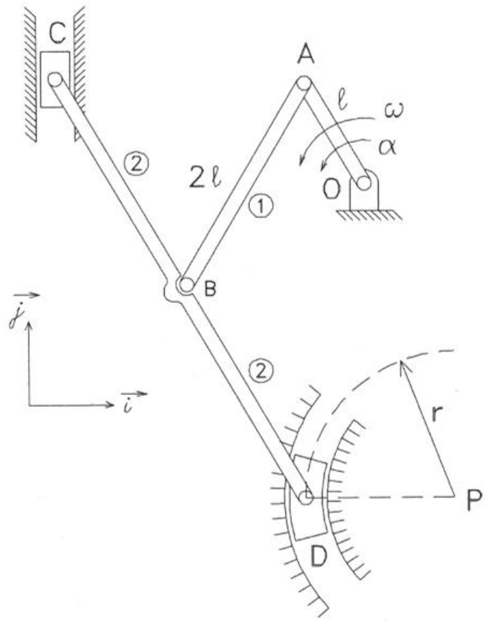
SEGUNDA PRÁCTICA DE DINÁMICA

1.- En el mecanismo de la figura la barra OA, de longitud ℓ, se mueve con ω y α conocidas. El cursor D describe una circunferencia de radio *r*. Determinar para la posición indicada (Las tres barras, en el instante de la figura, forman ángulos de 60^o con la dirección horizontal, o eje x, BC = BD = 2ℓ):

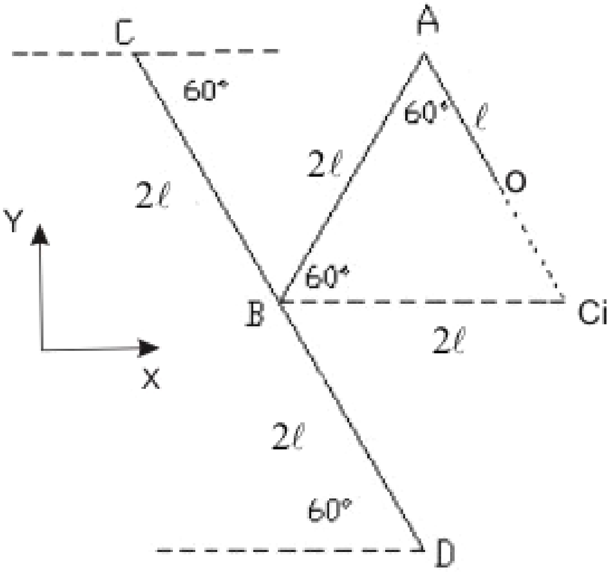


a).- La velocidad angular (usando el método de los centros instantáneos de velocidad nula) y la aceleración angular de la barra AB.

b).- La aceleración normal del punto D.

Solución

1).- Determinación de los centros instantáneos de velocidad nula.



2).- Calculo de las velocidades angulares y la velocidad de C.

$$V_A = \omega \ell \qquad y \qquad V_A = \omega_1 * 2\ell$$

$$\omega_{AB} = \omega_1 = \frac{\omega}{2}\ \vec{k}$$ (Unidades de aceleración angular)

$$\omega_{CD} = 0$$

$$V_C = V_B = V_D = \omega_{AB} * r_{CB} = \frac{\omega}{2} * 2\ell = \omega \ell$$

3).- Calculo de le aceleración angular de la barra AB a).- Calculo de la aceleración angular de la barra CD

$$\bar{a}_C = \bar{a}_D + \alpha_2 \vec{k} \times \bar{r}_{CB}$$

$$a_C \vec{j} = a_{Dn} \vec{\imath} + a_{Dt} \vec{j} + \alpha_2 \vec{k} \times 4\ell(cos60\vec{\imath} + sen60\vec{j})$$

Igualando componente en $\bar{\imath}$

$$0 = \frac{{V_D}^2}{r} - \alpha_2 * 4\ell sen60 = \frac{\omega^2 \ell^2}{r} - 4\ell\alpha_2 sen60$$

$\alpha_2 = \frac{\omega^2 \ell}{4rsen60}\ \vec{k}$ (Unidades de aceleración angular) y

$a_{Dn} = \frac{\omega^2 \ell^2}{r}$ (Unidades de aceleración)

b).- Calculo de la aceleración de "B" como parte de la barra CD y tomando como punto base a "C".

$$\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{\alpha}_2 \times \bar{r}_{CB} = -a_C \vec{j} + \frac{\omega^2 \ell}{4rsen60} \vec{k} \times 2\ell(-cos60\vec{\imath} - sen60\vec{j})$$

$$\bar{a}_B = -ac\vec{j} + \frac{\omega^2 \ell^2}{2r}\vec{\imath} - \frac{\omega^2 \ell^2}{4r} * \frac{cos60}{sen60}\vec{j} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

c).- Calculo de la aceleración de "B" como parte de la barra AB y tomando como punto base a " A"

$$\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \alpha_1 \vec{k} \times \overrightarrow{r_{AB}} - \omega_1^2 \overrightarrow{r_{AB}}$$

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha} \times \overrightarrow{r_{OA}} - \omega^2 \overrightarrow{r_{OA}} + \alpha_1 \vec{k} \times \bar{r}_{AB} - \omega_1^2 \bar{r}_{AB}$$

$$\vec{a}_B = \alpha\vec{k} \times \ell(-cos60\vec{\imath} + sen60\vec{j}) - \omega^2 \ell(-cos60\vec{\imath} + sen60\vec{j}) +$$

$$\alpha_1 \vec{k} \times 2\ell(-cos60\vec{\imath} - sen60\vec{j}) - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 2\ell(-cos60\vec{\imath} + sen60\vec{j})$$

$$\vec{a}_B = (-\alpha\ell sen60 + \omega^2 \ell cos60 + 2\ell\alpha_1 sen60 + \frac{\omega^2 \ell cos60}{2})\vec{\imath}$$

$$-\alpha\ell cos60 - \omega^2 \ell sen60 - 2\ell\alpha_1 cos60 + \frac{\omega^2 \ell sen60}{2})\vec{j} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

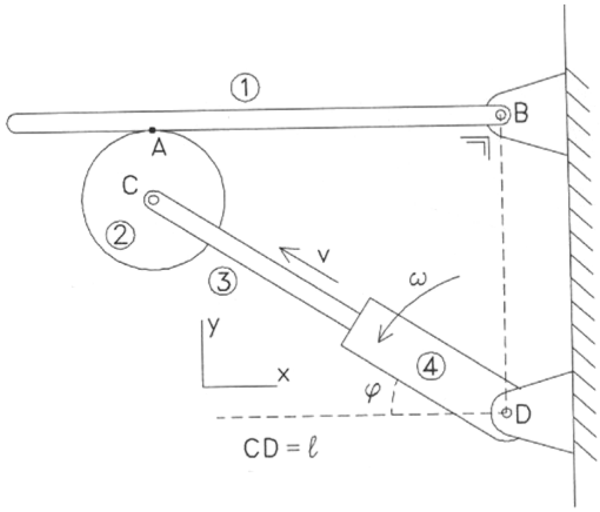
(1)= (2) Igualando las componentes en $\vec{\imath}$

$$\frac{\omega^2 \ell^2}{2r} = \frac{3}{2}\omega^2 \left(\frac{1}{2}\right) - \alpha\ell\frac{\sqrt{3}}{2} + \alpha_1 \ell\sqrt{3}$$

$$\alpha_1 = \frac{\omega^2 l}{2r} - \frac{3\omega^2}{4\sqrt{3}} + \alpha\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$\alpha_1 = \frac{\omega^2}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\ell}{r} - \frac{3}{2}\right) + \frac{\alpha}{2} \quad \vec{k} \quad {rad}/{s^2}$$

2.- El brazo telescópico DC del dispositivo considerado gira con velocidad angular ω constante y conocida; simultáneamente se alarga con velocidad v constante y conocida. El disco ②, de radio *r*, está en contacto sin deslizamiento con la barra ① en el punto A. En el instante de la figura el ángulo en B es recto. Determinar, en base de la proyección indicada, los valores ω_1 y ω_2, de la barra ① y del disco ② respectivamente.



Solución

1).- Calculo de la velocidad de "C" , si D′ pertenece a (3) coincidente con D y $\omega_3 = \omega_4 = \omega$

$$\vec{V}_C = \vec{V}_{D'} + \omega_3 \vec{K} \times r_{D'C}$$

Si:

$$\vec{V}_{D'} = \overbrace{\vec{V}_D}^{\bar{0}} + \vec{\omega}_4 \times \overbrace{\vec{r}_{DD'}}^{\bar{0}} + \vec{V}_{D'/4} = V(-\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath})$$

$$\vec{V}_C = V(-\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}) + \omega_3\vec{K} \times \ell(-cos\varphi\vec{\imath} + sen\varphi\vec{\jmath})$$

$$\vec{V}_C = (-Vcos\varphi - \omega\ell sen\varphi)\vec{\imath} + (Vsen\varphi\vec{\imath} - \omega\ell cos\varphi)\vec{\jmath} \qquad \text{………………….. (1)}$$

2).- Calculo de la velocidad de "C"; tomando como punto de referencia a "A".

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{AC} \quad ,\text{si} \quad \vec{V}_A = \omega_1\vec{k} \times \vec{r}_{BA} = \omega_1\vec{k} \times (-\ell cos\varphi\vec{\imath})$$

$$\vec{V}_C = -\omega_1\ell cos\varphi\vec{\jmath} + \omega_2\vec{k} \times (-r)\vec{\jmath} = \omega_2 r\vec{\imath} - \omega_1\ell cos\varphi\vec{\jmath} \qquad \text{…………………(2)}$$

Igualando (1) y (2)

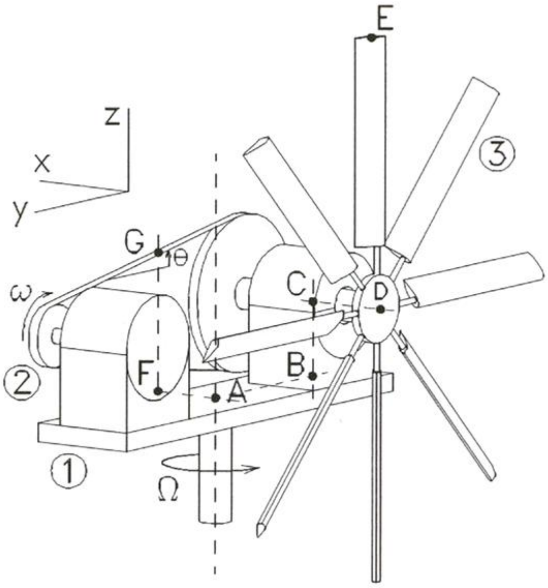
$$\omega_2 r = -(vcos\varphi + \omega\ell sen\varphi) \longrightarrow \omega_2 = -\frac{1}{r}(vcos\varphi + \omega\ell sen\varphi)$$

$\omega_2 = -\frac{1}{r}(vcos\varphi + \omega\ell sen\varphi)\ \vec{k}$ (Unidades de aceleración angular)

$-\omega_2 \ell cos\varphi = vsen\varphi - \omega\ell cos\varphi$

$\omega_1 = \omega - \frac{v}{\ell}\tan\varphi\ \ \vec{k}$ (Unidades de aceleración angular)

3.- Las palas ③ del ventilador de eje CD son propulsadas por el motor ②, que se mueve con ω constante y conocida con respecto a la plataforma ①. La transmisión del movimiento es mediante una correa que es accionada por la polea de radio *r* del motor. La polea del ventilador es de radio kr. La plataforma ① está girando alrededor de un eje vertical fijo con Ω también constante y conocida. Determinar en el instante considerado:



a).- La aceleración angular del sólido ③ y aceleración del punto E.

b).- La aceleración del punto G de la correa, la cual tiene inclinación θ respecto al eje *y*.

Datos: AB = d, BC = h, AF = DC = ℓ, DE = R, FG = b.

Solución

1).- Calculo del movimiento angular de las palas ③

a) Cálculo de la velocidad de la faja (no hay deslizamiento) en ①

$$\vec{V}_{G/1} = \omega r$$

b) Cálculo de la velocidad angular de ③ con respecto al marco ①.

$$\omega_{3/1} = \frac{\omega r}{kr} = \frac{\omega}{k}$$

c) Cálculo de la velocidad angular de ③ respecto al marco inercial

$$\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_{3/1} + \vec{\omega}_1 = \frac{\omega}{K}\vec{\imath} + \Omega\vec{k}$$

d) Cálculo de la aceleración angular de ③respecto al marco inercial

$$\dot{\vec{\omega}}_3 = \overbrace{\dot{\vec{\omega}}_{3/1}}^{\bar{0}} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_{3/1} + \overbrace{\dot{\vec{\omega}}_1}^{\bar{0}}$$

$\dot{\vec{\omega}}_3 = \frac{\Omega\omega}{K}\vec{j}$ (Unidades de aceleración angular)

2).- Calculo de la aceleración del punto “E”

$$\vec{a}_E = \vec{a}_D + \dot{\vec{\omega}}_3 \times \vec{r}_{DE} + \vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{DE})$$

$$\vec{a}_D = \overbrace{\dot{\vec{\omega}}_1}^{\bar{0}} \times \vec{r}_{AD} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{AD}) = \Omega\vec{k} \times \left(\Omega\vec{k} \times \left(-d\vec{\imath} + h\vec{k} - \ell\vec{\imath}\right)\right)$$

$$\vec{a}_D = \Omega\vec{k} \times \Omega(\mathrm{d}\vec{\imath} - \ell\vec{\jmath}) = \Omega^2(\ell\,\vec{\imath} + \mathrm{d}\vec{\jmath})$$

$$\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{DE} = \left(\frac{\omega}{k}\vec{\imath} + \Omega\vec{\mathrm{k}}\right) \times \Omega\vec{\mathrm{k}} = -\frac{\omega\Omega}{k}\vec{\jmath}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{DE}) = \left(\frac{\omega}{K}\vec{\imath} + \Omega\vec{\mathrm{k}}\right) \times \left(-\frac{\omega\Omega}{\mathrm{K}}\vec{\mathrm{j}}\right) = \frac{\omega\Omega\mathrm{R}}{\mathrm{k}}\vec{\mathrm{i}} - \frac{\omega^2\mathrm{R}}{\mathrm{k}^2}\vec{\mathrm{k}}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_3 \times \vec{r}_{DE} = \frac{\omega\Omega}{k}\vec{\jmath} \times R\vec{k} = \frac{\Omega\omega\mathrm{R}}{k}\vec{\imath}$$

Luego:

$$\vec{a}_E = \left(\Omega^2\ell + \frac{2\Omega\omega\mathrm{R}}{k}\right)\vec{\imath} + \Omega^2\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{j}} - \frac{\omega^2\mathrm{R}}{\mathrm{k}^2}\vec{\mathrm{k}}$$ (Unidades de aceleración)

3).- Calculo de la velocidad de “G”

a) Calculo de la aceleración de “G” respecto a la plataforma

$$\vec{a}_{G/1} = 0$$

b) Calculo de la aceleración de “G” respecto del marco inercial

$$\vec{a}_G = \overbrace{\vec{a}_A}^{\bar{0}} + \overbrace{\dot{\vec{\Omega}}}^{\bar{0}} \times \vec{r}_{AG} + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}_{AG}\right) + 2\vec{\Omega} \times \vec{V}_{G/1} + \overbrace{\vec{a}_{G/1}}^{\bar{0}}$$

$$\vec{a}_G = \vec{\Omega} \times \left[\vec{\Omega} \times \left(\mathrm{l}\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{b}\vec{\mathrm{k}}\right)\right] + 2\Omega\vec{\mathrm{k}} \times \omega\mathrm{r}(-\cos\theta\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}\theta\vec{\mathrm{j}})$$

$$\vec{a}_G = -\Omega^2 l\ell + 2\Omega\omega r cos\theta\vec{\imath}$$

$$\vec{a}_G = (-\Omega^2\ell + 2\Omega\omega r cos\theta)\vec{\imath}$$ (Unidades de aceleración)