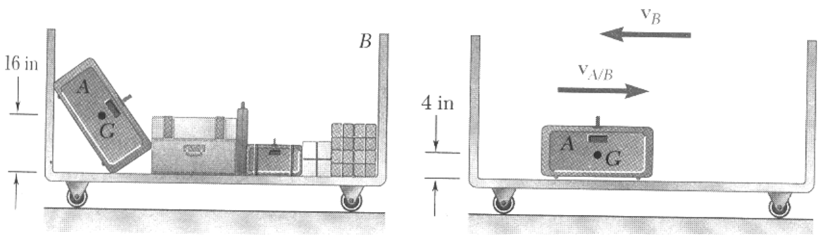
EXAMEN FINAL DEL CURSO DE DINÁMICA

1.- Se ha colocado una maleta **A** de 30 lb contra uno de los extremos de un maletero **B** de 80 lb y se evita que deslice hacia abajo por medio de otra maleta. Cuando se descarga el maletero y se quita el último baúl pesado, la maleta tiene libertad para deslizar hacia abajo, lo que ocasiona que el maletero de 80 lb se mueva hacia la izquierda con una velocidad $\boldsymbol{v_B}$ de 2.5 pies/s de magnitud. Ignorando la fricción, determine:

a).- La velocidad $\mathbf{v_{A/B}}$ de la maleta relativa al maletero cuando ésta rueda sobre el piso del maletero.

b).- La velocidad del maletero después de que la maleta golpea el extremo derecho de éste sin que rebote.

c).- La energía que pierde en el impacto de la maleta sobre el piso del maletero.



Solución

Como no hay fuerza resultante en el sistema en la dirección horizontal, la cantidad de movimiento lineal se conserva en esta dirección.

1).- Por conservación de la cantidad de moviendo lineal cuando la maleta rueda sobre el piso del maletero.

$$0 = m_B V_B + m_A V_A = m_B V_B + m_A (V_B - v_{A/B})$$

$$V_B (m_B + m_A) = m_A v_{A/B} \quad \rightarrow \quad v_{A/B} = \frac{m_A + m_B}{m_A} V_B$$

$$v_{A/B} = \frac{30+80}{30} * 2.5 = 9.167 \quad \text{pie/s} \qquad \text{y} \qquad V_A = 2.5 - 9.167 = 6.667 \quad \text{pie/s}$$

2).- Por conservación de la cantidad de movimiento lineal un instante después del choque plástico:

$$0 = m_B V_{B2} + m_A V_{B2} = (m_A + m_B) V_{B2}$$

$$V_{B2} = 0$$

3).- Cálculo de la pérdida de energía:

a).- Cálculo de la energía en el instante inicial:

$$E_{S1} = U_{Pg} = mgh = 30 * \left(\frac{16-4}{12} \right) = 30 \quad \text{lb} - \text{pie}$$

b).- Cálculo de la energía un instante después del impacto:

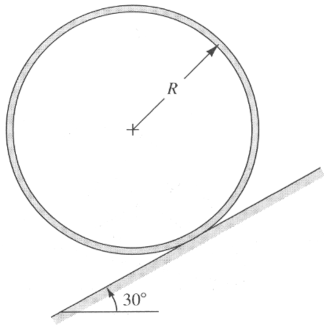
$$E_{S2} = E_{KS2} = \frac{1}{2} m_B V_B^2 + \frac{1}{2} m_A V_A^2 = \frac{1}{2} * \frac{80}{32.2} * 2.5^2 + \frac{1}{2} * \frac{30}{32.2} * 6.667^2$$

$$E_{S2} = 28.47 \quad \text{lb - pie}$$

c).- Cálculo de la pérdida de energía en el impacto:

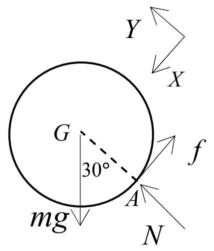
$$\Delta E = E_{S1} - E_{S2} = 30 - 28.47 = 1.53 \quad \text{lb - pie}$$

2.- Un aro delgado y uniforme rueda sin deslizar por un plano inclinado de 30°, el aro tiene una masa por unidad de longitud de 7.5 kg/m y un radio de R = 1.2 m, Usando la teoría de la cinética de los sistema de partículas, encontrar la aceleración angular del aro.



Solución

1).- D.C.L.

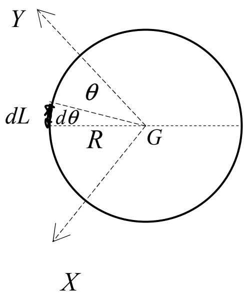


2).- Tomando momentos con respecto al punto A:

Sabiendo, que: $\sum \overline{M}_A = \dot{\overline{H}}_G + \overline{\rho}_{AG} \times m\, \overline{a}_G$ ....(1)

a).- Cálculo de $\dot{\overline{H}}_G$ para el sistema de partículas aro $\left(\overline{H}_G = (H_G)_r \right)$

i).- Cálculo de la cantidad de movimiento angular para la partícula iésima, con respecto al centro de masa:



$$\rho = \frac{m}{2\pi R} \quad \rightarrow \quad dm = \rho\, dL$$

$$dL = R\, d\theta$$

$$\overline{\rho}_{G\,i} = R\left(sen\theta\, \overline{i} + \cos\theta\, \overline{j} \right)$$

$$\dot{\overline{\rho}}_{G\,i} = -\omega\, \overline{k} \times \overline{\rho}_{G\,i} = -\omega\, \overline{k} \times R\left(sen\theta\, \overline{i} + \cos\theta\, \overline{j} \right) = \omega R \cos\theta\, \overline{i} - \omega R sen\,\theta\, \overline{j}$$

$$\overline{H}_{G\,i} = \overline{\rho}_{G\,i} \times m_i\, \dot{\overline{\rho}}_{G\,i} = R(sen\theta\, \overline{i} + \cos\theta\, \overline{j}) \times m_i\ \omega R(\cos\theta\, \overline{i} - sen\theta\, \overline{j})$$

$$\overline{H}_{G\,i} = -m_i\, \omega R^2 \left(sen^2\theta + \cos^2\theta\right) \overline{k} = -m_i\, \omega R^2\ \overline{k}$$

ii).- Cálculo de la cantidad de movimiento angular para el sistema aro:

$$H_G = \sum_{i=1}^{n} H_{G\,i} = \int_0^{2\pi} -\omega R^2\ dm = -\omega R^2 \int_0^{2\pi} \rho R\ d\theta = -\omega R^3 \rho\ 2\pi$$

$$H_G = -\omega R^3 * \frac{m}{2\pi R} * 2\pi = -mR^2\omega \ \rightarrow \ \overline{H}_G = -mR^2\omega\, \overline{k} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

iii).- Derivando (2) respecto al tiempo:

$$\dot{\overline{H}}_G = -mR^2\alpha\, \overline{k}$$

b).- Cálculo de $\overline{\rho}_{AG} \times m\overline{a}_G$:

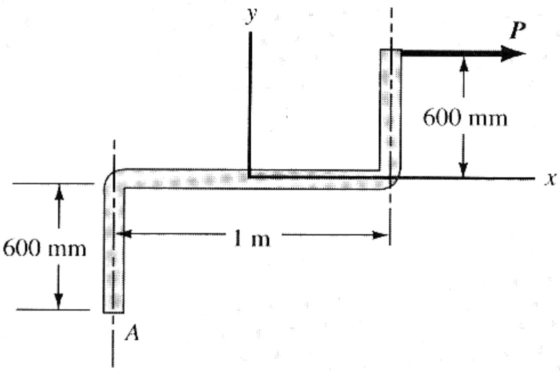
$$\overline{\rho}_{AG} \times m\overline{a}_G = R\ \overline{j} \times m\left(\alpha R\ \overline{i}\right) = -mR^2\alpha\, \overline{k}$$

3).- Cálculo de la aceleración angular:

En (1): $(-mgsen30° * R)\ \overline{k} = (-mR^2\alpha - mR^2\alpha)\ \overline{k}$

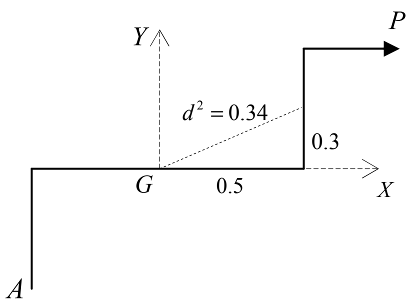
$$\alpha = \frac{g\ sen30°}{2\,R} = \frac{9.81*0.5}{2*1.2} = 2.044 \ \ \text{rad/s}^2$$

3.- Una barra doblada descansa sobre una superficie horizontal lisa. La barra tiene una masa de 20 kg ¿Cuál será la aceleración del punto A cuando se aplique una fuerza P = 100 N?



Solución

1).- D.C.L.



2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m\,\ddot{X}_G \quad \rightarrow \quad 100 = 20\,\ddot{X}_G \quad \rightarrow \quad \ddot{X}_G = 5 \text{ m/s}^2$$

$$\sum M_G = I_G\alpha \quad \rightarrow \quad 100*0.6 = \left[2\left(\frac{1}{12}*\frac{20}{2.2}*0.6*0.6^2 + \frac{20}{2.2}*0.6*0.34\right) + \frac{1}{12}*\frac{20}{2.2}*1*1^2\right]\alpha$$

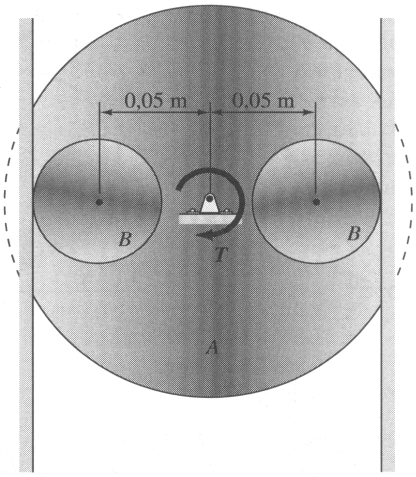
$$\alpha = 12.516 \text{ rad/s}^2$$

3).- Cálculo de la aceleración de A:

$$\overline{a}_A = \overline{a}_G + \overline{\alpha}\times\overline{r}_{GA} = 5\,\overline{i} - 12.516\,\overline{k}\times\left(-0.5\,\overline{i} - 0.6\,\overline{j}\right)$$

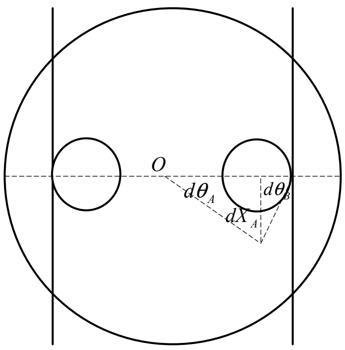
$$\overline{a}_A = -2.51\,\overline{i} + 6.26\,\overline{j} \quad \text{m/s}^2$$

4.- Un cilindro **A** puede girar libremente alrededor de su eje fijo. Dos pequeños cilindros idénticos **B** tienen sus ejes de rotación situados sobre el cilindro **A**, éstos ruedan sin deslizar a lo largo de las paredes indicadas. Utilizando el método alternativo del principio de trabajo y energía para desplazamientos infinitesimales reales (MAPTEDIR) encontrar la aceleración angular del cilindro **A,** si se le aplica un par T = 5 N-m. El sistema está en un plano vertical. Utilizar los datos siguientes: m_A = 1.8 kg, m_B = 1.4 kg, r_A = 1.3 m y r_B = 40 mm.



Solución

1).- Cálculos elementales:



$$dX_A = dX_B$$

$$0.05 d\theta_A = 0.04 d\theta_B \quad \rightarrow \quad d\theta_B = \frac{0.05}{0.04} d\theta_A$$

$$d\theta_B = 1.25\, d\theta_A$$

$$\alpha_B = 1.25\,\alpha_A$$

$$a_{G\,B} = 0.04\,\alpha_B = 0.05\,\alpha_A$$

2).- Por el MAPTEDIR:

$$dW_{NC} = dE_K + dU \quad \text{(para el problema)}$$

Donde:

$$dW_{NC} = Td\theta_A = 5\, d\theta_A$$

$$dE_K = \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{a}_{G\,i} \cdot d\,\overline{r}_{G\,i} + \sum_{i=1}^{n} I_{G\,i} \alpha_i d\theta_i$$

$$dE_K = 2*1.4*0.05\,\alpha_A*0.05d\theta_A + 2*\frac{1}{2}*1.4*0.04^2*1.25\alpha_A*1.25d\theta_A + \frac{1}{2}*1.8*1.3^2\alpha_A d\theta_A$$

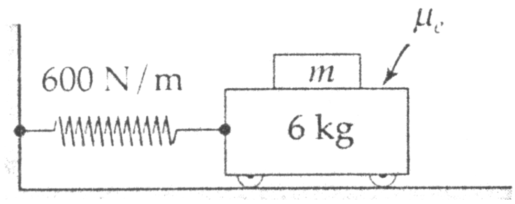
$$dE_K = 1.5315\alpha_A d\theta_A$$

$dU = 0$ (mientras un cilindro baja el otro sube)

Luego:

$$5\,d\theta_A = 1.5315\alpha_A d\theta_A \quad \rightarrow \quad \alpha_A = 3.265 \ \text{ rad/s}^2 \ \circlearrowright$$

5.- Con la hipótesis de ausencia de deslizamiento entre el bloque y el carrito, hallar la masa *m* del bloque a colocar encima del carrito de 6 kg para que el periodo del sistema sea de 0.75 seg ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento estático mínimo μ_S para el cual el bloque no resbala sobre el carrito cuando éste se aparta 50 mm de su posición de equilibrio y luego se suelta?



Solución

1).- Cálculo de la masa *m* del bloque.

La ecuación diferencial del movimiento es:

$$(6+m)\,\ddot{X} + K\,X = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{X} + \frac{K}{(6+m)}X = 0$$

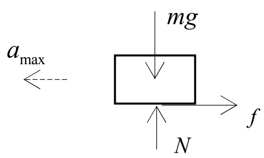
Luego:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{6+m}} = \sqrt{\frac{600}{6+m}} \qquad \rightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{6+m}{600}}$$

$$0.75 = 2\pi\sqrt{\frac{6+m}{600}} \quad \rightarrow \quad 0.014248 = \frac{6+m}{600} \quad \rightarrow \quad m = 2.55 \ \text{kg}$$

2).- Cálculo del coeficiente de rozamiento mínimo.

a).- D.C.L. del bloque pequeño:



b).- Sabemos que, $a_{\max} = c\,\omega_n^2$:

$$a_{\max} = 0.05 * \frac{600}{6 + 2.55} = 3.509 \quad \text{m/s}^2$$

$$\sum F_V = 0 \quad \rightarrow \quad N = mg = 2.55 * 9.81 = 25.015 \text{ Newton}$$

$$\sum F_H = m a_{\max} \quad \rightarrow \quad f = 2.55 * 3.509 = 8.94795$$

$$\mu_S * 25.015 = 8.94795 \quad \rightarrow \quad \mu_S = 0.358$$