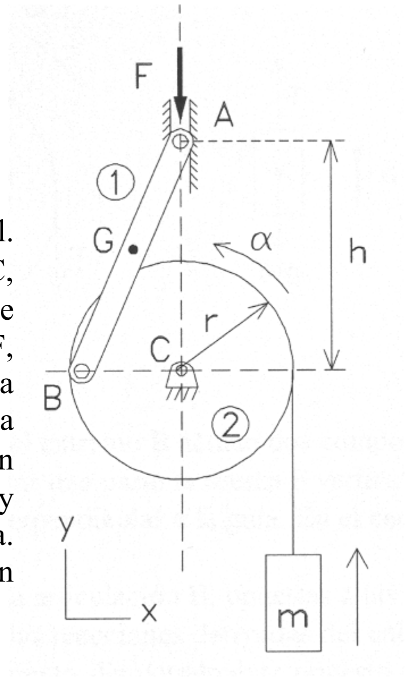
CUARTA PRÁCTICA CALFICADA

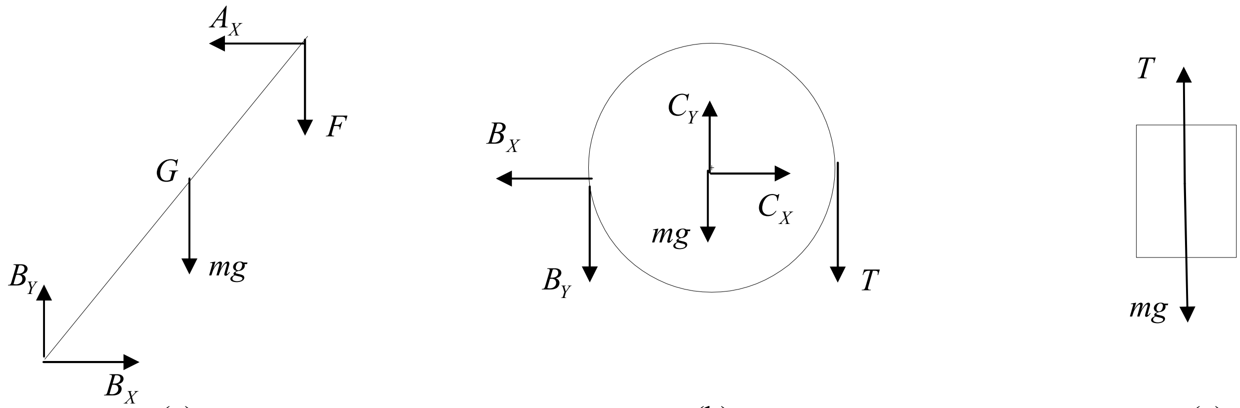
Fecha: 15 de Abril del 2008

1.- El dispositivo de la figura está situado en un plano vertical. El disco ② de masa *m*, que gira en torno del punto fijo C, arrastra el bloque de masa *m* mediante el cable inextensible que se indica. El sistema se propulsa mediante la fuerza F, desconocida, que actúa en el extremo A de la barra. La corredera A está restringida a moverse siguiendo la guía vertical. La barra ① tiene masa *m* y todos los contactos son lisos. En el instante que se ilustra, el sistema parte del reposo y el disco tiene únicamente una aceleración angular α conocida. Determinar en este instante el valor de la fuerza F y la reacción de la guía en el contacto con el extremo A.



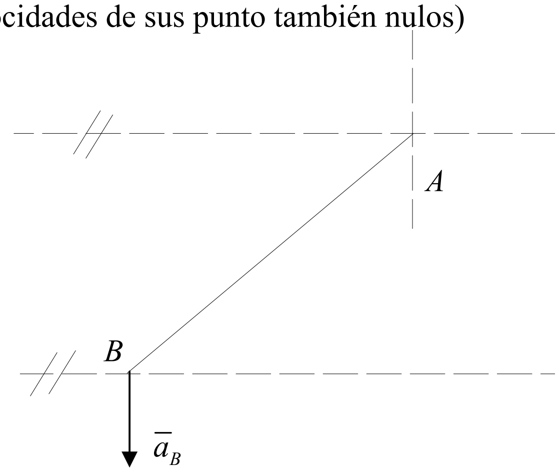
Solución

1).- D.C.L(s).



(a) (b) (c)

2).- Relaciones cinemáticas.- Como el sistema parte del reposo, hallamos el centro instantáneo de aceleración nula para AB (movimiento general en el plano con velocidad angular nula y las velocidades de sus punto también nulos)



Como las líneas perpendiculares a sus aceleraciones son paralelos, se unirán en el infinito, por lo que en ese instante las aceleraciones de sus puntos serán iguales.

Luego:

$$\overline{a}_A = \overline{a}_B = \overline{a}_G = -\alpha\, r\, \overline{j}$$

También la aceleración del bloque es:

$$\overline{a}_m = \alpha\, r\, \overline{j}$$

2).- Relaciones cinéticas:

a).- Para (a):

$$\sum F_Y = ma_{GY} \quad \rightarrow \quad F + mg - B_Y = mr\alpha$$

$$F = B_Y + mr\alpha - mg \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

b).- Para (b):

$$\sum M_C = I_C\alpha \quad \rightarrow \quad B_Y r - T\, r = \frac{1}{2} m\, r^2 \alpha$$

$$B_Y = T + \frac{1}{2} m\, r\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

c).- Para (c):

$$\sum F_Y = m\, a_m \quad \rightarrow \quad T - mg = m\, r\alpha$$

$$T = mg + m\, r\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(3) en (2):

$$B_Y = mg + m\, r\alpha + \frac{1}{2} m\, r\alpha = mg + \frac{3}{2} m\, r\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

(4) en (1):

$$F = mg + \frac{3}{2} m\, r\alpha + m\, r\alpha - mg$$

$$F = \frac{5}{2} m\, r\alpha \quad \text{(Unidades de fuerza)}$$

d).- En (a), para encontrar A_X:

$$\sum M_B \overline{k} = I_G \overbrace{\alpha_{AB}}^{0}\, \overline{k} + \overline{\rho}_{BG} \times m\, \overline{a}_G = \left(\frac{r}{2}\overline{i} + h\, \overline{j}\right) \times m\left(-\alpha\, r\, \overline{j}\right)$$

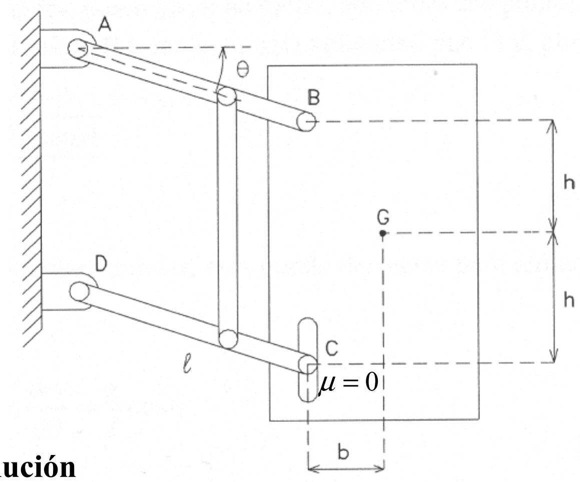
$$\sum M_B \overline{k} = -\frac{r}{2}\, m\, \alpha\, \overline{k}$$

Luego:

$$-F\, r + A_X h - mg\frac{r}{2} = -\frac{1}{2} m\, r^2 \alpha$$

$$A_X = \frac{m\, r}{2\, h}\left(4\, r\alpha + g\right) \quad \text{(Unidades de fuerza)}$$

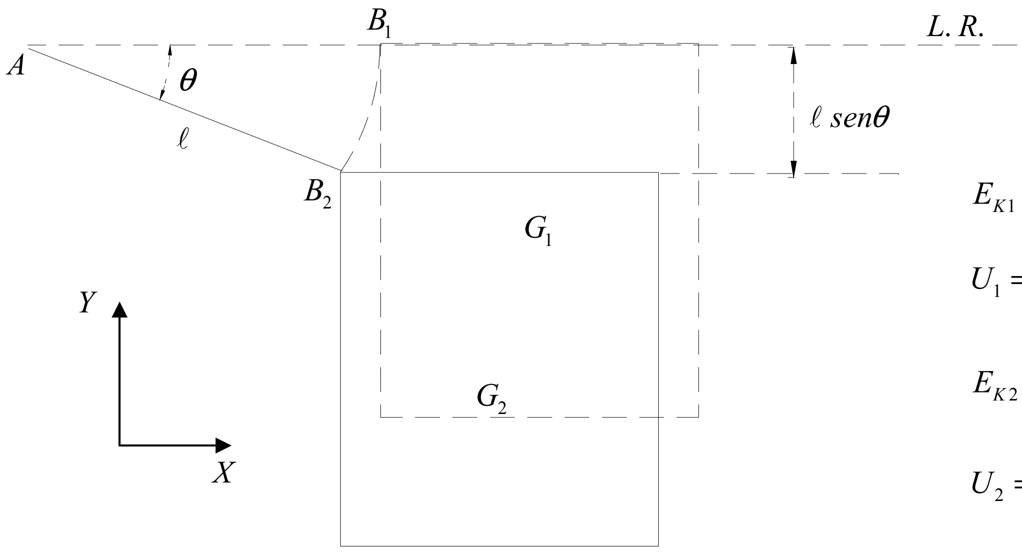
2.- La placa de masa *m,* plana, homogénea y rectangular de la figura, cuyo centro de masa es el punto G, está articulada en B a la barra AB y se apoya en C en la barra CD. Dichas barras, de igual longitud ℓ se mantiene paralelas entre si mediante una barra vertical articulada con ambas. El peso de las barra es despreciable frente al de la placa. Suponiendo que ésta parte del reposo en la posición en que θ = 0°, determinar las reacciones sobre el bloque en B y C en función del ángulo θ.



Solución

1).- Cálculo de la aceleración de "G".- El rectángulo tiene un movimiento de traslación, además la única fuerza que produce trabajo es el peso, por lo que se conserva la energía mecánica en el sistema.

a).- Por conservación de la energía mecánica:



$$E_{K1} = 0$$

$$U_1 = 0$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2} m\, V_G^2$$

$$U_2 = -mg\, \ell\, sen\theta$$

$$E_{M1} = E_{M2}$$

$$0 = \frac{1}{2} m\, V_G^2 - mg\, \ell\, sen\theta \;\; \rightarrow \;\; V_G = \sqrt{2g\, \ell\, sen\theta}$$

b).- Como:

$$\overline{V}_B = \overline{V}_G \quad y \quad \overline{a}_B = \overline{a}_G$$

$$\omega = \frac{V_B}{\ell} = \sqrt{\frac{2g\ sen\theta}{\ell}}$$

Derivándole con respecto al ángulo θ:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} * \frac{d\theta}{d\theta} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{g}{\ell}\cos\theta$$

Luego:

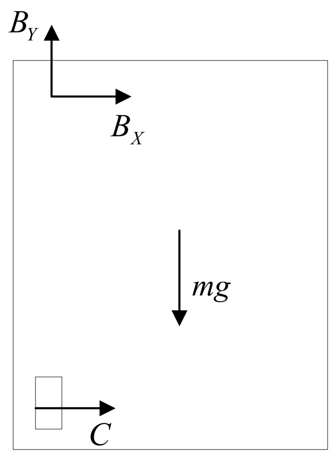
$$\overline{a}_G = \overline{a}_B = -\dot{\omega}\,\overline{k} \times \ell\left(\cos\theta\,\overline{i} - sen\theta\,\overline{j}\right) - \omega^2 \ell\left(\cos\theta\,\overline{i} - sen\theta\,\overline{j}\right)$$

Reemplazando y operando:

$$\overline{a}_G = -3g\ sen\theta\cos\theta\,\overline{i} + g\left(2 - 3\cos^2\theta\right)\overline{j} \quad \text{(Unidades de aceleración)}$$

2).- Cálculo de las reacciones en los apoyos del rectángulo:

a).- D.C.L.:



b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m\,a_{GX} \quad \rightarrow \quad B_X + C = -3\,mg\ sen\theta\cos\theta \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\sum F_Y = m\,a_{GY} \quad \rightarrow \quad B_Y - mg = mg(2 - 3\cos^2\theta$$

$$B_Y = 3\,mg\ sen^2\theta \quad \text{(Unidades de fuerza)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\sum M_G = 0 \quad \rightarrow \quad b * B_Y + h*(B_X - C) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(2) en (3):

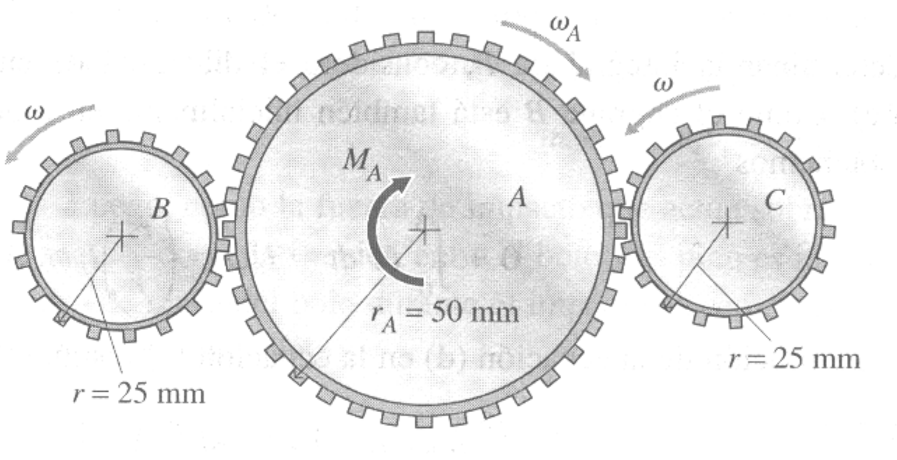
$$3b\ mg\ sen^2\theta + h(B_X - C) = 0 \quad \rightarrow \quad B_X - C = \frac{3\,b}{h} mg\ sen^2\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

De (1) y (4):

$$B_X = -\frac{3}{2} mg\ sen\theta \left(\cos\theta + \frac{b}{h} sen\theta \right) \text{ (Unidades de fuerza)}$$

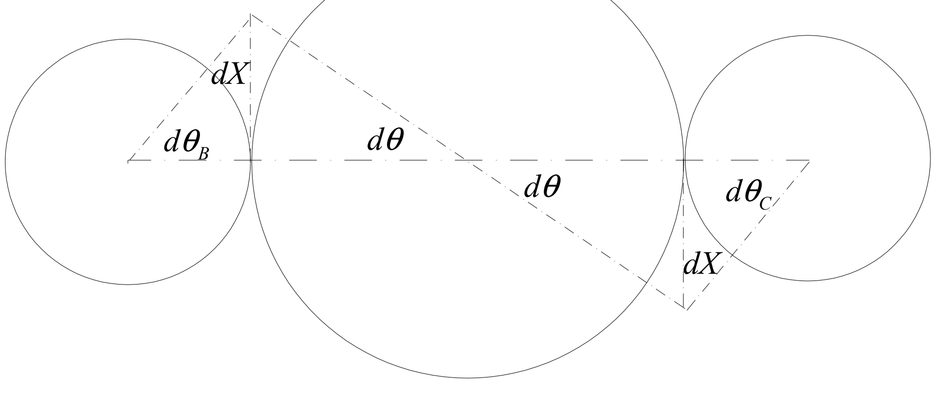
$$C = -\frac{3}{2} mg\ sen\theta \left(\cos\theta - \frac{b}{h} sen\theta \right) \text{ (Unidades de fuerza)}$$

3.- El sistema de engranajes que se muestran en la figura giran alrededor de sus ejes fijos, un engranaje impulsor grande A y dos engranajes pequeños idénticos impulsados B y C. La masa del engranaje mayor es de 1 kg y la masa de cada uno de los engranes pequeños es de 0.4 kg. Los radios de giro son K_A = 36 mm y K = 19 mm, respectivamente, para el engranaje mayor y los engranajes pequeños. Cuando el sistema está en reposo se le aplica una torca M_A = 0.5 t (N-m) al engranaje impulsor, donde t denota el tiempo en segundos. Usando el método alternativo del principio de trabajo y energía para desplazamientos infinitesimales reales (MAPTEDIR), determinar la rapidez angular de cada uno de los engranajes para t = 3 s. Ignore las fricciones en las chumaceras de los engranajes.



Solución

1).- Cálculos elementales:



$$dX = r_A d\theta = r\, d\theta_B = r\, d\theta_C \quad \rightarrow \quad d\theta_B = \frac{r_A}{r} d\theta = d\theta_C$$

$$\alpha_B = \alpha_C = \frac{r_A}{r}\alpha$$

2).- Por MAPTEDIR:

$$dW_{NC} = \sum I_{G\,i}\alpha_i d\theta_i$$

$$Md\theta = 2\, m\, K^2 * \frac{r_A}{r}\alpha * \frac{r_A}{r} d\theta + mK_A^2 * \alpha * d\theta$$

$$M = m\, K_A^2\, \alpha + 2mK^2\, \frac{r_A}{r}\alpha$$

Reemplazando valores y operando:

$$0.5\, t = 1 * 0.036^2 \alpha + 2 * 0.4 * 0.019^2 * \left(\frac{50}{25}\right)^2 \alpha$$

$$\alpha = 203.98\, t$$

Luego:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \rightarrow \quad \int_0^{\omega} d\omega = \int_0^{t} 203.98\, t\, dt \quad \rightarrow \quad \omega = 101.99\, t^2$$

Para t = 3 segundos:

$$\omega = 917.917 \quad \text{rad/s} \quad \text{(Engranaje A)}$$

$$\omega_B = \omega_C = \frac{r_A}{r}\omega = 2 * 917.917 = 1835.834 \quad \text{rad/s}$$