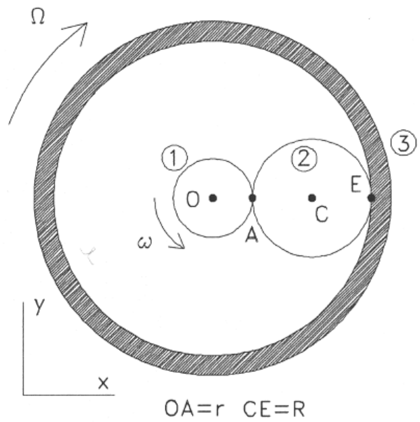
SEGUNDA PRÁCTICA DE DINÁMICA

1.- El mecanismo de la figura está formado por tres ruedas dentadas. Las ruedas ① y ③ giran alrededor de O con velocidad angular constante, mientras que la rueda ② se mueve con la única restricción de no deslizamiento en los puntos de contacto con ① y ③. Se sabe que R = 2r y que $\Omega = 2\omega$. Se pide:

a).- El tiempo necesario para que la rueda ② dé una vuelta completa alrededor de O.

b).- Hallar la aceleración $\overline{a}_E$ en el caso particular que $\Omega = 0$.



Solución

Se tiene tres cuerpos en movimiento en el plano, ① y ③ con movimiento alrededor de un eje fijo que pasa por O y el cuerpo ② en movimiento general en el plano con rodamiento con los cuerpos ① y ③.

1).- Cálculo del tiempo necesario para que la rueda ② de una vuelta completa alrededor de O.

a).- La rueda ② da una vuelta completa, cuando su centro C lo da también en OC, luego:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{OC}} = \frac{2\pi}{\left(V_C/(R+r)\right)} = \frac{2\pi(2r+r)}{V_C} = \frac{6\pi r}{V_C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

b).- Cálculo de la velocidad V_C:

i).- Tomando como punto de base a E:

$$\overline{V}_C = \overline{V}_E - \omega_2 \overline{k} \times \overline{r}_{EC} = -\Omega\, \overline{k} \times \overline{r}_{OE} - \omega_2 \overline{k} \times \overline{r}_{EC}$$

$$\overline{V}_C = -2\omega\, \overline{k} \times 5r\, \overline{i} - \omega_2 \overline{k} \times \left(-2r\, \overline{i}\right) = -10r\omega\, \overline{j} + 2r\omega_2 \overline{j} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

ii).- Tomando como punto base a A:

$$\overline{V}_C = \overline{V}_A - \omega_2 \overline{k} \times \overline{r}_{AC} = \omega\, \overline{k} \times r\, \overline{i} - \omega_2 \overline{k} \times 2r\, \overline{i} = r\omega\, \overline{j} - 2r\omega_2 \overline{j} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(2) = (3)

$$-10r\omega\, \overline{j} + 2r\omega_2 \overline{j} = r\omega\, \overline{j} - 2r\omega_2 \overline{j} \quad \rightarrow \quad 4\, r\, \omega_2 = 11\, r\, \omega$$

$$\omega_2 = \frac{11}{4}\omega \quad \text{(Unidades de velocidad angular)}$$

En (2);

$$\overline{V}_C = \left(-10r\omega + 2r * \frac{11}{4}\omega\right)\overline{j} = -\frac{9}{2} r\,\omega\,\overline{j} \quad \rightarrow \quad V_C = \frac{9}{2} r\,\omega \quad \text{(Unidades de velocidad)}$$

En (1):

$$T = \frac{6\,\pi\,r}{\left(9\,r\,\omega/2\right)} = \frac{4\,r}{3\,\omega} \quad \text{(Unidades de tiempo)}$$

2).- Cálculo de la aceleración $\overline{a}_E$:

a).- Cuando $\Omega = 0$, ② tiene un rodamiento sobre una superficie cóncava hacia arriba, luego:

$$\overline{a}_{C\,i} = \overline{a}_E = \left(1 + \frac{R}{\rho_c}\right) R\,\omega_2^2(-\overline{i}\,) = -\left(1 + \frac{2\,r}{3\,r}\right) 2\,r\,\omega_2^2\,\overline{i} = -\frac{10}{3}\,r\,\omega_2^2\,\overline{i} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

b).- Cálculo de ω_2, para el caso de $\Omega = 0$ y $\omega_1 = \omega$:

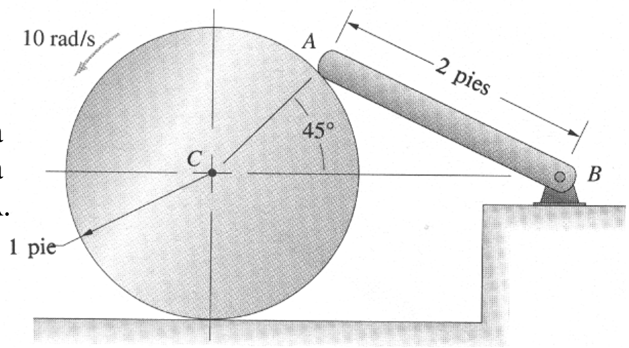
Si: $V_A = \omega\,r$ y $V_A = \omega_2\left(2R\right) = 4\,r\,\omega_2$

$$\omega\,r = 4\,r\,\omega_2 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = \frac{\omega}{4}$$

En (3):

$$\overline{a}_E = -\frac{10}{3}\,r * \frac{\omega^2}{16}\,\overline{i} = -\frac{5}{24}\,r\,\omega^2\,\overline{i} \quad \text{(Unidades de aceleración)}$$

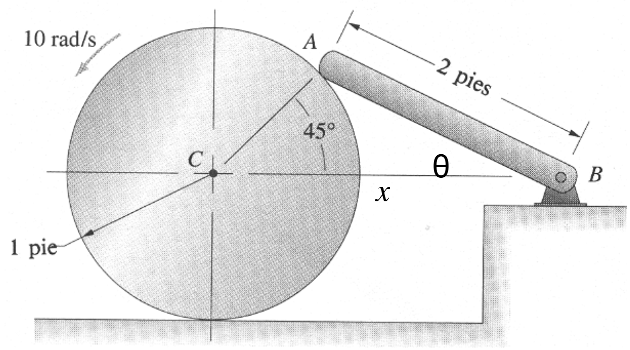
2.- El disco mostrado rueda sobre la superficie plana con una velocidad angular antihoraria de 10 rad/s. La barra AB se desliza sobre la superficie del disco en A. Determine la velocidad angular de la barra AB.



Solución

Usando el método escalar, de poner los puntos importantes en función de un parámetro:

1).- En el triángulo ABC:



a).- Por la Ley De cósenos:

$$1^2 = 2^2 + x^2 - 2 * 2 * x\cos\theta \quad \rightarrow \quad x^2 - 4\,x\cos\theta + 3 = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

b).- Por la Ley de Senos:

$$\frac{2}{sen\,45°}=\frac{1}{sen\,\theta} \quad \rightarrow \quad sen\,\theta = 0.35355 \quad \rightarrow \quad \theta = 20.705°$$

En (1):

$$x^2 - 3.742\,x + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3.742 \pm \sqrt{3.742^2 - 4*3}}{2} = 1.871 \pm 0.7076$$

$x_1 = 2.5786$ pies (bueno)

$x_2 = 1.1634$ pies (no)

2).- Cálculo de la velocidad angular de la barra AB:

a).- Derivando (1), respecto al tiempo:

$$2x\,\dot{x} - 4\,\dot{x}\cos\theta + 4\,x\,sen\,\theta\,\dot{\theta} = 0 \quad \text{.......................................}(2)$$

b).- Cálculo de $\dot{x}$:

Si:

$\dot{x} = \omega\,r = 10*1 = 10$ pies/s

c).- Cálculo de $\dot{\theta} = \omega_{AB}$, para el caso especifico de $x_1 = 2.5786$ pies y $\theta = 20.705°$:

En (2):

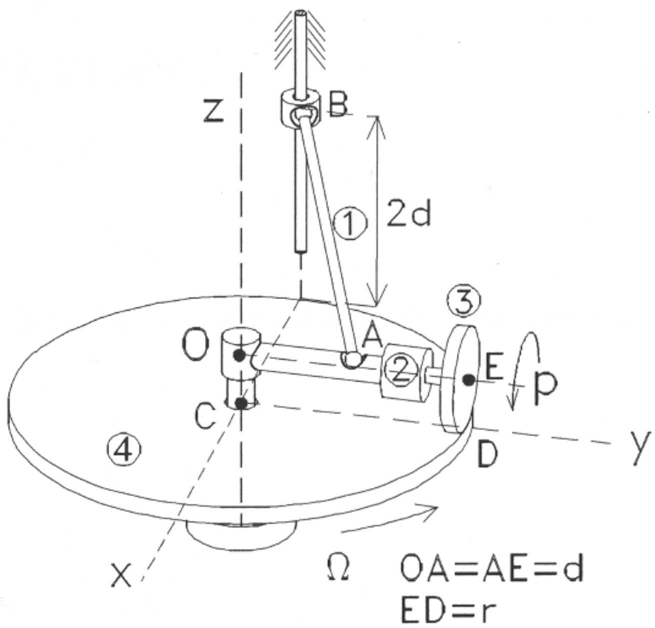
$$10*(2.5786 - 2\cos 20.705°) + 2*2.5786\,sen\,20.705°\dot{\theta} = 0$$

$\dot{\theta} = -3.881$ rad/s (↺)

3.- En el dispositivo de la figura, la plataforma ④ gira con Ω constante conocida. El disco ③ gira con velocidad angular *p*, también constante y conocida, respecto a la manivela ② por acción del motor que hay en ella. El contacto en D es sin deslizamiento. La barra ① de conexión tiene rótulas en B y en A. El collar B desliza a lo largo de la guía vertical, no pudiendo rotar alrededor de la misma. Determinar, para el instante considerado:

a).- La velocidad y aceleración angulares del disco ③.

b).- La velocidad de B usando el método equiproyectivo sobre la línea de unión.



Solución

1).- Cálculo de la velocidad angular de ③:

a).- por el teorema de adición:

$$\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_{3/2} + \bar{\omega}_2 = p\ \bar{j} + \omega_2 \bar{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

b).- Cálculo de la velocidad de D, como parte del cuerpo ③, en movimiento general en el espacio:

$$\bar{V}_D = \bar{V}_E + \bar{\omega}_3 \times \bar{r}_{ED} = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_{OE} + \bar{\omega}_3 \times \bar{r}_{ED} = \omega_2 \bar{k} \times 2d\ \bar{j} + \left(p\ \bar{j} + \omega_2\ \bar{k}\right) \times \left(-r\ \bar{k}\right)$$

$$\bar{V}_D = -2d\ \omega_2 \bar{i} - r\ p\ \bar{i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

c),- Cálculo de la velocidad de D, como parte del cuerpo ④, en movimiento alrededor de un eje fijo:

$$\bar{V}_D = \bar{\Omega} \times \bar{r}_{CD} = \Omega\ \bar{k} \times 2d\ \bar{j} = -2d\ \Omega\ \bar{i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(2) = (3):

$$-2d\ \omega_2 - r\ p = -2d\ \Omega \quad \rightarrow \quad \omega_2 = \frac{2\,\Omega\, d - p\, r}{2\, d} \quad \text{(Unidades de velocidad angular)}$$

Luego en (1):

$$\bar{\omega}_3 = p\ \bar{j} + \left(\frac{2\,\Omega\, d - p\, r}{2\, d}\right)\bar{k} \quad \text{(Unidades de velocidad angular)}$$

2).- Cálculo de la aceleración angular del cuerpo ③.- Derivando (1) respecto al tiempo:

$$\dot{\bar{\omega}}_3 = \bar{\alpha}_3 = \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{3/2}}^{\bar{0}} + \bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_{3/2} + \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_2}^{\bar{0}} = \omega_2 \bar{k} \times p\ \bar{j} = -\omega_2 p\ \bar{i}$$

$$\dot{\bar{\omega}}_3 = -\left(\frac{2\,\Omega\, d - p\, r}{2\, d}\right) p\ \bar{i} \quad \text{(Unidades de aceleración angular)}$$

3).- Cálculo de la velocidad de B, usando el método pedido:

a).- Cálculo de la velocidad de A:

$$\bar{V}_A = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_{OA} = \omega_2 \bar{k} \times d\ \bar{j} = -d\ \omega_2\ \bar{i} \quad \text{(Unidades de velocidad)}$$

b).- Cálculo de la componente de la velocidad de A en AB:

$$V_{A/AB} = \bar{V}_A \bullet \bar{r}_{AB} = -d\ \omega_2 \bar{i} \bullet \left(-2d\ \bar{i} - d\ \bar{j} + \left(2d - r\right)\bar{k}\right) = 2d^2 \omega_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

c).- Cálculo de la componente de la velocidad de B en AB:

$$V_{B/AB} = \bar{V}_B \bullet \bar{r}_{AB} = V_B \bar{k} \bullet \left(-2d\ \bar{i} - d\ \bar{j} + \left(2d - r\right)\bar{k}\right) = \left(2d - r\right) V_B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

(4) = (5):

$$2d^2 \omega_2 = \left(2d - r\right) V_B \quad \rightarrow \quad V_B = \frac{2d^2 \omega_2}{\left(2d - r\right)} \quad \text{(Unidades de velocidad)}$$

$$\overline{V}_B = \frac{2d^2\omega_2}{(2d-r)}\,\overline{k} = \frac{d\,(2\,\Omega\,d - p\,r)}{(2d-r)}\,\overline{k} \quad \text{(Unidades de velocidad)}$$