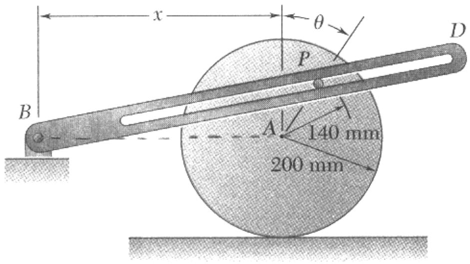
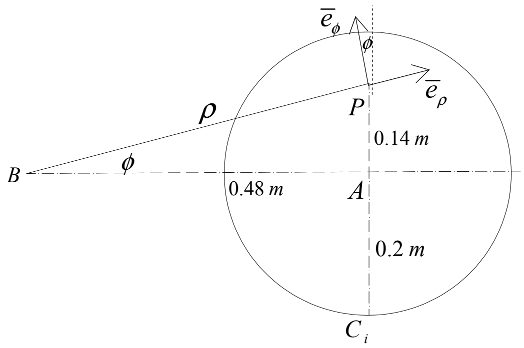
## EXAMEN SUSTITUTORIO DEL CURSO DINÁMICA

1.- El Pasador P está unido a la rueda que se muestra y desliza en la ranura cortada en la barra BD. La rueda gira hacia la derecha sin deslizamiento con una velocidad angular constante de 20 rad/s. Si se sabe que $x$ = 480 mm cuando $\theta$ = 0°. Usando coordenadas polares, determine la aceleración angular de la barra BD y la aceleración relativa del pasador P con respecto a la barra, para $\theta = 0°$.




**Solución**

1).- Orientación de los vectores unitarios e identificación de los parámetros que definen el movimiento en coordenadas polares con punto de referencia en B.




$$\phi = 30°$$

| | |
|---|---|
| $\rho = \sqrt{0.48^2 + 0.14^2} = 0.5\ m$ | $\dot{\phi} = ?$ |
| $\dot{\rho} = ?$ | $\ddot{\phi} = ?$ |
| $\ddot{\rho} = ?$ | |

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de **P,** usando coordenadas polares y tomando como punto de referencia a B:

$$\overline{V}_P = \dot{\rho}\,\overline{e}_\rho + \rho\,\dot{\phi}\,\overline{e}_\phi = \dot{\rho}\,\overline{e}_\rho + 0.5\,\dot{\phi}\,\overline{e}_\phi \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\overline{a}_P = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\overline{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\overline{e}_\phi = \left(\ddot{\rho} - 0.5\,\dot{\phi}^2\right)\overline{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + 0.5\,\ddot{\phi}\right)\overline{e}_\phi \ldots\ldots\ldots(2)$$

3).- Cálculo de la velocidad y aceleración de **P**, como parte del disco que rueda:

a).- Cálculo de la velocidad:

$$\overline{V}_P = -\omega_0\overline{e}_Z \times \overline{r}_{C\,iP} = -20\,\overline{e}_Z \times 0.34\left(sen16.26°\,\overline{e}_\rho + \cos 16.26°\,\overline{e}_\phi\right)$$

$$\overline{V}_P = 6.528\,\overline{e}_\rho - 1.9\,\overline{e}_\phi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(1) = (3) e igualando componentes:

$\dot{\rho} = 6.528$ m/s

$0.5\,\dot{\phi} = -1.9 \quad \rightarrow \quad \dot{\phi} = -3.8$ rad/s

b).- Cálculo de la aceleración:

$$\overline{a}_P = \overbrace{\overline{a}_A}^{\overline{0}} - \omega_\partial^2\, \overline{r}_{AP} = -400*0.14\left(sen16.26°\, \overline{e}_\rho + \cos 16.26°\, \overline{e}_\phi\right)$$

$\overline{a}_P = -15.68\,\overline{e}_\rho - 53.76\,\overline{e}_\phi$ ..........................................................(4)

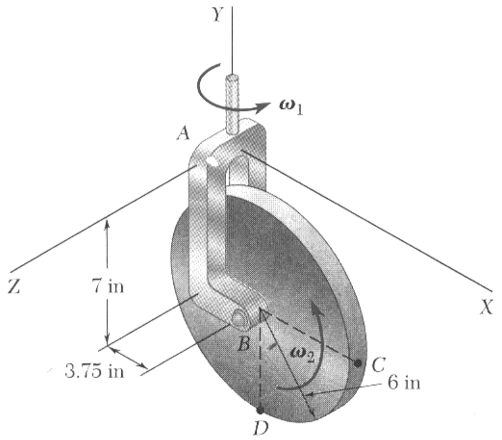
(2) = (4), reemplazando valores e igualando componentes:

$\ddot{\rho} - 0.5*3.8^2 = -15.68 \quad \rightarrow \quad \ddot{\rho} = -8.46$ m/s$^2$ (Aceleración relativa de P respecto a la barra)

$2*6.528*(-3.8) + 0.5\,\ddot{\phi} = -53.76$

$\ddot{\phi} = -8.28$ rad/s$^2$ (Aceleración angular de la barra BD)

**2.-** Un disco de 6 in (pulgada) de radio gira a la velocidad constante $\omega_2$ = 5 rad/s con respecto al brazo AB, que a su vez gira a la velocidad constante $\omega_1$ = 3 rad/seg. Para la posición que se muestra, determine la velocidad y aceleración del punto D.




**Solución**

El Disco tiene un movimiento general en el espacio

1).- Cálculo de la velocidad y aceleración angulares del disco:

$\overline{\omega}_\partial = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 = 3\,\overline{j} + 5\,\overline{k}$ (rad/s) (Teorema de adición)

$\dot{\overline{\omega}}_\partial = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2 = 3\,\overline{j} \times 5\,\overline{k} = 15\,\overline{i}$ (rad/s$^2$) (Derivada de un vector en distintos marcos de referencia)

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de **D**:

$$\overline{V}_D = \overline{V}_B + \overline{\omega}_\partial \times \overline{r}_{BD} = 3\,\overline{j} \times 3.75\,\overline{i} + \left(3\,\overline{j} + 5\,\overline{k}\right) \times \left(-6\,\overline{j}\right)$$

$\overline{V}_D = 30\,\overline{i} - 11.25\,\overline{k}$ (plg/s)

$$\overline{a}_D = \overline{a}_B + \dot{\overline{\omega}}_\partial \times \overline{r}_{BD} + \overline{\omega}_\partial \times \overbrace{\left(\overline{\omega}_\partial \times \overline{r}_{BD}\right)}^{30\,\overline{i}}$$

Donde:

$$\overline{a}_B = -\omega_1^2\, \overline{r}_{OB} = -9\left(3.75\,\overline{i}\right) = -33.75\,\overline{i} \quad \text{(plg/s}^2\text{)}$$

$$\dot{\overline{\omega}}_\partial \times \overline{r}_{BD} = 15\,\overline{i} \times \left(-6\,\overline{j}\right) = -90\,\overline{k} \quad \text{(plg/s}^2\text{)}$$

$$\overline{\omega}_\partial \times \left(\overline{\omega}_\partial \times \overline{r}_{BD}\right) = \left(3\,\overline{j} + 5\,\overline{k}\right) \times 30\,\overline{i} = 150\,\overline{j} - 90\,\overline{k} \quad \text{(plg/s}^2\text{)}$$

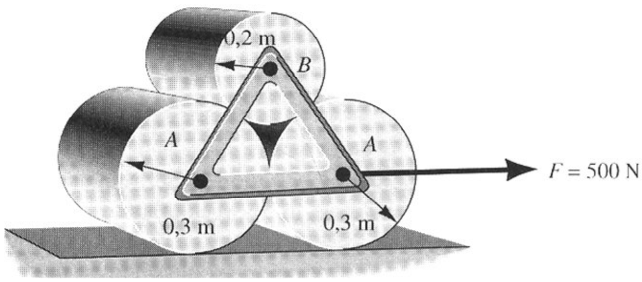
Luego:

$$\overline{a}_D = -33.75\,\overline{i} + 150\,\overline{j} - 180\,\overline{k} \quad \text{(plg/s}^2\text{)}$$

**3.-** Tres cilindros están conectados entre sí mediante barras ligeras. Los cilindros A tienen una masa de 5 kg cada uno y el cilindro B tiene una masa de 3 kg. Si no existe deslizamiento en ningún punto y el sistema parte del reposo. Usando la teoría de la cinética de los sistemas de partículas, responda a las siguientes interrogantes:

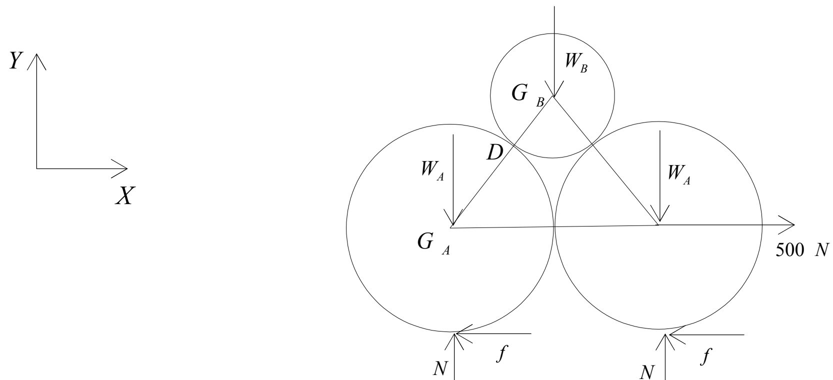
a).- ¿Cuál será la velocidad del sistema después de recorrer 0.8 m?

b).- ¿Cuáles serán las fuerzas de rozamiento que se produce entre el terreno y cada uno de los cilindros A?




**Solución**

1).- D.S.F., representando al sistema en un plano:




2).- Por el principio de trabajo y energía cinética en el sistema.

$$W_{1-2} = \Delta E_K$$

a).- Cálculo de la energía cinética del sistema de partículas cilindro:

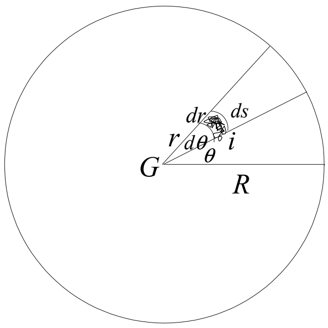
Si : $E_K = \frac{1}{2} m V_G^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\rho}_{G\,i}^2 = E_{K\,G} + E_{K\,rel}$

i).- Cálculo de la velocidad de la partícula iésima:

$$\overline{V}_i = \overline{V}_G + \omega\, \overline{k} \times \overline{r}_{G\,i} = \overline{V}_G + \omega\, r\, \overline{u}$$

$$\therefore \quad \dot{\rho}_{G\,i}^2 = (\omega\, r)^2$$

ii).- Determinación de la masa diferencial:




$$\rho = \frac{m}{A} = \frac{m}{\pi R^2} \quad \rightarrow \quad dm = \rho\, dA$$

$$dm = \rho\, dr\, ds = \rho\, r\, dr\, d\theta$$

iii).- Cálculo de la energía cinética relativa al centro de masa:

$$E_{K\,rel} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\rho}_{G\,i}^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \omega^2 r^2 \rho\, r\, dr\, d\theta = \frac{1}{8} \rho\, \omega^2 R \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$E_{K\,rel} = \frac{1}{4} m\, R^2 \omega^2$$

4i).- Energía cinética de uno de los cilindros A:

$$E_{K\,A} = \frac{1}{2} m_A V_{G\,A}^2 + \frac{1}{4} m_A r_A^2 \omega_A^2 = \frac{1}{2} m_A \left[ (\omega_A r_A)^2 + \frac{1}{2} r_A^2 \omega^2 \right] = \frac{3}{4} m_A r_A^2 \omega_A^2$$

5i).- Energía cinética del cilindro B:

$$E_{K\,B} = \frac{1}{2} m_B V_B^2 + \frac{1}{4} m_B r_B^2 \omega_B^2$$

Si: $V_A = V_{B}$ (por estar conectadas por barras)

$$\overline{V}_D = \overline{V}_A + \omega_A \overline{k} \times \overline{r}_A \quad y \quad \overline{V}_D = \overline{V}_B + \omega_B \overline{k} \times \overline{r}_B$$

$$\omega_A \overline{k} \times \overline{r}_A = \omega_b \overline{k} \times \overline{r}_B \quad \rightarrow \quad \omega_A r_A = \omega_B r_B \quad \rightarrow \quad \omega_B = \frac{r_A}{r_B} \omega_A$$

$$\omega_B = \frac{0.3}{0.2}\omega_A \quad \rightarrow \quad \omega_B = 1.5\,\omega_A$$

Luego:

$$E_{K\,B} = \frac{1}{2}m_B\left(\omega_A r_A\right)^2 + \frac{1}{4}m_B r_B^2\left(\frac{r_A}{r_B}\omega_A\right)^2 = \frac{3}{4}m_B r_A^2\omega_A^2$$

3).- Por el principio de trabajo y energía cinética:

$$W_{1-2} = E_{K\,2} - \overbrace{E_{K\,1}}^{0} = 2E_{K\,A} + E_{K\,B}$$

$$500*0.8 = 2*\frac{3}{4}*5*0.3^2*\omega_A^2 + \frac{3}{4}*3*0.3^2*\omega_A^2 = 0.8775\,\omega_A^2$$

$$\omega_A = 21.35 \quad \text{rad/s}$$

Luego:

$$V_{G\,A} = \omega_A r_A = 21.35*0.3 = 6.405 \quad \text{m/s}$$

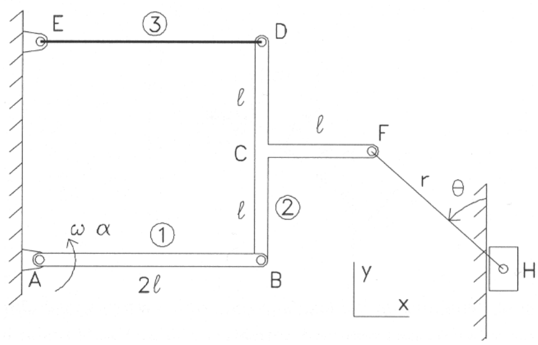
4).- Por el principio de trabajo y energía cinética del centro de masa:

$$\int_1^2\left(\sum\overline{F}\right)\cdot d\overline{r}_G = E_{K\,G2} - \overbrace{E_{K\,G1}}^{0}$$

$$-2f*0.8 + 500*0.8 = \frac{1}{2}*13*6.405^2$$

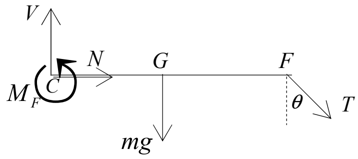
$$f = 83.34 \quad \text{N}$$

**4.-** El sistema que se representa, se ha diseñado para arrastrar el cursor H de masa *m* por la pared lisa vertical. La barra ①, de masa 2*m*, gira con una velocidad angular ω y aceleración angular α, ambas conocidas. El sólido ② está formado por una barra BD de masa 2*m,* que tiene soldada perpendicularmente, en C; otra barra CF de masa *m*. La masa de la barra ③ se considera despreciable. En el instante en cuestión el sólido BD es perpendicular a la barra ①. Determinar el momento flector en el punto C de la barra ② en función de la tensión T del cable FH.




**Solución**

1).- D.C.L. de la barra seccionada:




2).- Relaciones cinemáticas.- El cuerpo BCDF tiene un movimiento de traslación.

$$\overline{a}_B = \overline{a}_C = \overline{a}_F = \overline{a}$$

$$\overline{a} = \alpha\,\overline{k} \times \overline{r}_{AB} - \omega^2 \overline{r}_{AB} = \alpha\, k \times 2\ell\,\overline{i} - \omega^2\left(2\ell\,\overline{i}\right)$$

$$\overline{a} = -2\ell\omega^2\,\overline{i} + 2\ell\alpha\,\overline{j} \quad \text{(Unidades de aceleración)}$$

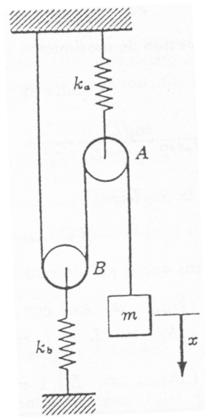
3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_C \overline{k} = \overline{\rho}_{CG} \times m\overline{a} = \frac{\ell}{2}\,\overline{i} \times m\left(-2\ell\omega^2\,\overline{i} + 2\ell\alpha\,\overline{j}\right) = \ell^2 m\alpha\,\overline{k}$$

$$M_F - mg\frac{\ell}{2} - T\cos\theta = m\alpha\ell^2$$

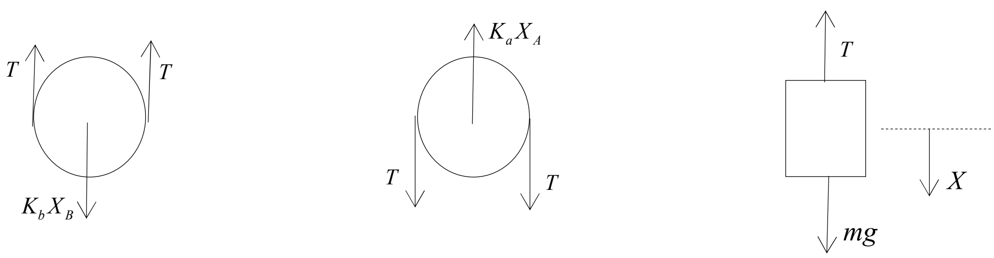
$$M_F = mg\frac{\ell}{2} + m\alpha\ell^2 + T\ell\cos\theta \quad \text{(Unidades de Momento)}$$

**5.-** Si la masa de las poleas mostradas en la figura son pequeñas y la cuerda es inextensibles encuentre la frecuencia circular natural del sistema.




**Solución**

1).- D.C.L.(s)




(a) (b) (c)

2).- Relaciones cinemáticas:

$$X = 2X_A + 2X_B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

3).- Relaciones cinéticas.

En (a):

$$\sum F_V = 0 \;\;\rightarrow\;\; 2T - K_b X_B = 0 \;\;\rightarrow\;\; X_B = \frac{2T}{K_b}$$

En (b):

$$\sum F_V = 0 \;\;\rightarrow\;\; 2T - K_a X_A = 0 \;\;\rightarrow\;\; X_A = \frac{2T}{K_a}$$

En (1):

$$X = 4T\left(\frac{1}{K_a} + \frac{1}{K_b}\right) = T\,\overbrace{4\left(\frac{K_b + K_a}{K_a K_b}\right)}^{\frac{1}{Ke}}$$

En (c), siendo este un sistema simple masa – resorte:

$$m\ddot{X} + K_e X = 0$$

Luego:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_e}{m}} = \sqrt{\frac{K_a K_b}{4m\left(K_a + K_b\right)}} \quad \text{(rad/s)}$$