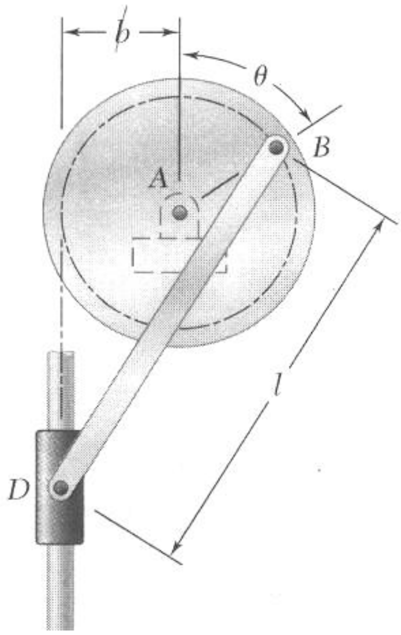
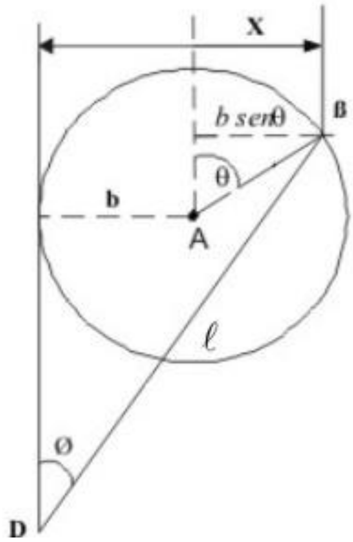
PRIMERA PRÁCTICA DE DINÁMICA

1.- El collarín D se desliza sobre una varilla vertical fija. El disco gira con una velocidad angular constante ω en sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Utilizando cualquier método, menos el de movimiento en marcos móviles, obtenga una expresión para la aceleración ungular de la varilla BD en términos de θ, ω, *b* y *l*.



Solución

1).- Aprovechando las condiciones geométricas del problema.



Para: B en X

$x = \ell \mathrm{sen}\theta$ ....(1)

$x = b(1 + sen\theta)$....................(2)

(1)= (2)

$\ell \mathrm{sen}\emptyset = \mathrm{b}(1+\mathrm{sen}\theta)$ ....(3)

2).- Derivando (3) dos veces respecto al tiempo.

$\ell \cos\emptyset\dot{\emptyset} = \mathrm{b}\cos\theta\dot{\theta}$ $\rightarrow$ si: $\dot{\theta} = \omega$ (constante)

$\dot{\emptyset} = \frac{b\cos\theta}{\ell\cos\emptyset}\omega$ ....(4)

$$\ddot{\emptyset} = b\omega\cos\emptyset\left(-\frac{sen\theta\,\dot{\theta}}{\ell\cos^2\emptyset}\right) - \frac{b\omega\cos\theta(-sen\emptyset\,\dot{\emptyset})}{\ell\cos^2\emptyset}$$

$$\ddot{\emptyset} = \frac{b\omega}{\ell}\left[\frac{\cos\theta\, sen\emptyset\,\dot{\emptyset}}{\cos^2\emptyset} - \frac{sen\theta\,\dot{\theta}}{\cos\emptyset}\right] = \frac{b\omega}{\ell}\left[\frac{\cos\theta\, sen\emptyset}{\cos^2\emptyset}\cdot\frac{b\cos\theta\,\omega}{\ell\cos\emptyset} - \frac{sen\theta\,\omega}{\cos\emptyset}\right]$$

$$\ddot{\emptyset} = \frac{b\omega^2}{\ell}\left[\frac{bcos^2\theta sen\emptyset}{\ell cos^3\emptyset} - \frac{sen\theta}{cos\emptyset}\right] \text{.......................................(5)}$$

Por la geometría:

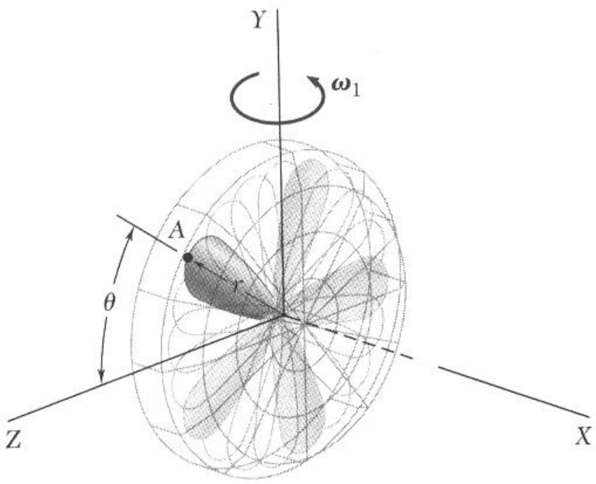
$$Sen\emptyset = \frac{b}{\ell}(1+sen\theta) \quad \text{y} \quad cos\emptyset = [1-sen^2\emptyset]^{1/2} = \frac{1}{\ell}\left[\ell^2 - b^2(1+sen\theta)^2\right]^{1/2}$$

Sustituyendo en (5)

$$\propto_{BD} = \ddot{\emptyset} = \frac{b\omega^2}{\ell}\left[\frac{bcos^2\theta\, b(1+sen\theta)\ell}{\left[\ell^2 - b^2(1+sen\theta)^2\right]^{3/2}} - \frac{\ell Sen\,\theta}{\left[\ell^2 - b^2(1+sen\theta)^2\right]^{1/2}}\right]$$

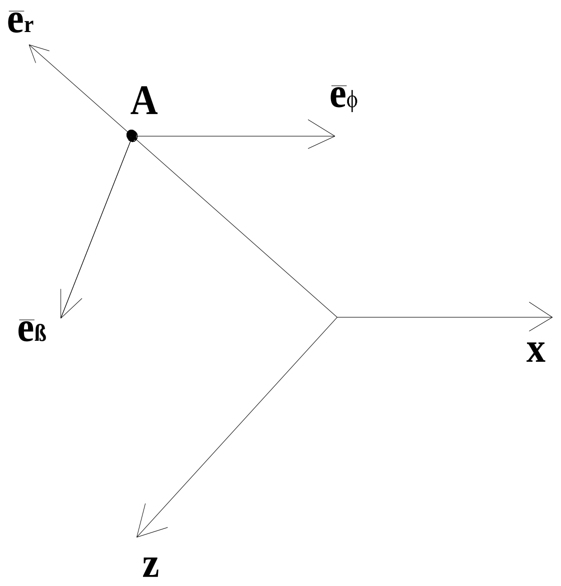
$$\propto_{BD} = \omega^2\left[\frac{b^3cos^2\theta(1+sen\theta)}{(\ell^2 - b^2(1+sen\theta)^2)^{3/2}} - \frac{bsen\theta}{(\ell^2 - b^2(1+sen\theta)^2)^{1/2}}\right] (Unid.de\ acel.\ ang.)$$

2.- El rotor de un ventilador gira alrededor del eje Y a una velocidad constante $\boldsymbol{\omega_1}$ = 0.8 rad/s. Al mismo tiempo, las aspas giran a una velocidad constante $\omega_2 = d\theta/dt$ =300 rpm. Si se sabe que la distancia entre el rotor y el punto A de la punta de las aspas es r = 160 mm y que $\theta = 45^0$ en el instante que se muestra, usando coordenadas esféricas determine la velocidad y la aceleración del punto A.



Solución:

1).- Orientación de los vectores unitarios e identificación de los parámetros que define el movimiento en coordenadas esféricas



$r = 0.16\ \ m$ $\qquad \beta = 45º$ $\qquad \dot{\emptyset} = \ w_1 = 0.8rad/s$

$\dot{r} = 0$ $\qquad \dot{\beta} = -300 \times \frac{\pi}{30} = -10\pi\ rad/s$

$\ddot{r} = 0$ $\qquad \ddot{\beta} = 0$ $\qquad \ddot{\emptyset} = \ 0$

2).- Calculo de la velocidad y aceleración de A

$$\overline{V_A} = -r\dot{\beta}\overline{e_\beta} + r\dot{\emptyset}sen\beta\overline{e_\emptyset} = 0.16 * (-10\pi)\overline{e_\beta} + 0.16 * 0.8 * \frac{\sqrt{2}}{2}$$

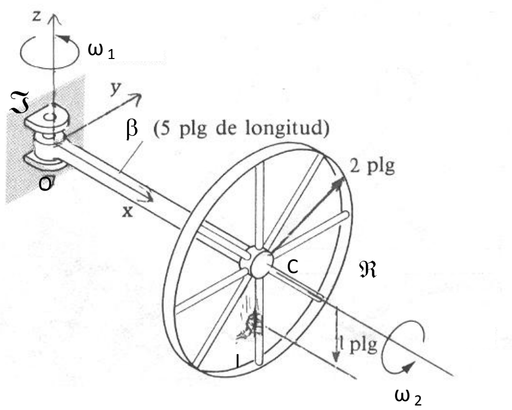
$$\overline{V_A} = -5.026\overline{e_\beta} + 0.09\overline{e_\emptyset} \longrightarrow |\overline{V_A}| = 5.0268m/s$$

$$\overline{a_4} = \left(-r\dot{\beta}^2 - r\dot{\emptyset}^2 sen^2\beta\right)\overline{e_r} + r\dot{\emptyset}^2 sen\beta cos\beta\overline{e_\beta} + 2r\dot{\beta}\dot{\emptyset}cos\beta\overline{e_\emptyset}$$

$$\overline{a_A} = (-0.16 \times 100\pi^2 - 0.16 \times 0.8^2 sen^2 45)\overline{e_r} + 0.16 \times 0.8^2 sen45cos45\overline{e_\beta} + 2 \times 0.16(-10\pi)(0.8)cos45\overline{e_\emptyset}$$

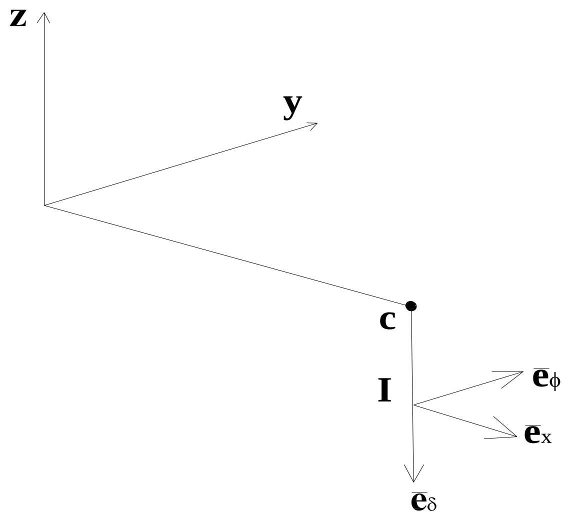
$$\overline{a_A} = -157.965\overline{e_r} + 0.0512\overline{e_\beta} - 5.687\overline{e_\emptyset} \longrightarrow |\overline{a_A}| = 158.067\ \ m/s^2$$

3.- La barra eje β de 5 plg de longitud en la figura gira en el gozne ℑ a $\omega_1 = 3$ rad/s en el sentido indicado. La rueda gira simultáneamente a $\omega_2 = 2$ rad/s alrededor de su eje como se indica; ambas rapideces son constantes. El insecto se desplaza hacia adentro sobre un rayo de la rueda a 0.2 plg/s y aumentando a razón de 0.1 plg/s^2, ambas magnitudes con relación al rayo. Para el instante mostrado, utilizando coordenada cilíndrica en la barra β, encuentre: a) la velocidad angular de la rueda y b) la aceleración del insecto.



Solución:

1).- Orientación de los vectores unitarios de las coordenadas cilíndricas en β



2).- Calculo del movimiento del marco móvil β y del punto base "C"

$$\overline{\omega_\beta} = \overline{\omega_1} = -3\overline{e_\rho}(m/s)$$

$$\dot{\overline{\omega_\beta}} = \bar{0}$$

$$\overline{V_c} = -3\overline{e_\rho} \times 5\overline{e_x} = 15\overline{e_\emptyset}$$

$$\overline{a_c} = -\omega_\beta^2 \overline{r_{oc}} = -9(5\overline{e_x}) = -45\overline{e_x} \quad (\tfrac{plg}{s^2})$$

3).- Calculo del movimiento de I, respecto al marco móvil.

Identificando los parámetros que definen el movimiento en coordenadas polares:

$\rho = 1$ $\qquad\qquad$ $\dot{\emptyset} = \omega_2 = 2 \quad rad/s$

$\dot{\rho} = -0.2 \quad plg/s$ $\qquad\qquad$ $\ddot{\emptyset} = 0 \qquad rad/s^2$

$\ddot{\rho} = -0.1 \qquad plg/s^2$

$$\overline{r_{CI}} = \overline{e_\rho}$$

$$\overline{V}_{I/\beta} = \dot{\rho}\overline{e_\rho} + \rho\dot{\emptyset}\overline{e_\emptyset} = 0.2\overline{e_\rho} + 1 \times 2\overline{e_\emptyset}$$

$$\overline{V}_{I/\beta} = 0.2\overline{e_\rho} + 2\overline{e_\emptyset} \quad (plg/s)$$

$$\overline{a}_{I/\beta} = (\dot{\rho} - \dot{\rho}\emptyset^2)\overline{e_\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\emptyset} + \rho\dot{\emptyset}\right)\overline{e_\emptyset} = (-0.1 - 1 * 4)\overline{e_\rho} + 2 * (-0.2) * 2\overline{e_\emptyset}$$

$$\overline{a}_{I/\beta} = 4.1\overline{e_\rho} - 0.8\overline{e_\emptyset} \qquad (plg/s^2)$$

4).- Calculo de la velocidad y aceleración de I, respecto marco tierra.

$$\overline{\omega}_\beta \times \overline{r}_{CI} = -3\overline{e_\rho} \times \overline{e_\rho} = \bar{0}$$

$$\overline{V}_I = \overline{V}_C + \overline{w}_\beta \times \overline{r}_{CI} + \overline{V}_{I/\beta} = -0.2\overline{e_\rho} + 17\overline{e_\emptyset}$$

$$|\overline{v}_I| = 17.001 \ plg/s$$

$$\overline{a}_I = \overline{a}_C + 2\overline{w}_\beta \times \overline{v}_{I/\beta} + \overline{a}_{I/\beta}$$

$$2\overline{\omega}_\beta \times \overline{V}_{I/\beta} = -6\overline{e_\rho} \times \left(-0.2\overline{e_\rho} + 2\overline{e_\emptyset}\right) = -12\overline{e_x} \qquad (plg/s^2)$$

$$\bar{a}_I = -4.1\overline{e_\rho} - 0.8\overline{e_\emptyset} - (45 + 12)\overline{e_x} = -4.1\overline{e_\rho} - -0.8\overline{e_\emptyset} - 57\overline{e_x} \quad (plg/s^2)$$

$$|\bar{a}_I| = 57.153 \ plg/s^2$$

5).- Velocidad angular de la rueda $\Re$.

$$\bar{\omega}_{\Re/\Im} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = -3\overline{e_\rho} + 2\overline{e_x} \quad (rad/s)$$