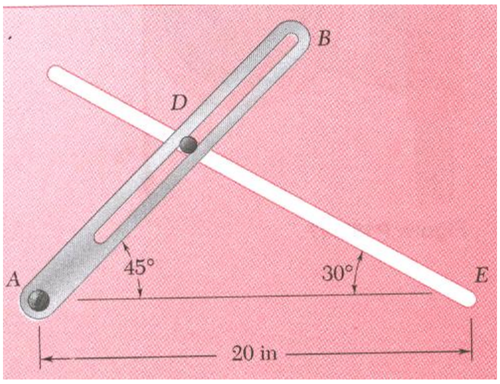
PRIMER EXAMEN DE DINÁMICA

1.- El Movimiento del pasador D se guía mediante una ranura cortada en la barra AB y una ranura cortada en una placa fija. Si en el instante indicado la barra AB gira con una velocidad angular de 3 rad/s y una aceleración angular de 5 rad/s^2, ambas en el sentido de las manecillas del reloj, determine la aceleración del pasador D.

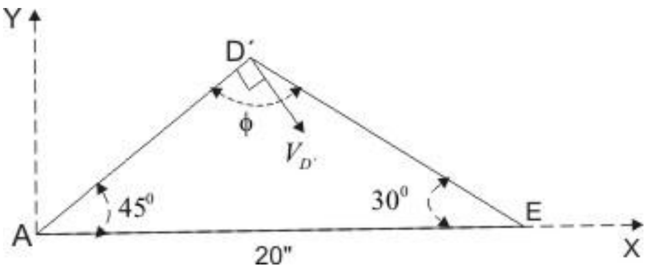


Solución

Marco móvil la barra AB.

1).- Cálculos elementales.

D´ € AB coincidente con D.



$$\emptyset = 180^0 - 45^0 - 30^0 = 105^0$$

Por la Ley de senos:

$$\frac{AD'}{sen30^0} = \frac{AE}{sen\phi}$$

$$AD' = \frac{20\,sen30^0}{sen105^0} = 10.3528\,plg$$

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de D´.

$$\bar{V}_{D'} = \omega_{AB} * AD'(cos45^0\,\bar{\imath} - sen45^0\,\bar{\jmath}) = 3 * 10.3528\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\jmath}\right)$$

$$\bar{V}_{D'} = 31.058\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\jmath}\right) \quad \left(\frac{plg}{s}\right)$$

$$\bar{a}_{D'} = \alpha_{AB} * AD'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\jmath}\right) + \omega_{AB}^2 * AD'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\jmath}\right)$$

$$\bar{a}_{D'} = 5 * 10.3528\,(cos45^0\,\bar{\imath} - sen45^0\,\bar{\jmath}') + 3^2 * 10.3528\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\jmath}\right)$$

$$\bar{a}_{D'} = 51.769\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\jmath}\right) + 93.175\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\jmath}\right) \quad \left(\frac{plg}{s^2}\right)$$

3).- Cálculo del movimiento de D, respecto a la barra AB.

$$\bar{r}_{AD} = 10.3528(cos45^0\,\bar{\imath} + sen45^0\,\bar{\jmath}') \quad (plg)$$

$$\bar{V}_{D/AB} = v\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\jmath}\right) \quad y \quad \bar{a}_{D/AB} = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\jmath}\right)$$

4).- Cálculo de la velocidad y aceleración de D.

$$\bar{V}_D = V_D(cos30^0\,\bar{\imath} - sen30\,\bar{\jmath}) = \bar{V}_{D/AB} + \bar{V}_{D'} = v\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\jmath}\right) + 31.058\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\jmath}\right)$$

Igualando componentes:

$$\left.\begin{aligned} V_D cos30^0 &= 31.058\frac{\sqrt{2}}{2} + v\frac{\sqrt{2}}{2} \\ V_D cos30^0 &= 31.058\frac{\sqrt{2}}{2} - v\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} tg30^0 = \frac{21.961 - 0.7071\,v}{21.961 + 0.7071\,v}$$

$$V_D = 32.15\,\frac{pls}{s} \quad y \quad v = 8.322\,\frac{plg}{s}$$

$$\bar{a}_D = a_D\,(cos30^0\,\bar{\imath} - sen30\,\bar{\jmath}) = \bar{a}_{D'} + \bar{a}_{D/_{AB}} + 2\bar{\omega}_{AB}x\bar{r}_{AD}$$

$$2\bar{\omega}_{AB}x\bar{r}_{AD} = -6\,\bar{k}x8.322\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\jmath}\right) = 49.932\,\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{\jmath}\right)$$

Igualando Componentes:

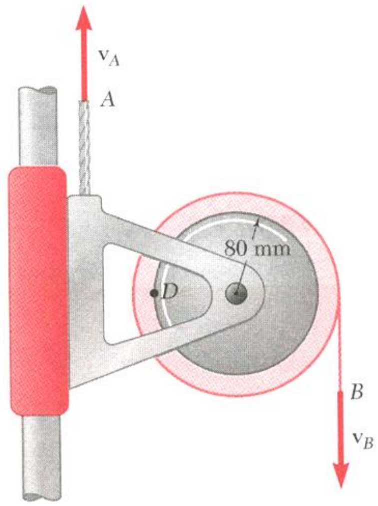
$$a_D cos30^0 = 51.769\frac{\sqrt{2}}{2} - 93.175\frac{\sqrt{2}}{2} + a\,cos45^0 + 49.936\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_D sen30^0 = 51.769\frac{\sqrt{2}}{2} + 93.175\frac{\sqrt{2}}{2} + a\,sen45^0 + 49.936\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Operando se tiene:

$$a_D = 105.3\ \ plg/\,s^2 \quad y \quad a = 120.4\ \ plg/s^2$$

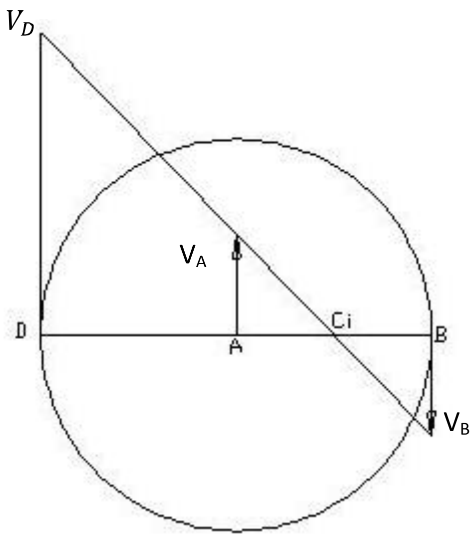
$$\bar{a}_D = 105.3\,(cos30^0\,\bar{\imath} - sen30\,\bar{\jmath}) \quad \left(\frac{plg}{s^2}\right)$$



2.- El carrete de cinta que se muestra y el armazón en el que se monta se jalan hacia arriba a una velocidad v_A = 750 mm/s. Si el carrete de 80 mm de radio tiene una velocidad angular de 15 rad/s en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj y en el instante mostrado el espesor total de la cinta en el carrete es de 20 mm, determine: a) el centro instantáneo de velocidad nula del carrete, b) las velocidades de los puntos B y D.

Solución

1).- Ubicación del centro instantáneo de velocidad cero



$$AC_i = \frac{V_A}{\varpi} = \frac{750}{15} = 50\,mm$$

$$C_iB = 80 + 20 - 50 = 50\,mm$$

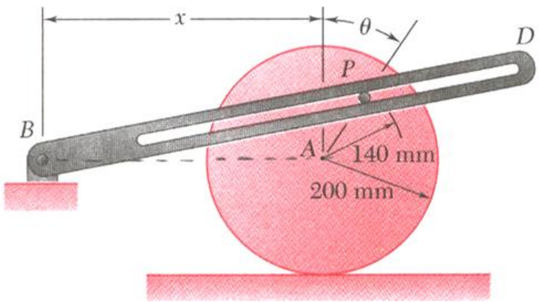
$$C_iD = 80 + 50 = 130\,mm$$

2) Calculo de la velocidad de “B”Y “D”

$$V_B = CiB * \varpi = 50 * 15 = 750\ {}^{mm}/_{s}\ \downarrow$$

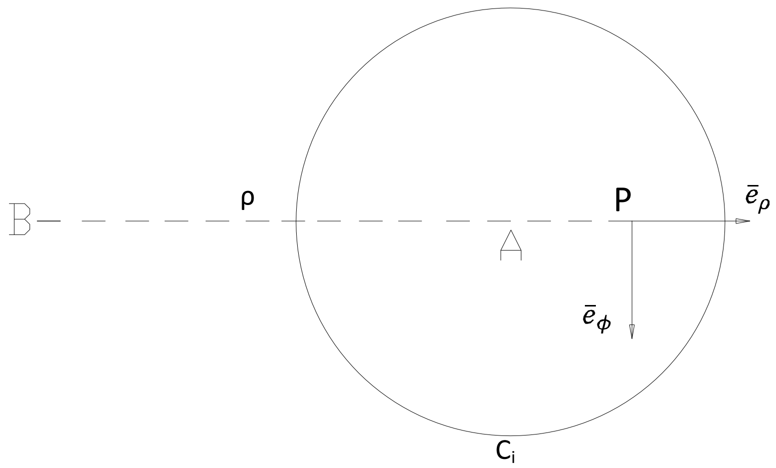
$$V_D = C_iD * \varpi = 130 * 15 = 1950\ {}^{mm}/_{s}\ \uparrow$$

3.- El pasador P está unido a la rueda que se muestra y se desliza en una ranura cortada en la barra BD. La rueda gira hacia la derecha sin deslizarse con una velocidad angular constante de 20 rad/s. Si se sabe que x = 480 mm cuando θ = 0°. Usando coordenadas polares, determine: la aceleración angular de la barra y la aceleración del pasador P con respecto a la barra cuando θ = 90°.



Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios e identificación de los parámetros que definen le movimiento en coordenadas polares.



$$\rho = X + r\theta + AP = 0.48 + 0.2 * \left(\frac{\pi}{2}\right) + 0.14$$

$$\rho = 0.934\ m$$

$$\dot{\rho} = ?$$

$$\ddot{\rho} = ?$$

$$\dot{\phi} = ?$$

$$\ddot{\phi} = ?$$

2).- Calculo de la velocidad y aceleración de "P" usando coordenadas polares y tomando como punto base a "B".

$$\bar{v}_P = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\vec{e}_\phi = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + 0.934\dot{\phi}\vec{e}_\phi \qquad \text{.........(1)}$$

$$\bar{a}_P = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\vec{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\dot{\phi}^2\right)\vec{e}_\phi = (\ddot{\rho} - 0.934\dot{\phi}^2)\vec{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + 0.934\dot{\phi}^2\right)\vec{e}_\phi \quad \text{...(2)}$$

3).- Calculo de la velocidad y aceleración de "P" como parte del disco que rueda.

$$\bar{v}_p = \varpi_D\vec{e}_z * \bar{r}_{CiP} = 20\vec{e}_z * \left(0.14\vec{e}_\rho - 0.2\vec{e}_\phi\right) = 4\vec{e}_\rho + 2.8\vec{e}_\phi \qquad \text{.........(3)}$$

Igualando componentes de (1) y (3)

$$\dot{\rho} = 4\ {}^{m}/_{s}$$

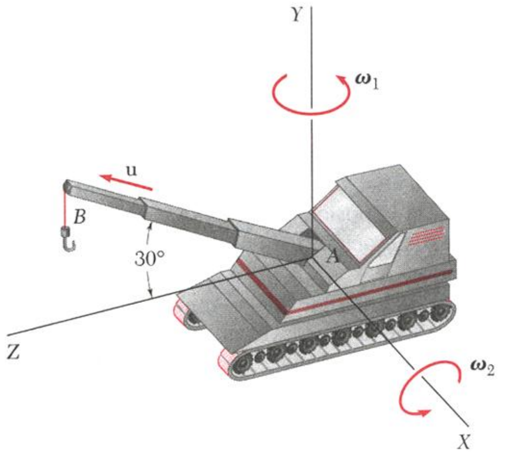
$$0.934\dot{\phi} = 2.8 \longrightarrow \dot{\phi} = 2.998\ {}^{rad}/_{s}$$

$$\bar{a}_P = \overbrace{\bar{a}_A}^{\bar{0}} - \varpi^2\bar{r}_{AB} = -400\left(0.14\vec{e}_\rho\right) = -56\vec{e}_\rho\ {}^{m}/_{s^2} \qquad \text{.........(4)}$$

Igualando componentes de (2) y (4)

$$\ddot{\rho} - 0.934 * 2.998^2 = -56 \longrightarrow \ddot{\rho} = -47.6\ {}^{m}/_{s^2} = a_{P/AB}$$

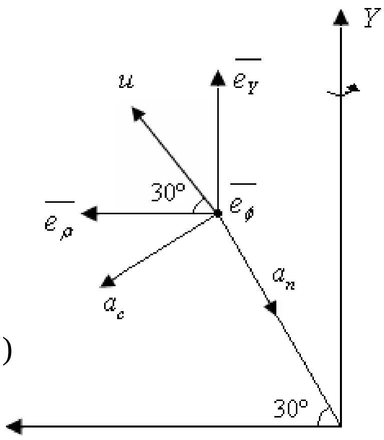
$$2*4*2.998+0.934\ddot{\phi} = 0 \longrightarrow \ddot{\phi} = -25.68\ {}^{rad}/_{s^2} = \dot{\omega}_{AD}$$



4.- La grúa que se muestra gira a la razón constante ω_1 = 0.25 rad/s, simultáneamente, la pluma telescópica desciende a una velocidad constante ω_2 = 0.40 rad/s. Si se sabe que en el instante indicado la longitud de la pluma es de 6 m y que aumenta a la velocidad constante u = 0.45 m/s. Usando coordenadas cilíndricas, determine la velocidad y la aceleración del punto B.

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios e identificación de los parámetros que definen el movimiento en coordenadas cilíndricas.



$$\rho = 6\cos 30^o$$
$$\rho = 5.196 \ \ m.$$

$$\dot{\rho} = (u\cos 30^o) + (6\,\omega_2\ sen30^o) = (0.4*\cos 30^o + 6*0.4*sen30^o)$$
$$\dot{\rho} = 1.59 m/s.$$

$$\ddot{\rho} = (-\omega_2^2\ r_{AB}\cos 30^o) + (2\,\omega_2\ u\ sen30^o) = (-0.4^2*6*\cos 30^o) + (2*0.4*0.45*sen30^o)$$
$$\ddot{\rho} = -0.651 m/s^2.$$

$$\dot{\phi} = \omega_1 = 0.25 \quad rad/s.$$

$$\ddot{\phi} = 0 \quad rad/s^2$$

$$\dot{Y} = (u\ sen30^o) - (6\,\omega_2\cos 30^o) = (0.4*sen30^o) - (6*0.4*\cos 30^o)$$
$$\dot{Y} = -1.853 \ \ m/s$$

$$\ddot{Y} = (-\omega_2^2\ r_{AB}\ sen30^o) - (2*0.4*0.45\cos 30^o)$$
$$\ddot{Y} = -0.792 \quad m/s^2$$

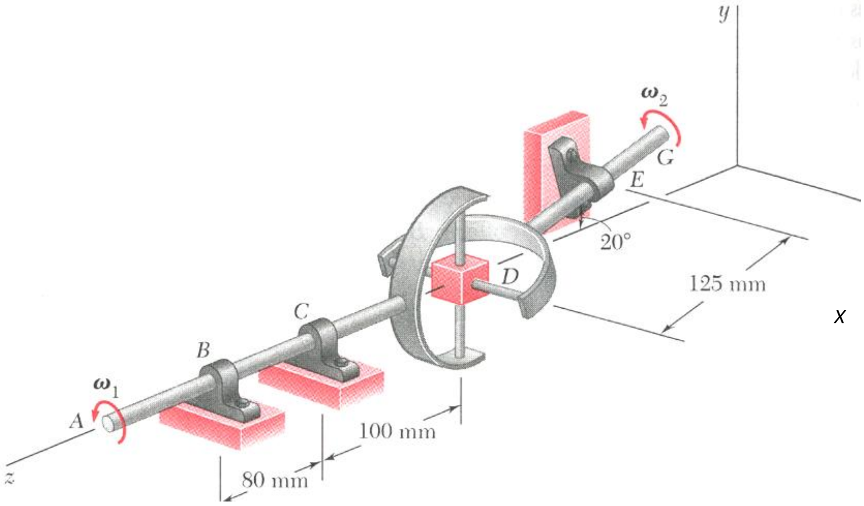
2).- Calculo de la velocidad y aceleración de B.

$$\overline{V_B} = \dot{\rho}\,\overline{e_\rho} + \rho\,\dot{\phi}\,\overline{e_\phi} + \dot{Y}\,\overline{e_Y} = 1.59\,\overline{e_\rho} + 5.196*0.25\,\overline{e_\phi} - 1.853\,\overline{e_Y}$$
$$\overline{V_B} = 1.59\,\overline{e_\rho} + 1.299\,\overline{e_\phi} + -1.853\,\overline{e_Y} \ \ (m/s)$$

$$\overline{a_B} = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\phi}^2)\,\overline{e_\rho} + (2\,\dot{\rho}\,\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\,\overline{e_\phi} + \ddot{Y}\,\overline{e_Y}$$

$$\overline{a_B} = (-0.651 - 5.196 * 0.25^2)\,\overline{e_\rho} + (2 * 1.59 * 0.25)\,\overline{e_\phi} + (-0.792)\,\overline{e_Y}$$

$$\overline{a_B} = -0.976\,\overline{e_\rho} + 0.795\,\overline{e_\phi} - 0.792\,\overline{e_Y} \quad (m/s^2)$$



5.- Dos flechas AC y EG, que se encuentran en el plano vertical *yz*, se conectan mediante una junta universal en D. La flecha AC gira con velocidad angular constante ω_1 en la forma indicada. En el momento en el que el brazo de la cruceta conectada a la flecha AC está en la posición vertical, determine la velocidad angular de la flecha EG.

Solución

- Las flechas AC y EG tiene un movimiento alrededor de sus ejes fijo.
- La cruceta D tiene un movimiento alrededor de un punto fijo.

1).- Calculo del movimiento angular de la junta universal tomando como referencia a la flecha AC

$$\overline{\omega}_D = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_{D/AC} = \omega_1\,\overline{k} + \omega_{D/AC}\,\overline{j} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

2).- Calculo de movimiento angular de la junta universal tomando como referencia la flecha EG

$$\overline{\omega}_D = \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_{D/EG} = \omega_2\left(-sen30\,\overline{j} + cos20\,\overline{k}\right) + \omega_{D/EG}\,\overline{i} \qquad \ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

(1) = (2) e igualando componentes en $\overline{k}$

$$\omega_1 = \omega_2\,(cos20^0) \qquad \rightarrow \qquad \omega_2 = \frac{\omega_1}{cos20^0} \qquad (unidades\ de\ velocidad\ angular)$$