SEGUNDA PARÁCTICA DE DINÁMICA

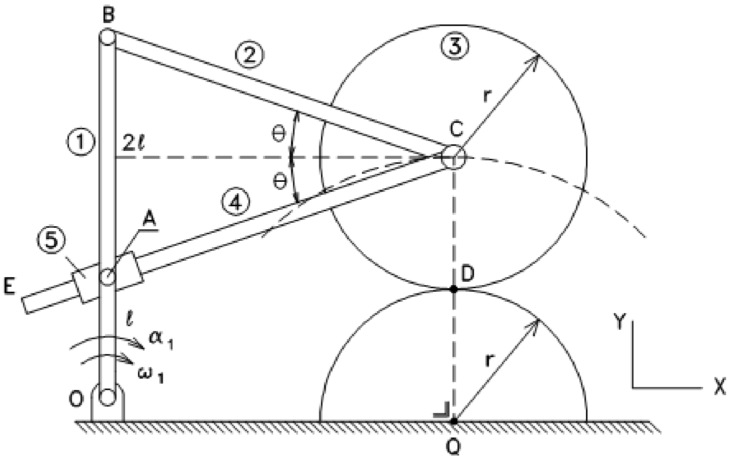
Fecha: 01 de marzo del 2008

1.- En el dispositivo de la figura, B y C son pasadores, el disco de centro C rueda sin deslizar en el contacto D, y la barra ④ desliza dentro de la guía ⑤, cuyo pasador A está montado sobre la barra OB. Se conocen ω_1 y α_1. Determinar en el instante considerado:

a) Velocidad angular de la barra ④.

b) Aceleración angular de la barra BC

Si: OA = ℓ , AB = 2 ℓ , ∠O = ∠Q = 90°

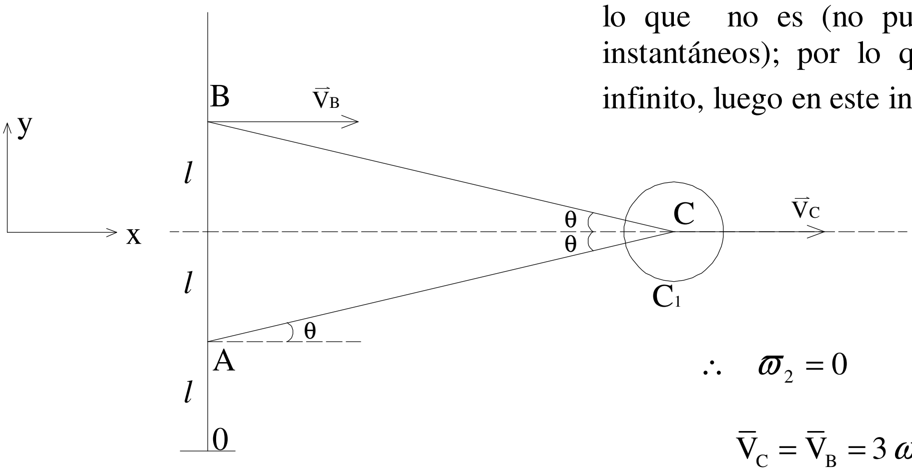


Solución

1).- Cálculo de la velocidad angular de la barra ④

a) Determinación del Ci_2 (centro instantáneo de velocidad nula) de la barra ② y cálculo de la velocidad de C, como parte de la barra ②:

El Ci_2 de BC debe estar en $C\ C_1$ (por linealidad de centros instantáneos de velocidad nula), solo si puede dar el caso en que $V_C = 0$, lo que no es (no puede haber dos centros instantáneos); por lo que el Ci_2 estará en el infinito, luego en este instante $\overline{V_B} = \overline{V_C}$.



$$\therefore \quad \varpi_2 = 0$$

$$\overline{V}_C = \overline{V}_B = 3\,\omega_1 \ell\,\overline{i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

b) Cálculo de la velocidad de "C" tomando como marco móvil ⑤ ($\omega_4 = \omega_5$)

$$\overline{V_C} = \overline{V_A} + \omega_4 \vec{k} \times \overline{r_{AC}} + \overline{V_{C/5}} = \omega_1 \ell\,\overline{i} + \omega_4 \vec{k} \times \frac{\ell}{\text{sen}\,\theta}(\cos\theta\, i + \text{sen}\,\theta\, j) + V_{C/5}(\cos\theta\, i + sen\theta\, j)$$

$$\overline{V_C} = (\omega_1 \ell - \omega_4 \ell + V_{C/5}\cos\theta)\,\overline{i} + (\omega_4 \ell \cot\theta + V_{C/5}\; sen\theta)\,\vec{j} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(1) = (2)

$$\omega_4 \ell \cot\theta + V_{C/5} sen\theta = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_{C/5} = -\omega_4 \ell \frac{\cos\theta}{sen^2\theta}$$

$$\omega_1 \cancel{\ell} - \omega_4 \cancel{\ell} - \omega_4 \cancel{\ell} \frac{\cos^2\theta}{sen^2\theta} = 3\omega_1 \cancel{\ell} \rightarrow -\omega_4 \left(\frac{sen^2\theta + \cos^2\theta}{sen^2\theta} \right) = 3\omega_1 - \omega_1$$

$$\omega_4 = -2\omega_1 sen^2\theta \qquad \rightarrow \qquad \overline{\omega_4} = -2\omega_1 sen^2\theta \vec{k}$$ (Unidad de velocidad angular)

2).- Calculo de la aceleración angular de la barra BC.

a).- Cálculo de la aceleración de "C" como parte de la barra BC.

$$\overline{a}_C = \overline{a}_B + \overline{\alpha}_{BC} \times \overline{r}_{BC} - \overbrace{\omega_2^2}^{0} \overline{r}_{BC} = 3\ell\alpha_1 \overline{i} - 3\ell\omega_1^2 \overline{j} + \alpha_{BC} \overline{k} \times \frac{\ell}{sen\theta} \left(\cos\theta \overline{i} - sen\theta \overline{j} \right)$$

$$\overline{a_C} = \left(3\ell\alpha_1 + \ell\alpha_{BC} \right) \vec{i} + \left(\ell \cot \alpha_{BC} - 3\ell\omega_1^2 \right) \vec{j} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3)}$$

b).- Cálculo de la aceleración de "C" como parte del disco ③ en rodamiento sobre una superficie cóncava hacia abajo:

$$\overline{a_C} = \alpha_3 r \overline{e}_t + \frac{(r\omega_3)^2}{\rho_C} \overline{e}_n = \alpha_3 r \overline{i} - \frac{\cancel{r^2}\omega_3^2}{2\cancel{r}} \overline{j}$$

Si: $\omega_3 = \frac{V_C}{r} = \frac{3\omega_1 \ell}{r}$

Luego: $\overline{a_C} = \alpha_3 r \overline{i} - \frac{r}{2} \times \frac{9\omega_1^2 \ell^2}{r^2} \overline{j} = \alpha_3 r \overline{i} - \frac{9\ell^2}{2r} \omega_1^2 \overline{j}$ ………………………. (4)

(3) = (4) e igualando componente en "Y"

$$\cancel{\ell} \cot\theta \, \alpha_{BC} - 3\cancel{\ell} \, \omega_2^1 = -\frac{9\cancel{\ell^2}}{2r} \omega_1^2 = -\frac{9\ell^2}{2r} \omega_1^2$$

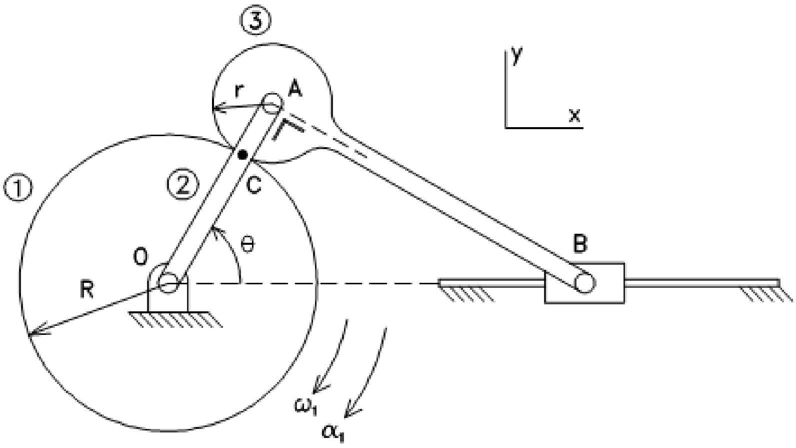
$$\alpha_{BC} = \left(3 - \frac{9\ell}{2r} \right) \omega_1^2 \times tg\theta = \left(\frac{6r - 9\ell}{2r} \right) tg\theta \cdot \omega_1^2$$

si: $2r = 2\ell \qquad \rightarrow \qquad r = \ell$

$$\alpha_{BC} = \left(\frac{6\ell - 9\ell}{2\ell} \right) \times tg\theta\omega_1^2 = -\frac{3}{2} \omega_1^2 tg\theta$$

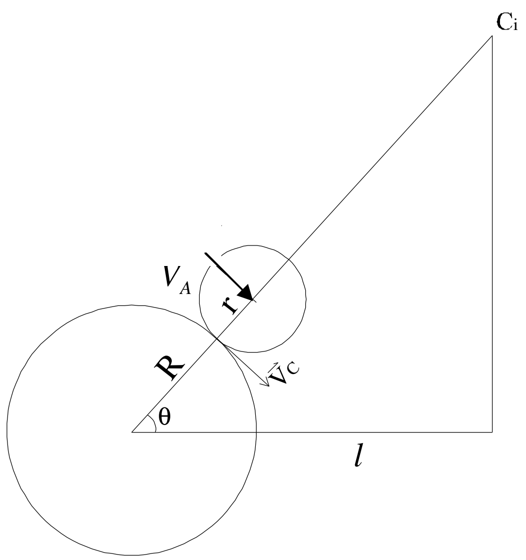
$$\overline{\alpha_{BC}} = -\frac{3}{2}\omega_1^2 \; tg\theta \; \overline{k} \text{ (Unidad de velocidad angular)}$$

2.- La rueda dentada ① engrana con la rueda dentada ③, que es solidaria de la barra AB. La manivela OA no está acoplada con ninguna rueda. Si se hace girar la rueda ① con ω_1 y α_1 conocidas, determinar en el instante considerado, usando el método de los centros instantáneos de velocidad nula, la velocidad de A..



Solución

1).- Determinación del *Ci* de ③ y cálculo elementales.



Si: $\ell = OB = \dfrac{R+r}{\cos\theta}$

a).- Cálculo de las velocidades.

$$\omega_3 = \frac{V_{C3}}{C_{ic}} = \frac{\omega_1 R}{\dfrac{\ell}{\cos\theta} - R} = \frac{\omega_1 R\cos^2\theta}{R(1-\cos^2\theta)+r} = \frac{\omega_1 R\cos^2\theta}{RSen^2\theta + r} \text{ (Unidad de velocidad angular)}$$

$$V_A = \omega_1 CiA = \frac{\omega_1 R\ \cos\theta}{\ell - R\cos\theta}\left(\frac{\ell}{\cos\theta} - R - r\right)$$

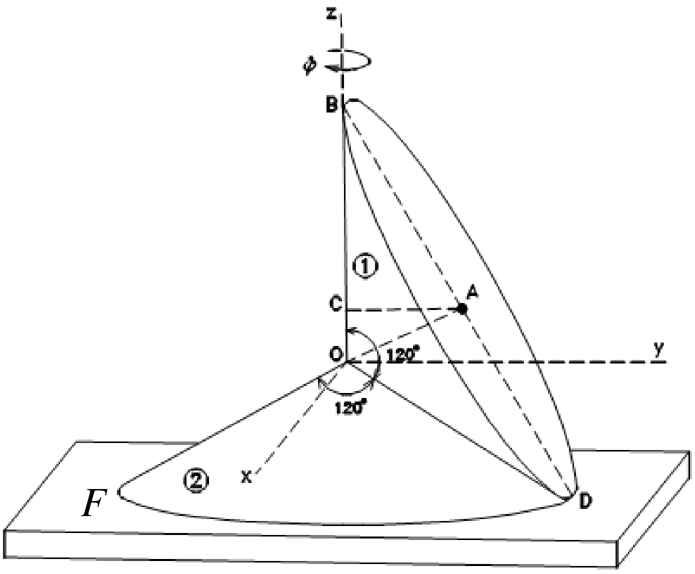
$$V_A = \frac{\omega_1 R\ \cos^2\theta}{Rsen^2\theta + r}\left(\frac{R+r}{\cos^2\theta} - R - r\right) \text{ (Unidad de velocidad)}$$

3.- El cono ① se mueve sin deslizamiento sobre el cono fijo ②. Ambos conos tienen una abertura de 120°. El ángulo φ girado por la recta CA, perpendicular al eje z, viene dado en función del tiempo por la expresión φ = ½kt donde k es constante. Sabiendo que CA= ℓ , determinar para el instante de la figura en función del tiempo t, la:

a) Velocidad angular del cono móvil y velocidad angular del mismo cono en torno de su eje OA.

b) Aceleración angular del cono móvil.

c) Velocidad y aceleración del punto B del cono móvil.

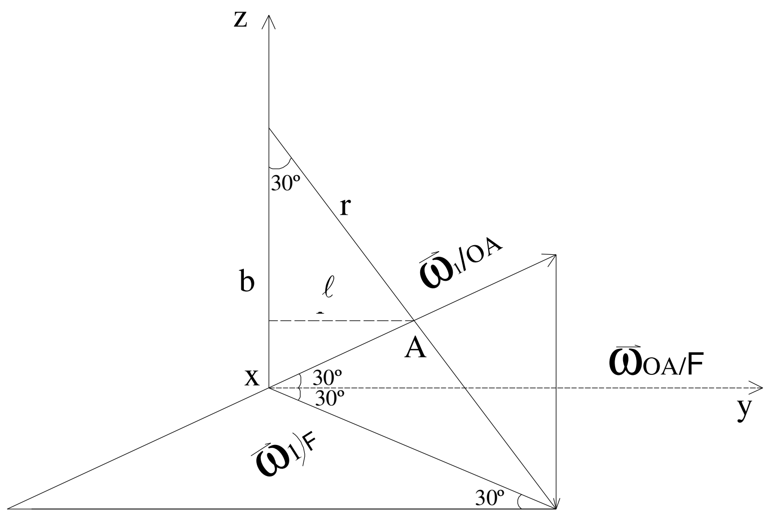


Solución

1).- Cálculo de la velocidad angular del cono ①. El cono se mueve alrededor de un punto fijo "o"

a) Si: $\overline{V_D} = 0 = \overline{\omega_1} \times \overline{r_{OD}} \;\Rightarrow\; \vec{\omega}_1 // \vec{r}_{OD}$

b) $\overrightarrow{\omega_{1/F}} = \overrightarrow{\omega_{1/OA}} + \overrightarrow{\omega_{OA/F}}$ ....(1)



La figura es referencial

$$sen30° = \frac{\ell}{r} \quad \rightarrow \quad r = \frac{\ell}{sen30°}$$

$$sen60° = \frac{r}{b} \quad \rightarrow \quad b = \frac{\ell}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\ell \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$b = r_{OB} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ell$$

En (1):

$$\omega_{1/F}\left(\cos 30°\,\vec{j} - sen30°\,\vec{k}\right) = \omega_{1/OA}\left(\cos 30°\,\vec{j} + sen30°\,\vec{k}\right) - \dot{\phi}\vec{k}$$

Si: $\dot{\phi} = k\ t$

Igualando componentes:

$$\omega_{1/F} \cos \cancel{30°} = \omega_{1/OA} \cos \cancel{30°} \rightarrow \alpha_{1/F} = \omega_{1/OA}$$

$$-\omega_{1/F}\, sen30° = \omega_{1/OA}\, sen30° - k\,t \rightarrow \omega_{1/F} = k\,t$$

Luego:

$$\overline{\omega_{1/F}} = \mathrm{kt}\left(\cos 30°\,\bar{\mathrm{j}} - sen30\bar{k}\right) \text{ (Unidad de velocidad angular)}$$

$$\omega_{1/OA} = kt\left(\cos 30°\,\bar{j} + sen30°\,\bar{k}\right) \text{ (Unidad de velocidad angular)}$$

2).- Cálculo de la aceleración angular del cono ①:

Derivando (1) respecto al tiempo.

$$\overline{\overset{\circ}{\omega}_{1/F}} = \overline{\overset{\circ}{\omega}_{1/OA}} + \bar{\omega}_{OA/F} \times \bar{\omega}_{1/OA} + \overline{\overset{\circ}{\omega}_{OA/F}}$$

$$\overline{\overset{\circ}{\omega}_{1/F}} = k\left(\cos 30°\,\bar{j} - sen30\,\bar{k}\right) + \left(-kt\,\vec{k}\right) \times \left[kt\left(\cos 30°\,\bar{j} + sen30°\,\bar{k}\right)\right] - k\,\vec{k}$$

$$\bar{\alpha}_1 = \overline{\overset{\circ}{\omega}_{1/F}} = k^2t^2 \cos 30°\bar{i} + k\cos 30°\,\bar{j} - k(1 + sen30°)\,\vec{k} \text{ (Unidad de aceleración angular)}$$

3).- Calculo de la velocidad de B.

$$\overline{V_B} = \overline{\omega_{1/F}} \times \overline{r_{OB}} = kt(\cos 30°\,\bar{j} - sen30°\,\bar{k}) \times \frac{4\sqrt{3}}{3}\,\ell\,\vec{k}$$

$$\overline{V_B} = \frac{\cancel{4}\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}}\,kt\,\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}}\,\bar{i} = 2kt\,\bar{i} \qquad \text{(Unidad de velocidad)}$$

4).- Calculo de la aceleración de B.

$$\overline{a_B} = \overline{\alpha_1} \times \overline{r_{OB}} + \overline{\omega_{1/F}} \times \left(\vec{\omega}_{1/F} \times \overline{r_{OB}}\right) = \overline{\alpha_1} \times \overline{r_{OB}} + \overline{\omega_{1/F}} \times \overline{V_B}$$

$$\overline{\alpha_1} \times \overline{r_{OB}} = \left(k^2t^2 \cos 30\,\bar{i} + k\cos 30\,\bar{j} - k(1 + sem30°)\,\vec{k}\right) \times b\,\vec{k}$$

$$= bk\cos 30^{\circ}\,\bar{i} - bk^2t^2\cos 30^{\circ}\,\vec{j}$$

$$\vec{\omega}_{1/F} \times \bar{r}_B = kt\left(\cos 30_{\bar{j}} - sen30^{\circ}\,\vec{k}\right) \times \left(2kt\ \bar{i}\right)$$

$$= -bk^2t^2\cos 30^{\circ}\,sem30^{\circ}\,\vec{j} - bk^2t^2\cos^2 30^{\circ}\,\vec{k}$$

Luego:

$$\bar{a}_B = bk\cos 30^{\circ}\,\bar{i} - \left(bk^2t^2\cos 30^{\circ} + bk^2t^2\cos 30^{\circ}\,sen30^{\circ}\right)\bar{j} - bk^2t^2\cos^2 30^{\circ}\,\vec{k}$$

$$\bar{a}_B = 2\ell\ k\,\bar{i} - \left(2\ell k^2t^2 + \ell k^2t^2\right)\bar{j} - \sqrt{3}\ell k^2t^2\ \bar{k}$$

$$\bar{a}_B = 2\ell\ k\,\bar{i} - 3\ell k^2t^2\ \bar{j} - \sqrt{3}\ell k^2t^2\ \bar{k}$$ (Unidad de aceleración)