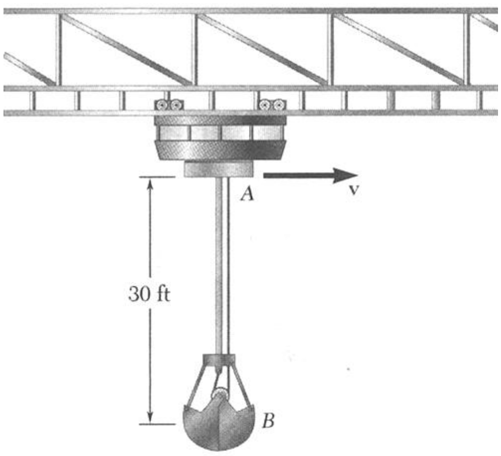
TERCERA PRÁCTICA DE DINÁMICA

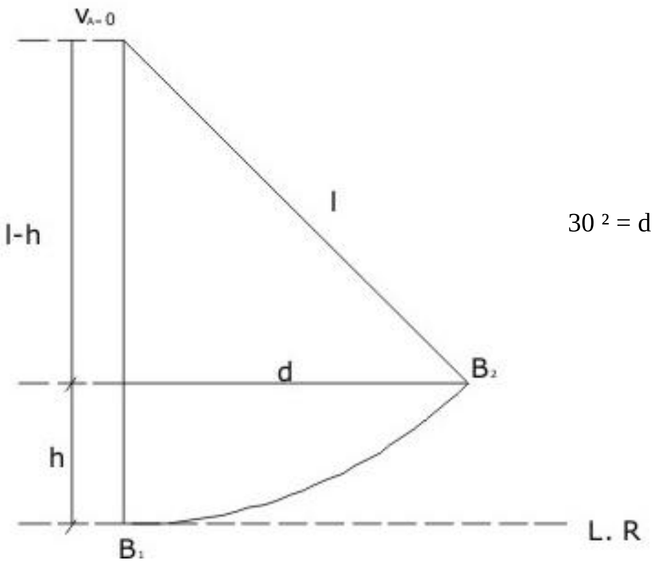
1.- En una operación de mezclado de minerales, un contenedor lleno de mineral se suspende de una grúa viajera que se mueve con lentitud a lo largo de un puente estacionario. La grúa viaja a una velocidad de 10 pies/s cuando se detiene repentinamente. Determine la distancia máxima horizontal que oscilará el contenedor.



Solución

Como se para repentinamente la grúa la masa B sigue su movimiento convirtiendo su energía cinética en potencial.

1).- Grafico del movimiento inicial y final.



$30^2 = d^2 + (l-h)^2 = d^2 + (30-l)^2$ … (1)

2).- Calculo de h por conservación de la energía mecánica.

$$E_{K\,1} = \frac{1}{2} m\, V^2 = \frac{1}{2} * \frac{W}{g} * 10^2 = 50 \frac{W}{g}$$

$U_1 = 0$

$Ek_2 = 0$

$U_2 = Wh$

Como:

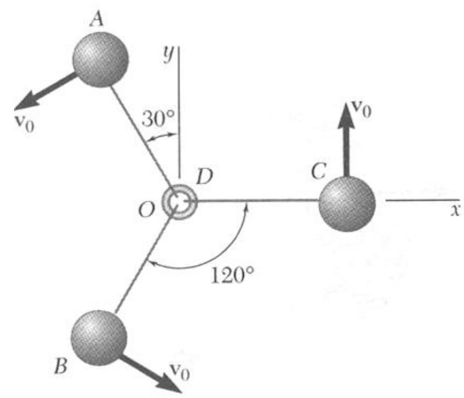
$EM_1 = EM_2$

$50 * \frac{W}{g} = W * h \quad \rightarrow \quad h = \frac{50}{32.2} = 1.5553\, pies$

Luego en (1)

$30^2 = d^2 + (30-1.553)^2 \quad \rightarrow \quad d^2 = 90.756$

d= 9.53 pies



2.- Tres pequeñas esferas A, B y C, cada una de masa *m*, se conectan a un pequeño anillo D de masa despreciable mediante tres cuerdas inelásticas e inextensibles de longitud *l* e igualmente espaciadas. Las esferas se pueden deslizar con libertad sobre una superficie horizontal sin fricción, y están rotando inicialmente a una velocidad v_0 alrededor del anillo D que está en reposo. Repentinamente se rompe la cuerda CD. Después de que las otras dos cuerdas se han tensado, determine a) la velocidad del anillo D, b) la velocidad relativa a la cual giran las esferas A y B alrededor de D, c) la fracción de la energía original de las esferas A y B que se disipa cuando las cuerdas AD y BD se vuelven tensas.

Solución

1.- Por conservación de la cantidad de movimiento lineal

a).- En el instante en que la cuerda CD se rompe el movimiento lineal es del sistema A y B es:

$$m\vec{V}_{A\,1} = mV_0\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{\imath} - \frac{1}{2}\,\vec{\jmath}\right)$$

$$m\vec{V}_{B\,1} = mV_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{\imath} - \frac{1}{2}\,\vec{\jmath}\right)$$

$$\vec{L}_1 = m\vec{V}_{A\,1} + m\vec{V}_{B\,1} = -mV_0\,\vec{\jmath}$$

b).- Cuando estén templados, con respecto al movimiento del centro de masa:

$$\vec{L}_2 = 2m\vec{V}$$

c).- Por conservación del movimiento lineal del centro de masa:

$$\vec{V} = \vec{V}_D = \frac{\vec{L}_1}{2m} = -\frac{1}{2}V_0\,\vec{\jmath} \ \ (Unidades\ de\ velocidad)$$

2).- Por conservación de la cantidad de movimiento angular respecto al centro de masa:

$$\vec{H}_{G\,1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\,\vec{\jmath} \times m\vec{V}_{A\,1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\,\vec{\jmath} \times m\vec{V}_{B\,1} = \frac{3}{2}\ell\, mV_0\,\vec{k}$$

$$\vec{H}_{G\,2} = \ell\ * m\,V_{A/_G}\vec{k} + \ell\ * mV_{B/_G}\vec{k} = 2\ell\, m\,V_{B/_G}\,\vec{k}$$

Si:

$$\vec{V}_{A\,2} = \vec{V} + \vec{V}_{A/_G} \quad , \quad \vec{V}_{B\,2} = \vec{V} + \vec{V}_{B/_G} \quad y \quad \vec{L}_2 = 2m\ \vec{V} + m\,\vec{V}_{A/_G} + m\ \vec{V}_{B/_G} = \vec{L}_1 \quad \Longrightarrow \quad V_{A/_G} = V_{B/_G}$$

También:

$$\vec{H}_{G\,2} = \vec{H}_{G\,1} \qquad \rightarrow \qquad 2\ell\, m\, V_{B/G} = \frac{3}{2}\ell\, mV_0$$

$$V_{A/G} = V_{B/G} = \frac{3}{4} m\, V_0 \quad (Unidades\ de\ velocidad)$$

3).- Cálculo de las energías cinéticas:

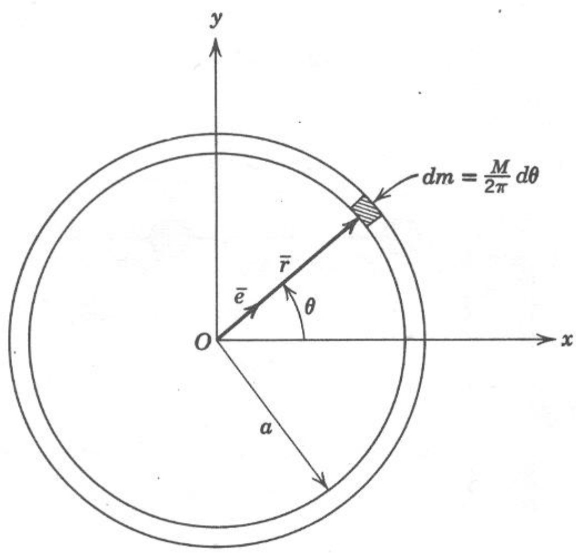
$$E_{K\,1} = \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}mV_0^2 = mV_0^2$$

$$E_{K\,2} = \frac{1}{2}(2m)V_0^2 + \frac{1}{2}mV_{A/G}^2 + \frac{1}{2}mV_{B/G}^2 = \frac{13}{16}mV_0^2$$

La fracción de la energía cinética perdida es:

$$\frac{E_{K\,1} - E_{K\,2}}{E_{K\,1}} = \frac{1 - 13/16}{1} = \frac{3}{16} = 0.1875$$

3.- El aro que se muestra tiene una velocidad angular ω_z alrededor de su propio eje y al mismo tiempo gira alrededor del eje "y" con velocidad angular ω_y. Los ejes están fijos al aro. Analizar el aro como un sistema de partículas y deducir una expresión para la energía cinética E_K y la cantidad de movimiento angular $\overline{H}_0$ del aro en términos de M, r, ω_y, y ω_z.



Solución

1).- Relaciones Cinemáticas:

a).- Por el teorema de adición de las velocidades angulares:

$$\overline{\omega} = \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}$$

b).- Velocidad de la partícula iésima (movimiento alrededor de un punto fijo "O"):

$$\overline{V}_i = \overline{\omega}\ x\ \bar{r}_{0i} = \left(\omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}\right) x\ r\left(\cos\theta\, \bar{i} + \operatorname{sen}\theta\, \bar{j}\right) = r\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & \omega_y & \omega_z \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overline{V}_i = -\omega_z r \operatorname{sen}\theta\, \bar{i} + \omega_z r\cos\theta\, \bar{j} - \omega_y r\cos\theta\, \bar{k}$$

$$\overline{V}_i = r\left[\omega_z\left(-\operatorname{sen}\theta\, \bar{i} + \cos\theta\, \bar{j}\right) - \omega_y \cos\theta\, \bar{k}\right]$$

2).- Cálculo de la energía cinética del sistema de partículas aro:

a).- Para la partícula iésima:

$$E_{Ki} = \tfrac{1}{2} m_i V_i^2 = \tfrac{1}{2} m_i r^2 \left[\omega_z^2 \left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right) + \omega_y^2 \cos^2\theta\right]$$

$$E_{Ki} = \tfrac{1}{2} m_i r^2 \left(\omega_z^2 + \omega_y^2 \cos^2\theta\right)$$

b).- Para el sistema:

$$E_K = \oint \tfrac{1}{2} r^2 \left(\omega_z^2 + \omega_y^2 \cos^2\theta\right) dm = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} r^2 \left(\omega_z^2 + \omega_y^2 \cos^2\theta\right) \frac{M}{2\pi} d\theta$$

$$E_K = \frac{1}{2} r^2 \omega_z^2 \frac{M}{2\pi} \theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} r^2 \omega_y^2 \frac{M}{2\pi} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$E_K = \frac{M\, r^2 \omega_z^2}{2} + \frac{M\, r^2 \omega_y^2}{4} = \frac{M\, r^2}{4} \left(2\omega_z^2 + \omega_y^2\right) \quad \text{(Unidades de energía)}$$

3).- Cálculo de la cantidad de movimiento angular:

a).- Para la partícula iésima:

$$\overline{H}_{0i} = \bar{r}_{0i} x m_i \overline{V}_i$$

$$\overline{H}_{0i} = r \left(\cos\theta\, \bar{i} + sen\theta\, \bar{j}\right) x\ m_i r \left[\omega_z \left(- sen\theta\, \bar{i} + \cos\theta\, \bar{j}\right) - \omega_y \cos\theta \bar{k}\right]$$

$$\overline{H}_{0i} = r^2 m_i \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\omega_z \operatorname{sen}\theta & \omega_z \cos\theta & -\omega_y \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\overline{H}_{0i} = r^2 m_i \left[-\omega_y \left(\operatorname{sen}\theta \cos\theta\, \bar{i} - \cos^2\theta\, \bar{j}\right) + \omega_z\, \bar{k}\right]$$

b).- Para el sistema:

$$\overline{H}_0 = \int_0^{2\pi} r^2 \left[-\omega_y \left(\operatorname{sen}\theta \cos\theta\, \bar{i} - \cos^2\theta\, \bar{j}\right) + \omega_z \bar{k}\right] \frac{M}{2\pi} d\theta$$

$$\overline{H}_0 = \frac{M\, r^2}{2\pi} \left[-\omega_y \bar{i} \left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} + \omega_y \bar{j} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} + \omega_z \bar{k} \theta \Big|_0^{2\pi} \right]$$

$$\overline{H}_0 = \frac{M\, r^2}{2} \left(\omega_y \bar{j} + 2\omega_z \bar{k}\right) \quad \text{(Unidades de cantidad de movimiento angular)}$$