forma que no estorben la rodadura del disco, en el instante dado el conjunto está situado con las dos masas puntuales en una misma vertical (ver figura), y con velocidad $\dot{\theta}_0$. Para este instante usando la teoría de la cinética de los sistemas de partículas, se pide:

a) La cantidad de movimiento angular del sistema, respecto a su centro de masa.

b) La aceleración angular del disco.

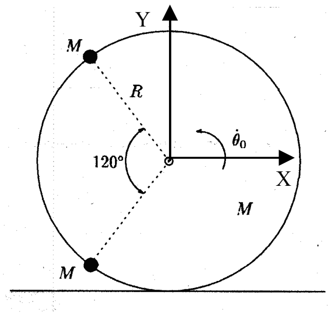
c) El valor mínimo del coeficiente de rozamiento entre el disco y la recta (piso) para que no se produzca deslizamiento.

Solución

1).- Cálculo del centro de masa del sistema:

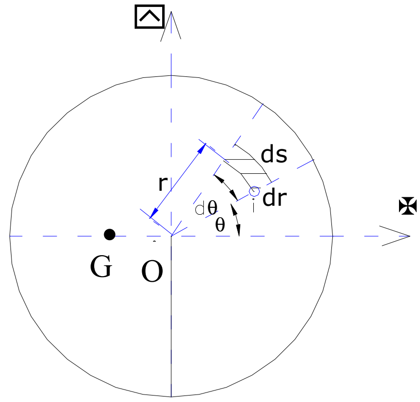
$$\overline{r}_G = \frac{M\left(-R\cos 60°\ \overline{i} + R\sin 60°\ \overline{j}\right) + M\left(R\cos 60°\ \overline{i} - R\sin 60°\ \overline{j}\right)}{3M}$$

$$\overline{r}_G = -\frac{R}{3}\,\overline{i} \quad \text{(Unidades de longitud)}$$



2).- Cálculo de la cantidad de movimiento angular del disco respecto a G:

a).- Con respecto a O:



$$\overline{H} = \left(\overline{H}_O\right)_r \quad \rightarrow \quad \left(\overline{H}_O\right)_r = \sum \overline{\rho}_{O\,i} \times m_1 \dot{\overline{\rho}}_{O\,i}$$

$$\rho = \frac{m}{A} \quad \rightarrow \quad dm = \rho ds\ dr = \rho\ r\ dr\ d\theta$$

$$\overline{\rho}_{O\,i} = r\left(\cos\theta\,\overline{i} + \sin\theta\,\overline{j}\right)$$

$$\dot{\overline{\rho}}_{O\,i} = \omega\,\overline{k} \times r\left(\cos\theta\,\overline{i} + \sin\theta\,\overline{j}\right)$$

$$\left(\overline{H}_{O\,i}\right)_r = r\left(\cos\theta\,\overline{i} + \sin\theta\,\overline{j}\right) \times \omega\, r\left(-\sin\theta\,\overline{i} + \cos\theta\,\overline{j}\right)$$

$$\left(\overline{H}_{O\,i}\right)_r = m_i \omega\, r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\overline{k} = m_i \omega\, r^2\,\overline{k}$$

Luego para el sistema:

$$\left(H_O\right)_r = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \omega\, r^2 \rho\ \ r\ dr\ d\theta = \omega\rho \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4}\, d\theta = \omega * \frac{m}{\pi R^2} * \frac{R^4}{4} * 2\pi$$

$$\left(H_O\right)_r = H_O = \frac{1}{2} m R^2\ \omega$$

b).- Con respecto al centro de masa:

Si:

$$H_G\,\overline{k} = H_O\overline{k} + m\overline{\rho}_{OG} \times \dot{\overline{\rho}}_{OG} = \left(\frac{1}{2} mR^2\omega + \frac{mR}{3} * \left(\omega * \frac{R}{3}\right)\right)\overline{k} = \left(\frac{1}{2} mR^2 + m\left(\frac{R}{3}\right)^2\right)\omega\,\overline{k} = \frac{11}{18}\, m\, R^2 \omega\,\overline{k}$$

c).- Cálculo del movimiento angular de las partículas discretas, respecto al centro de masa:

$$\overline{r}_{G1} = -\left(R\cos 60° - R/3\right)\overline{i} + R\sin 60°\,\overline{j} = -\frac{R}{6}\,\overline{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} R\,\overline{j}$$

$$\overline{V}_{1/G} = \omega\,\overline{k} \times \overline{r}_{G\,i} = \omega\,\overline{k} \times \left(-\frac{R}{6}\,\overline{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} R\,\overline{j}\right) = -\omega\, R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\overline{i} + \frac{1}{6}\,\overline{j}\right)$$

$$\overline{H}_{G1r} = M\left(-\frac{R}{6}\,\overline{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}R\,\overline{j}\right)\times -\omega R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\overline{i} + \frac{1}{6}\,\overline{j}\right) = \omega R^2\left(\frac{1}{36}+\frac{3}{4}\right)M\,\overline{k} = \frac{7}{9}M\,\omega R^2\,\overline{k}$$

También:

$$\overline{H}_{G2r} = \frac{7}{9}M\,\omega R^2\,\overline{k}$$

d).- Para el sistema será:

$$H_G = \frac{11}{18}\omega R^2 M + \frac{14}{9}\omega R^2 M = \frac{13}{6}M\,R^2\omega \quad \text{(Unidades de cantidad de movimiento angular)}$$

$$\overline{H}_G = \frac{13}{6}M\,R^2\omega\,\overline{k} \quad \text{(Unidades de cantidad de movimiento angular)}$$

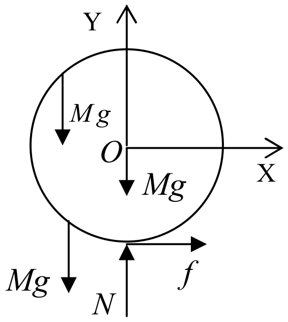
2).- Cálculo de la aceleración del centro de masa del sistema:

a).- Relaciones cinemáticas:

$$\overline{a}_G = \overline{a}_O + \ddot{\theta}\,\overline{k}\times\frac{R}{3}(-\overline{i}) - \dot{\theta}^2(-\frac{R}{3}\,\overline{i}) = \left(\frac{R}{3}\dot{\theta}_0 - \ddot{\theta}R\right)\overline{i} - \frac{R}{3}\ddot{\theta}\,\overline{j} \quad \text{(Unid. de Aceleración)} \quad (0)$$

b).- Relaciones cinéticas

i).- D.S.F.:



$$\sum F_X = f = 3M\left(\frac{R}{3}\dot{\theta}_0 - \ddot{\theta}R\right) \text{...}(1)$$

$$\sum F_Y = N - 3Mg = 3M\left(-\frac{R}{3}\ddot{\theta}\right) \text{...}(2)$$

$$\sum M_G = \dot{H}_G$$

$$f\,R + N*\frac{R}{3} = \frac{13}{6}M\,R^2\ddot{\theta} \text{ :...}(3)$$

Eliminando f y R de (3) Mediante (1) y (2):

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{11}\left(\dot{\theta}_0^2 + \frac{g}{R}\right)$$ (Unidades de aceleración angular)……………………………………….(4)

Reemplazando en (0) se tendrá la aceleración angular pedido).

3).- Cálculo del coeficiente mínimo de rozamiento:

Reemplazando (4) en (2) y (3):

$$f = \frac{M}{11}\left(-6g + 5\,R\,\dot{\theta}_0^2\right)$$ (Unidades de fuerza)

$$N = \frac{M}{11}\left(31g - 2R\dot{\theta}_0^2\right)$$ (Unidades de fuerza)

Si $|f| \le |N\mu|$

$$\mu_{\min} = \frac{|f|}{|N|} = \frac{\left|-6g + 5R\,\dot{\theta}_0^2\right|}{\left|31g - 2R\dot{\theta}_0^2\right|}$$