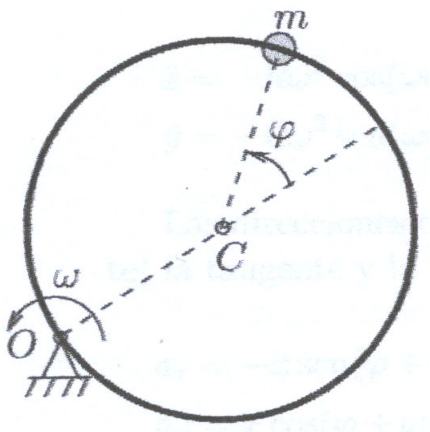
TERCERA PRÁCTICA DE DINÁMICA

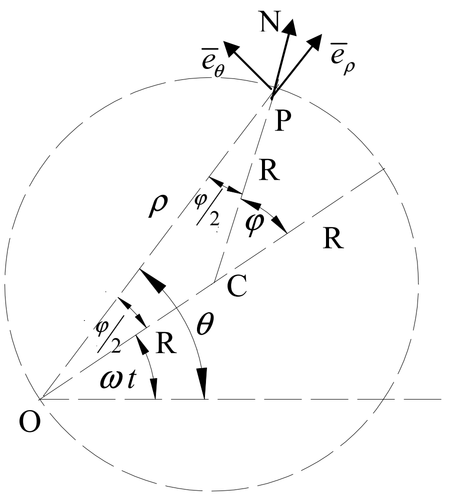
Fecha: 05 de Abril del 2008

1.- Un partícula de masa *m* está ligada a una circunferencia lisa de radio R sobre la que puede deslizar libremente. A su vez la circunferencia se mueve en un plano horizontal, girando con velocidad angular constante ω, alrededor de un punto O de su perímetro. Se pide obtener la expresión de la reacción de la circunferencia sobre la partícula, para un instante genérico (en función de φ y sus variaciones en el tiempo), usando coordenadas polares.



Solución

1).- D:C.L. y orientación de los vectores unitarios que definen la coordenada polar.



En el triángulo isósceles OCP

$$\rho = 2R\cos\left(\varphi/2\right)$$

2).- Relaciones cinemáticas:

a).- Identificación de los parámetros que definen el movimiento en coordenada polar:

$$\rho = 2R\cos\left(\varphi/2\right)$$
$$\dot{\rho} = -R\dot{\varphi}\,sen\left(\varphi/2\right)$$
$$\ddot{\rho} = -R\ddot{\varphi}\,sen\left(\varphi/2\right) - \frac{R\dot{\varphi}^2}{2}\cos\left(\varphi/2\right)$$

$$\theta = \frac{\varphi}{2} + \omega t$$
$$\dot{\theta} = \frac{\dot{\varphi}}{2} + \omega$$
$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{\varphi}}{2}$$

b).- Cálculo de la aceleración de P:

$$\overline{a}_P = \underbrace{\left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2\right)}_{a_\rho}\overline{e}_\rho + \underbrace{\left(2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\ \right)}_{a_\theta}\ \overline{e}_\theta$$

$$a_\rho = -R\ddot{\varphi}\,sen\left(\varphi/2\right) - \frac{R\dot{\varphi}^2}{2}\cos\left(\varphi/2\right) - 2Rcos\left(\varphi/2\right)\left(\frac{\dot{\varphi}}{2} + \omega\right)^2$$

$$a_\theta = -2R\ sen\left(\phi/2\right)\left(\frac{\dot{\varphi}}{2} + \omega\right) + R\cos\left(\varphi/2\right)\frac{\ddot{\varphi}}{2}$$

3).- Relaciones cinéticas.- En el diagrama de cuerpo libre se observa, que solo existe la normal, para encontrar su valor se puede descomponer en las direcciones radial y transversal la normal o también encontrar la aceleración en la dirección de la normal y aplicar para ambos casos la segunda ley de Newton y tener los resultados. Pero como se pide en función de la variación de φ, escogemos el más sencillo, que consiste en descomponer la normal en la dirección transversal y aplicar la segunda Ley de Newton.

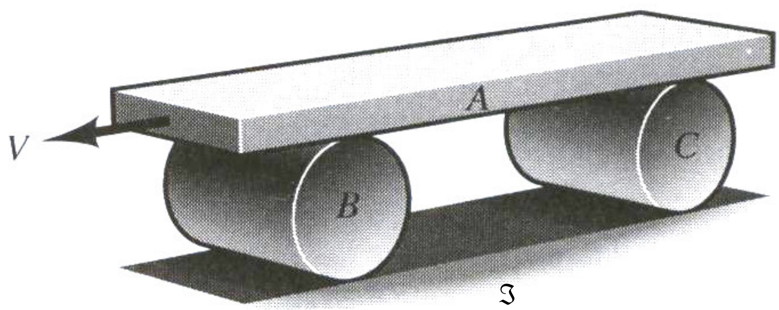
$$N\ sen\left(\varphi/2\right) = m\left(-2R\cos\left(\phi/2\right)\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \omega\right) + R\cos\left(\varphi/2\right)\frac{\ddot{\varphi}}{2}\right)$$

$$N = mR\left[-2\dot{\varphi}\left(\frac{\dot{\varphi}}{2} + \omega\right) + \cot\left(\varphi/2\right)\frac{\ddot{\varphi}}{2}\right]$$ (Unidades de fuerza) (Una de las respuestas)

Eliminando $\ddot{\varphi}$ (no nos piden), se tiene:

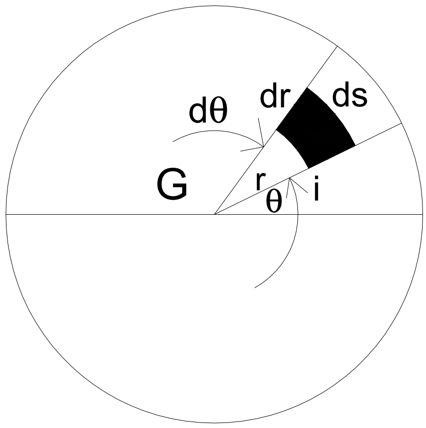
$$N = -mR\left[\left(\dot{\varphi} + \omega\right)^2 + \omega^2\cos\varphi\right]$$ (Unidades de fuerza)

2.- Los cilindros B y C tienen una masa de 50 kg cada uno y un diámetro de 0.6 m. El cuerpo A, tiene una masa de 150 kg, se mueve sobre estos cilindros. Si no se produce deslizamiento en ningún punto, ¿cuál será la energía cinética del sistema cuando el cuerpo A se esté moviendo con una velocidad V de 3 m/s? Usando la teoría de los sistemas de partículas.



Solución

1).- Cálculo de la energía cinética de uno los cilindros (rueda sin deslizamiento), como sistemas de partículas, para un instante cualquiera.-



a).- Cálculo de la masa diferencial (Ver figura):

$$\rho = \frac{m}{A} = \frac{m}{\pi R^2} \quad \rightarrow \; m = \rho \; A$$

$$dm = \rho \; dA$$

$$dm = \rho \; dr \; ds = \rho \; dr \left(r \; d\theta \right)$$

b).- Cálculo de la velocidad relativa de la partícula iésima:

$$\overline{V}_i = \overline{V}_G + \omega_A \; \overline{k} \; x \; \overline{r}_{G\,i} = \overline{V}_G + \omega_A \; r \; \overline{u}$$

$$\therefore \; \dot{\rho}^2_{G\,i} = \left(\omega_A \; r \right)^2$$

c).- Cálculo de la energía cinética relativa al centro de masa:

$$Ek_{rel} = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\rho}^2_{G\,i} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} \omega_A^2 r^2 \rho \; r \; dr \; d\theta = \frac{1}{2} \rho \; \omega_A^2 \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{4} \; d\theta$$

$$Ek_{rel} = \frac{1}{2} * \frac{m}{\pi \; R^2} * \frac{R^4}{4} * 2\pi \; \omega^2 = \frac{1}{4} \; m \; R^2 \; \omega_A^2$$

d).- Cálculo de la energía cinética del centro de masa G (cilindro en rodamiento):

$$Ek_G = \frac{1}{2} m \; V_G^2 = \frac{1}{2} m \left(\omega \; R \right)^2 = \frac{1}{2} \; m \; R^2 \omega^2$$

e).- Cálculo de la energía cinética de uno de los cilindros:

$$E_k = \frac{1}{2} \; mR^2 \omega^2 + \frac{1}{4} mR^2 \omega^2 = \frac{3}{4} \; m \; R^2 \; \omega^2$$

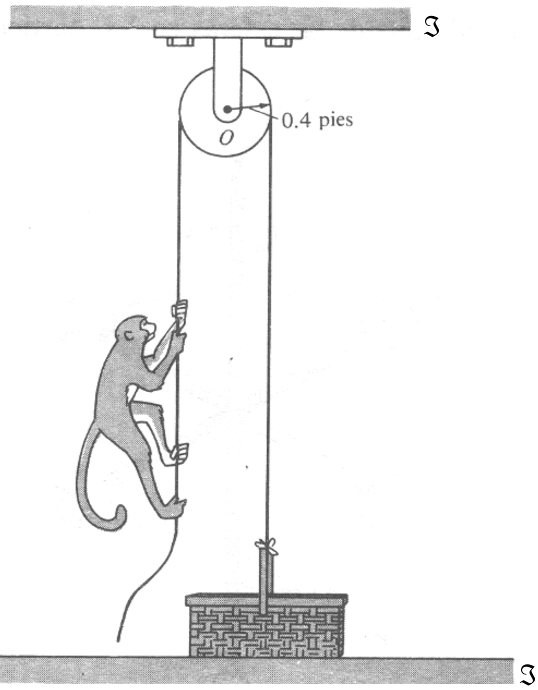
2).- Cálculo de la energía cinética del sistema

$$E_{Ks} = 2 * E_K + \frac{1}{2} m_A V_A^2$$

Reemplazando valores y operando:

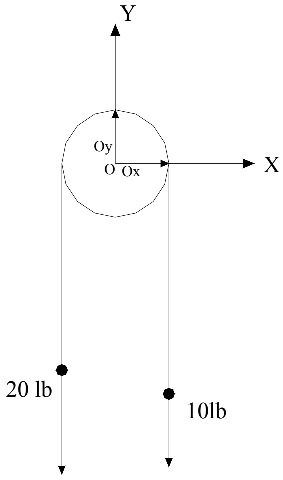
$$E_{Ks} = 2 * \frac{3}{4} * 50 * 0.3^2 * \left(\frac{3}{0.6} \right)^2 + \frac{1}{2} * 150 * 3^2 = 843.75 \;\; \text{J}$$

3.- Una canasta y su contenido tienen un peso de 10 lb. Determine la rapidez a la cual se levanta la canasta cuando t = 3 seg, si inicialmente un mono, que tiene un peso de 20 lb empieza a trepar hacia arriba a lo largo del otro extremo de la cuerda con una rapidez constante de $V_{m/C} = 2$ pies/seg, medida con respecto a la cuerda. Desprecie la masa de la polea y la cuerda.



Solución

1).- D.S.F.:



2).- Utilizando el principio de impulso y cantidad de movimiento angular:

$$\int_0^t \sum M_0 dt\ \bar{k} = \left(H_{Of} - H_{Oi}\right)\bar{k}$$

$$\int_0^t (-10+20) r dt = (m_m V_m r + m_c V_c r)_f \quad \rightarrow \quad 10\ t = \frac{20}{g}\left(V_c - V_{m/c}\right) + \frac{10}{g} V_c$$

$$t = \frac{2V_c}{g} - \frac{4}{g} + \frac{V_c}{g} = \frac{3V_c - 4}{g} \qquad \rightarrow \qquad V_c = \frac{4+tg}{3}$$

Para, $t = 3$ seg:

$$V_c = \frac{4+3*32.2}{3} = 33.53 \ \text{ pie/seg}$$