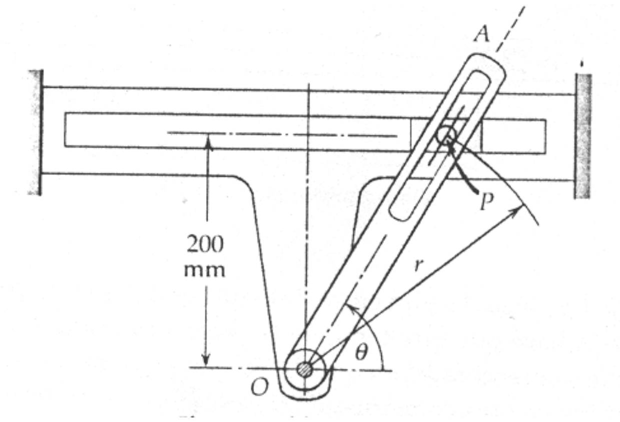
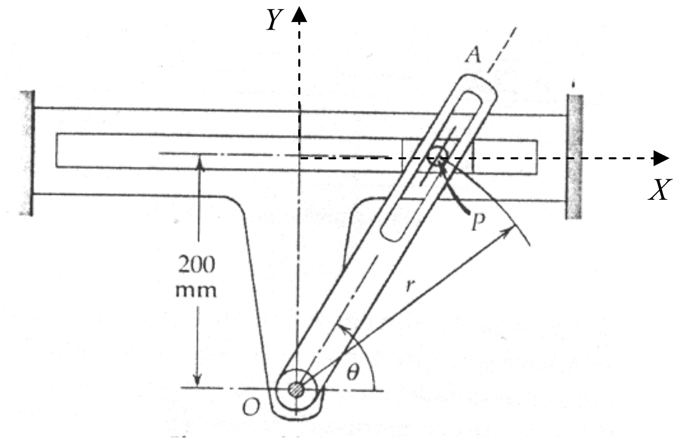
PRIMERA PRÁCTICA DE DINÁMICA

1.- Por la guía horizontal fija se mueven el cursor y el pasador P cuyo movimiento lo manda el brazo ranurado giratorio OA. Si, durante un intervalo del movimiento, el brazo gira a una velocidad constante $\dot{\theta}$ = 2 rad/s. Usando coordenadas cartesianas, hallar la velocidad y aceleración del cursor en la ranura para en el instante en que θ = 60°. También usando coordenadas cartesianas hallar las variación $\dot{r}$ y $\ddot{r}$.



Solución

1).- Aprovechando las condiciones geométricas del problema:



$$tg\theta = \frac{0.2}{X} \quad \rightarrow \quad X = 0.2\cot\theta \qquad (1)$$

Derivando (1) respecto el tiempo, dos veces:

$$\dot{X} = -0.2\csc^2\theta\,\dot{\theta} \qquad (2)$$

$$\ddot{X} = 0.4\csc^2\theta\; ctg\theta\; \dot{\theta}^2 \qquad (3)$$

Reemplazando valores, para el instante pedido en (1), (2) y (3):

$$X = 0.2 * 0.5773 = 0.1155 \quad \text{m}$$

$$\dot{X} = -0,2 * 1.333 * 2 = -0.533 \quad \text{m/s}$$

$$\ddot{X} = 0.4 * 1.333 * 0.773 * 4 = 1.232 \quad \text{m/s}^2$$

2).- También aprovechando las condiciones geométricas del problema:

$$\cos\theta = \frac{X}{r} \quad \rightarrow \quad r = X\sec\theta \qquad (4)$$

Derivando (4), dos veces respecto al tiempo:

$$\dot{r} = \dot{X}\sec\theta + X\sec\theta\; tg\theta\;\dot{\theta} \qquad (5)$$

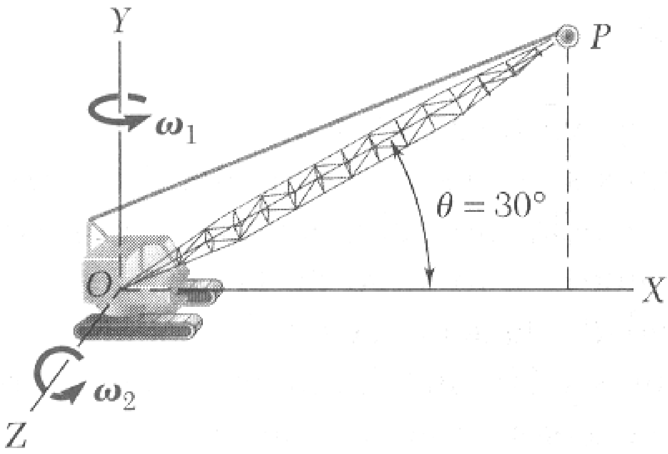
$$\ddot{r} = \ddot{X}\sec\theta + 2\dot{X}\sec\theta\; tg\theta\;\dot{\theta} + X\sec\theta\; tg^2\theta\;\dot{\theta}^2 + X\sec^3\theta\;\dot{\theta}^2 \qquad (6)$$

Reemplazando valores en (5) y (6):

$$\dot{r} = -0.533 * 2 + 0.1155 * 2 * 1.732 * 2 = -0.266 \quad \text{m/s}$$

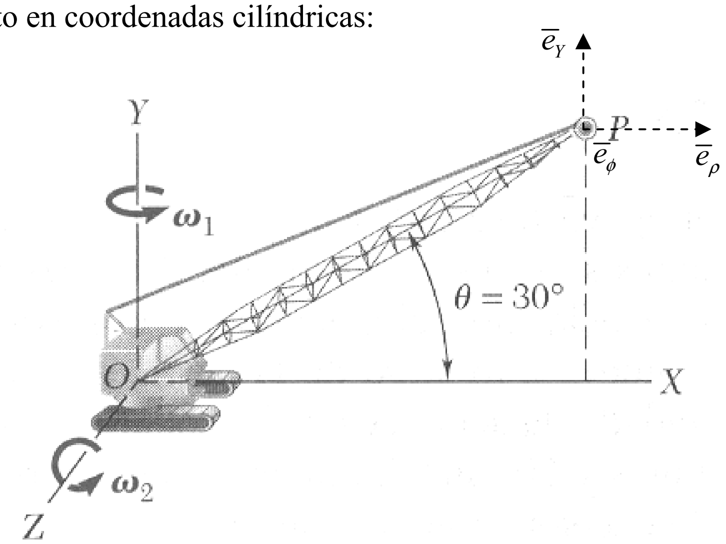
$$\ddot{r} = 1.232*2 + 2*(-0.533)*2*1.732*2 + 0.115*4*\left(2*1.732^2 + 8\right) = 1.546 \ \text{m/s}^2$$

2.- La grúa que se muestra gira con una velocidad angular constante ω_1 de 0.30 rad/s. de manera simultánea, la pluma se levanta con una velocidad angular constante ω_2 de 0.50 rad/s relativa a la cabina. Si se sabe que la longitud de la pluma OP es l = 12 m. Usando coordenadas cilíndricas, determine a) la velocidad de la punta de la pluma, b) la aceleración de la punta de la pluma.



Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios e identificación de los parámetros que definen el movimiento en coordenadas cilíndricas:



$\rho = 12*\cos 30° = 10.39 \ m$	$\dot{\phi} = 0.3 \ rad/s$	$\dot{Y} = \omega_2 l \cos 30° = 5.198 \ m/s$
$\dot{\rho} = -\omega_2 l \ sen 30° = -0.5*12*0.5 = -3 \ m/s$	$\ddot{\phi} = 0$	$\ddot{Y} = -\omega_2^2 l sen 30° = -0.5^2*12*0.5 = 1.5 \ m/s^2$
$\ddot{\rho} = -\omega_2^2 l \cos 30° = -0.5^2*12*0.866 = -2.598 \ m/s^2$		

2).- Reemplazando los valores en las formulas:

$$\overline{V}_P = \dot{\rho}\,\overline{e}_\rho + \rho\,\dot{\phi}\,\overline{e}_\phi + \dot{Y}\,\overline{e}_Y = -3\,\overline{e}_\rho + 10.39*0.3\,\overline{e}_\phi + 5.198\,\overline{e}_Y$$

$$\overline{V}_P = -3\,\overline{e}_\rho + 3.12\,\overline{e}_\phi + 5.2\,\overline{e}_Y \ \ (m/s) \quad \rightarrow \left|\overline{V}_P\right| = 6.77 \ m/s$$

$$\overline{a}_P = \left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\phi}^2\right)\overline{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\,\dot{\phi} + \rho\,\ddot{\phi}\right)\overline{e}_\phi + \ddot{Y}\,\overline{e}_Y$$

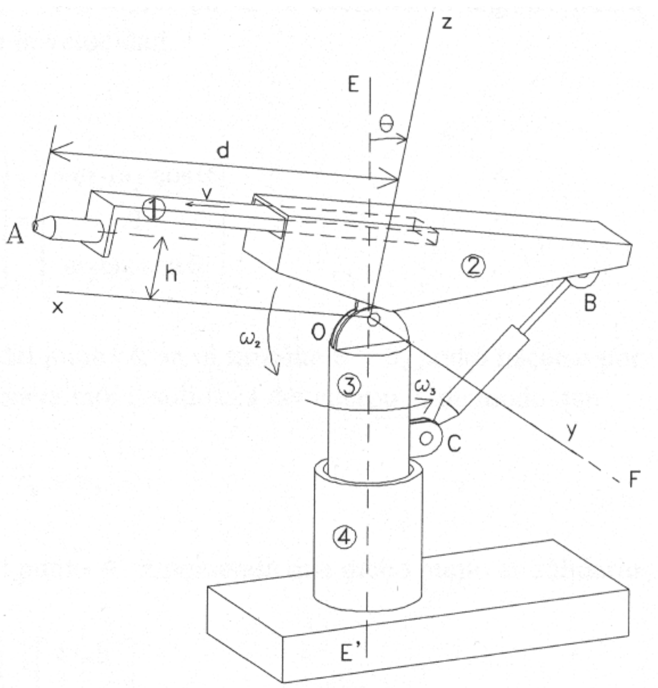
$$\overline{a}_P = \left(-2.598 - 10.39*0.3^2\right)\overline{e}_\rho + 2*(-3)*0.3\,\overline{e}_\phi - 1.5\,\overline{e}_Y$$

$$\overline{a}_P = -3.53\,\overline{e}_\rho + 1.8\,\overline{e}_\phi - 1.5\,\overline{e}_Y \quad (m/s^2) \quad \rightarrow \quad \left|\overline{a}_P\right| = 4.24 \ \ m/s^2$$

3.- La figura representa un robot de pintura. El sólido ① sale del sólido ② con una velocidad constante **v** respecto de éste. El sólido ② gira con una velocidad angular constante ω_2 respecto del sólido ③, alrededor del eje horizontal OF. El sólido ③ gira con velocidad angular constante ω_3 respecto de la bancada ④, alrededor del eje vertical EE' que pasa por O. Suponiendo una referencia (O,x,y,z), solidaria del sólido ②, determinar:

a) Aceleración angular de sólido ① en la posición general que se indica.

b) Velocidad y aceleración del punto A en el instante en que $\theta = 0°$.



Solución

1).- Cálculo de la aceleración angular de ①. Es el mismo del ②, porque ambos no cambian de orientación uno con respecto al otro:

a).- Por el teorema de adición:

$$\overline{\omega}_{2/3} = \overline{\omega}_{2/3} + \overline{\omega}_{3/4} = \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3 = \omega_2\,\overline{j} + \omega_3\left(sen\theta\,\overline{i} + \cos\theta\,\overline{k}\right) = \omega_3 sen\theta\,\overline{i} + \omega_2\,\overline{j} + \omega_3\cos\theta\,\overline{k} \qquad (1)$$

b).- Derivando (1) respecto al tiempo en el marco de referencia tierra:

$$\dot{\overline{\omega}}_{2/3} = \overline{\omega}_3 \times \overline{\omega}_2 = \omega_3\left(sen\theta\,\overline{i} + \cos\theta\,\overline{k}\right)\times\omega_2\,\overline{j} = -\omega_2\omega_3\cos\theta\,\overline{i} + \omega_2\omega_3 sen\theta\,\overline{k} \ \ \text{(unid. acel. Ang.)}$$

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de A. Nuestro marco de referencia es el ②, por condiciones del problema y nuestro punto conveniente será el punto "o":

a).- Cálculo de la velocidad y aceleración del punto conveniente:

$$\overline{V}_0 = \overline{0} \quad y \ \ \overline{a}_P = \overline{0}$$

b).- Cálculo del movimiento de A, respecto al marco móvil ②:

$$\overline{r}_{oA} = d\,\overline{i} + h\,\overline{k}$$

$$\overline{V}_{A/2} = v\,\overline{i}$$

$$\overline{a}_{A/2} = \overline{0}$$

c).- Cálculo de la velocidad y aceleración de A, para θ = 0°:

$$\overline{V}_A = \overline{V}_0 + \overline{\omega}_{2/3} \times \overline{r}_{oA} + \overline{V}_{A/2}$$

$$\overline{\omega}_{2/3} \times \overline{r}_{oA} = \left(\omega_2\ \overline{j} + \omega_3 \overline{k}\ \right) \times \left(d\ \overline{i} + h\ \overline{k}\right) = \omega_2 h\ \overline{i} + \omega_3 d\ \overline{j} - \omega_2 d\ \overline{k}$$

$$\overline{V}_A = \left(v + \omega_2 h\right) \overline{i} + \omega_3 d\ \overline{j} - \omega_2 d\ \overline{k} \quad \text{(Unid. de velocidad)}$$

$$\overline{a}_A = \overline{a}_o + \dot{\overline{\omega}}_{2/3} \times \overline{r}_{oA} + \overline{\omega}_{2/3} \times \left(\overline{\omega}_{2/3} \times \overline{r}_{oA}\right) + 2\overline{\omega}_{2/3} \times \overline{V}_{A/2} + \overline{a}_{A/2}$$

$$\dot{\overline{\omega}}_{2/3} \times \overline{r}_{oA} = \left(-\omega_2 \omega_3\ \overline{i}\ \right) \times \left(d\ \overline{i} + h\ \overline{k}\right) = \omega_2 \omega_3\ h\ \overline{j}$$

$$\overline{\omega}_{2/3} \times \left(\overline{\omega}_{2/3} \times \overline{r}_{oA}\right) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_2 h & \omega_3 d & -\omega_2 d \end{vmatrix} = -\left(\omega_2^2 d + \omega_3^2 d\right) \overline{i} + \left(\omega_3 \omega_2 h\right) \overline{j} - \omega_3 \omega_2 h\ \overline{k}$$

$$2\overline{\omega}_{2/3} \times \overline{V}_{A/2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 2\omega_2 & 2\omega_3 \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\omega_3 v\ \overline{j} - 2\omega_2 v\ \overline{k}$$

$$\overline{a}_A = -\left(\omega_2^2 + \omega_3^2\right) d\ \overline{i} + 2\omega_3 \left(v + \omega_2 h\right) \overline{j} - \omega_2 \left(2v + \omega_2 h\right) \overline{k} \quad \text{(Unid. de aceleración)}$$