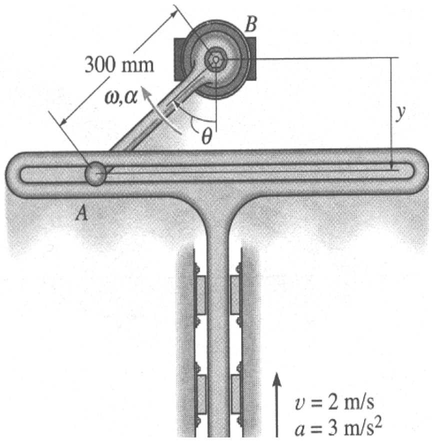
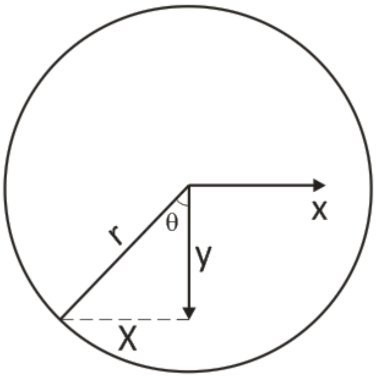
EXAMEN PARCIAL DE DINÁMICA



1.- En el instante $\theta = 50°$, La guía ranurada se esta moviendo hacia arriba con aceleración de 3 m/s^2 y velocidad de 2 m/s. Usando coordenadas cartesianas, determine la aceleración angular y la velocidad angular del eslabón AB en este instante. *Nota:* El movimiento hacia arriba de la guía es en la dirección de *y* negativa.

Solución

1).- Por condiciones geométricas que presenta el sistema:



$$\cos\theta = \frac{y}{r} \qquad \Rightarrow \qquad y = r\cos\theta \qquad (1)$$

2).- Derivando dos veces con respecto al tiempo (1).

$$\dot{y} = -r\sin\theta \cdot \dot{\theta} = -r\sin\theta \cdot \omega \qquad (2)$$

$$\ddot{y} = -r\cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 - r\sin\theta \cdot \ddot{\theta} = -r\cos\theta \cdot \omega^2 - r\sin\theta \cdot \alpha \qquad (3)$$

3).- Para el acaso específico de $\theta = 50°$, $r = 0.3$ m, $\dot{y} = -2m/seg$ y $\ddot{y} = -3m/seg^2$

En (2)

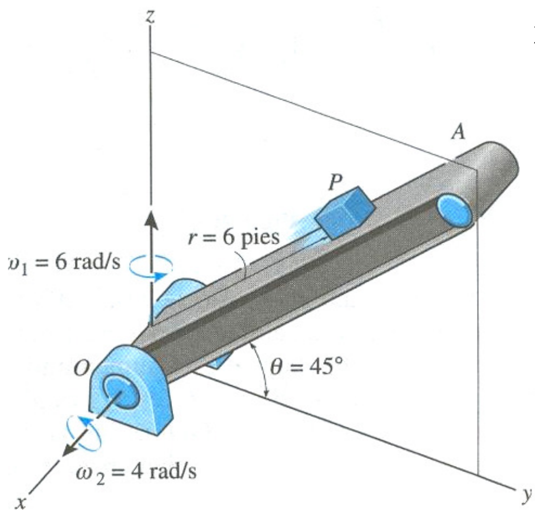
$$\omega = -\frac{\dot{y}}{r\sin\theta} = -\frac{(-2)}{0.3\sin 50°} = 8.7 \;\; rad/seg$$

$$\therefore \quad \bar{\omega} = -8.7\,\bar{k} \;\; (rad/seg)$$

En (3)

$$\alpha = -\frac{\ddot{y} - r\cos\theta \cdot \omega^2}{r\sin\theta} = -\frac{(-3) - (0.3\cos 50)\cdot(2.7^2)}{0.3\cos 50} = -50.46 \;\; rad/seg^2$$

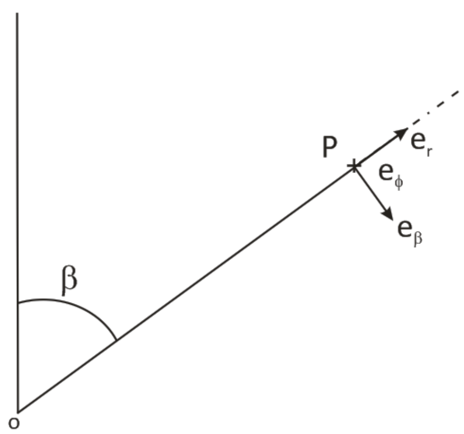
$$\bar{\alpha} = 50.46\ \bar{k} \quad \left(rad/seg^2\right)$$



2.- En el instante mostrado, el brazo OA de la banda transportadora está girando alrededor del eje z a velocidad angular constante ω_1, mientras que al mismo instante el brazo se encuentra girando hacia arriba a razón constante ω_2. Si la banda está avanzando a razón de $\dot{r}$ = 5 pies/s, la cual aumenta a $\ddot{r}$ = 8 pies/s^2. Usando coordenadas esféricas, determine la velocidad y la aceleración de paquete P en el instante mostrado. Desprecie el tamaño del paquete.

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios e identificación de los parámetros que definen el movimiento en coordenadas esféricas.



$r = 6$ pies

$\dot{r} = 5\, pies/seg$

$\ddot{r} = 8\, pies/seg^2$

$\beta = 45^\circ$

$\dot{\beta} = -4\ rad/seg$

$\ddot{\beta} = 0$

$\dot{\phi} = 6\ rad/seg$

$\ddot{\phi} = 0$

2)--Cálculo de la velocidad y aceleración del paquete P

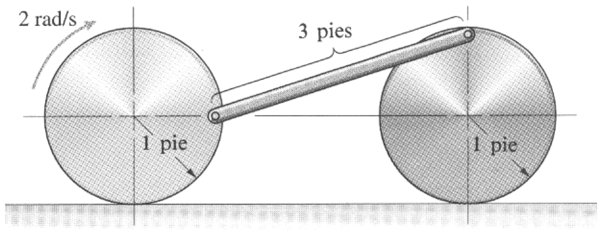
$$\bar{V}_P = (\dot{r})\bar{e}_r + \left(r\dot{\beta}\right)\bar{e}_\beta + \left(r\dot{\phi}\ \sin\beta\right)\vec{e}_\phi = (5)\bar{e}_r + \left[6\times(-4)\right]\bar{e}_\beta + (6\times 6\sin 45)\bar{e}_\phi$$

$$\bar{V}_P = (5)\bar{e}_r - (24)\bar{e}_\beta + (25.456)\bar{e}_\phi \qquad \Rightarrow \quad \left|\bar{V}_P\right| = 35.341\ pies/seg$$

$$\bar{a}_P = \left(\ddot{r} - r\cdot\beta^2 - r\cdot\phi^2\cdot\sin^2\beta\right)\bar{e}_r + \left(2\dot{r}\cdot\dot{\beta} - r\cdot\dot{\phi}^2\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta\right)\bar{e}_\beta + \left(2r\cdot\dot{\beta}\cdot\dot{\phi}\cdot\cos\beta + 2\dot{r}\cdot\dot{\phi}\cdot\sin\beta\right)\bar{e}_\phi$$

$$\bar{a}_P = \left(8 - 6\times16 - 6\times36\sin^2 45\right)\bar{e}_r + \left((2\times5\times-4) - 6\times6^2\times\sin^2 45\right)\bar{e}_\beta +$$
$$+\left(2\times6\times(-4)\times6\cos45 + 2\times5\times6\sin45\right)\bar{e}_\phi$$
$$\bar{a}_P = -(146)\bar{e}_r - (148)\bar{e}_\beta - (161.22)\bar{e}_\phi \qquad \Rightarrow \quad \left|\bar{a}_P\right| = 293.79\ pies/seg^2$$

3.- Los discos ruedan sobre la superficie plana. El izquierdo gira a 2 rad/seg en dirección horaria. Use el método de centros instantáneos de velocidad nula y calcule las velocidades angulares de la barra y del disco derecho.

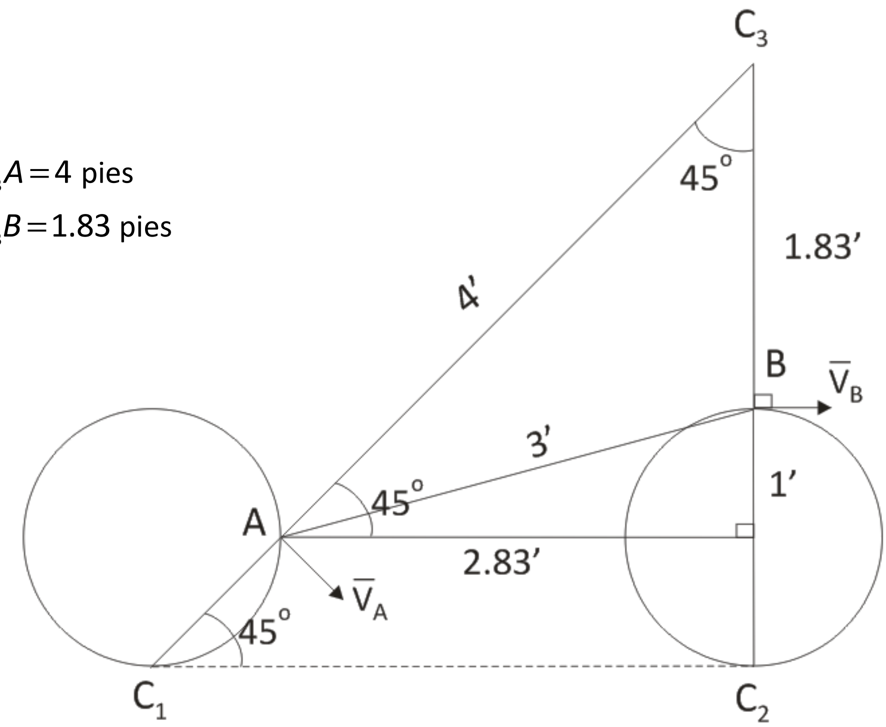


Solución

1).- Determinación de los centros instantáneos de velocidad nula:

$C_3A = 4$ pies

$C_3B = 1.83$ pies



2).- Cálculo de velocidades:

$$V_A = \omega_{C_1A}\cdot r_{C_1A} = 2\times\sqrt{2} = 2.83\ pies/seg$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{r_{C_3A}} = \frac{2.83}{4} = 0.7075\ rad/seg$$

$$V_B = \omega_{AB}\cdot r_{C_3B} = 0.7075\times1.83 = 1.2947\ pies/seg$$

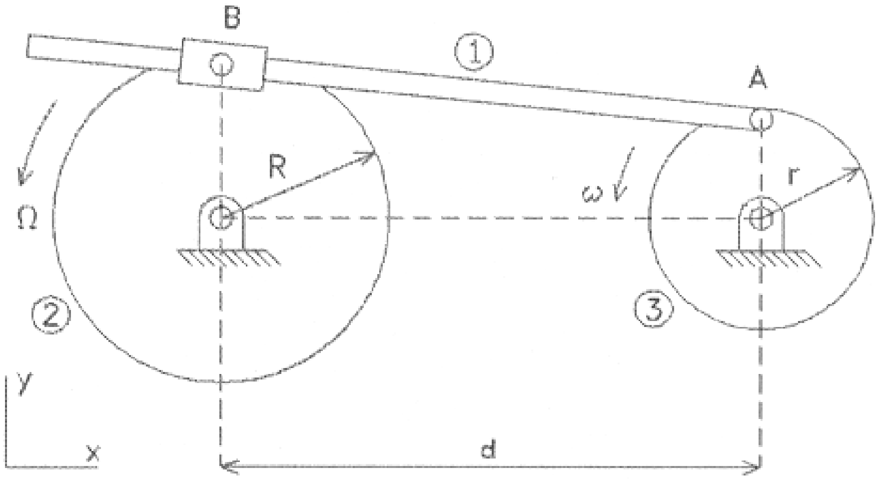
$$\omega_{C_2B} = \frac{V_B}{2} = 0.647\ rad/seg$$

4.- La barra ① de las figura tiene un pasador en A montado sobre el disco ③; dicha barra desliza a lo largo de la guía de centro B situado sobre el disco ②. Ambos discos giran con velocidades angulares constantes y conocidas. Se pide:

a).- La velocidad angular de la barra ①.

b).- La aceleración angular de la misma barra.

c).- La aceleración de B_1 (Punto coincidente con B perteneciente a la barra ①).



Solución

1).- Cálculo de la velocidad angular de ①

$$\bar{V}_A = \bar{V}_B + \omega_1 \bar{k} \times \bar{r}_{BA} + \bar{V}_{A/B} = \omega_2 \bar{k} \times R\bar{j} + \omega_1 \bar{k} \times \left(d\bar{i} - (R-r)\bar{j} \right) + \bar{V}_{A/B}$$

$$\omega \bar{k} \times r\bar{j} = -R\Omega \bar{i} + (R-r)\omega_1 \bar{i} + d\omega_1 \bar{j} + V_{A/B} \left(\frac{-d\bar{i} + (R-r)\bar{j}}{\underbrace{\sqrt{d^2 + (R-r)^2}}_{\ell}} \right)$$

Igualado componentes:

$$0 = d\omega_1 + V_{A/B} \frac{(R-r)}{\ell} \qquad \Rightarrow \qquad V_{A/B} = -\frac{d \cdot \ell}{(R-r)} \cdot \omega_1$$

$$-r\omega = -R\Omega + (R-r)\omega_1 + \frac{d \cdot \cancel{\ell}}{(R-r)} \cdot \frac{d}{\cancel{\ell}} \cdot \omega_1$$

$$R\Omega - r\omega = \omega_1 \left[(R-r) + \frac{d^2}{(R-r)} \right] = \frac{\omega_1 \cdot \ell^2}{(R-r)}$$

$$\omega_1 = \frac{(R\Omega - r\omega)(R-r)}{\ell^2} \circlearrowleft \text{(Unidades de velocidad angular)}$$

Donde: $\ell^2 = (R-r)^2 - d^2$

2).- Cálculo de la aceleración angular de ①

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B + \alpha_1 \bar{k} \times \bar{r}_{BA} - \omega_1^2 \cdot \bar{r}_{BA} + 2\bar{\omega}_1 \times \bar{V}_{A/B} + \bar{a}_{A/B}$$

Si: $\bar{a}_A = -\omega^2 r \,\bar{j}$

$\bar{a}_B = -\Omega^2 R \,\bar{j}$

$$\alpha_1 \bar{k} \times \bar{r}_{B/A} = \alpha_1 \bar{k} \times \left[d\,\bar{i} - (R-r)\bar{j} \right] = \alpha_1 (R-r)\bar{i} + (\alpha_1 d)\bar{j}$$

$$-\omega_1^2 \cdot \bar{r}_{BA} = -\omega_1^2 \left[d\,\bar{i} - (R-r)\bar{j} \right] = -\left(\omega_1^2 \cdot d\right)\bar{i} + \omega_1 (R-r)\bar{j}$$

$$2\omega_1 \bar{k} \times \frac{d \cdot \cancel{\ell}}{(R-r)} \cdot \omega_1 \left[\frac{d\,\bar{i} + (R-r)\bar{j}}{\cancel{\ell}} \right] = -\left(2\omega_1^2 \cdot d\right)\bar{i} + 2\omega_1^2 \frac{d}{(R-r)}\bar{j}$$

$$\bar{a}_{A/B} = a_{A/B} \left[-\frac{d\,\bar{i} + (R-r)\bar{j}}{\ell} \right] = -a_{A/B} \cdot \frac{d}{\ell}\bar{i} + a_{A/B} \frac{(R-r)}{\ell}\bar{j}$$

Luego:

$$0 = \alpha_1 (R-r) - \omega_1^2 d - 2\omega_1^2 d - a_{A/B} \cdot \frac{d}{\ell}$$

$$a_{A/B} = \frac{\ell}{d}(R-r)\alpha_1 - \omega_1^2 \cdot \ell = 2\omega_1^2 \cdot \ell$$

$$R\Omega^2 - \omega^2 (R-r) - 2\omega_1^2 \left(\frac{d}{R-r} \right) + \omega_1^2 (R-r) + 2\omega_1^2 (R-r) = \alpha_1 d + (R-r)^2 \alpha_1$$

$$= \alpha_1 \left[\frac{\overbrace{d^2 + (R-r)^2}^{\ell^2}}{d} \right] = \alpha_1 \left(\frac{\ell^2}{d} \right)$$

$$\alpha_1 = \frac{\left(\Omega^2 R - \omega^2 r\right) d}{\ell^2} - \frac{2(\Omega R - \omega r)^2 (R-r) d}{\ell^4} \circlearrowleft \text{(Unidades de aceleración angular)}$$

3).- Cálculo de la aceleración de B_1

$$\bar{a}_{B_1} = \bar{a}_A + \bar{\alpha}_1 \times \bar{r}_{AB_1} - \omega_1^2 \cdot \bar{r}_{AB} = -\left(\omega^2 R\right)\bar{j} + \alpha_1 \bar{k} \times \left[-d\,\bar{i} + (R-r)\bar{j}\right] - \omega_1^2\left[-d\,\bar{i} + (R-r)\bar{j}\right]$$

$$\bar{a}_{B_1} = \left[\omega_1 d - \alpha_1 (R-r)\right]\bar{i} - \left[\omega^2 R - \alpha_1 d - \omega_1 (R-r)\right]\bar{j} \qquad \text{(Unidades de aceleración)}$$

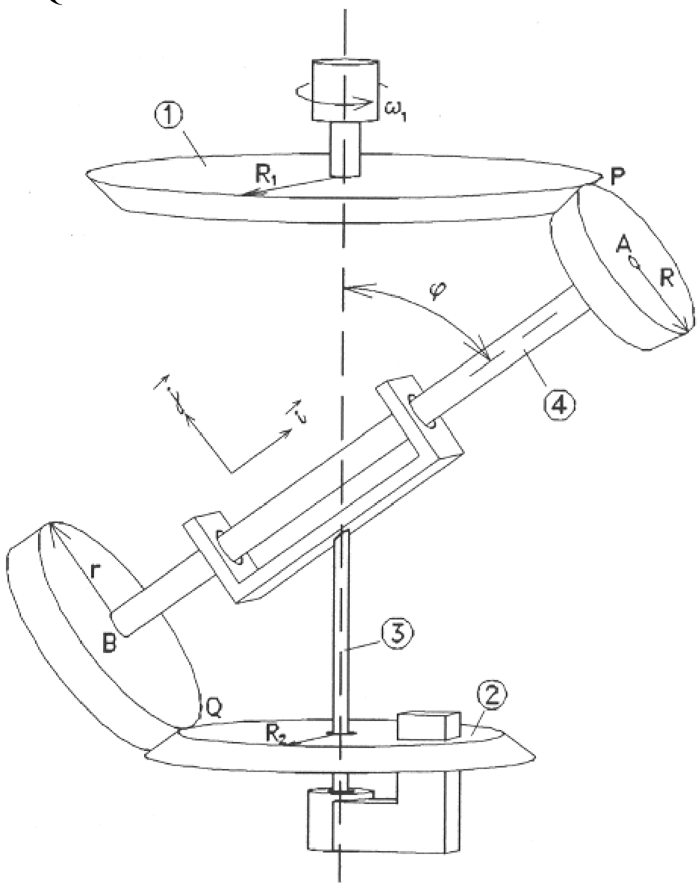
Nota: ℓ, ω_1 y α_1 son conocidos

5.- En el dispositivo de la figura, la rueda dentada ① de radio R_1 gira con ω_1 constante y conocida. La rueda dentada ② está inmovilizada. La manivela ③ puede girar en torno al eje vertical. El movimiento se transmite a dicha manivela por acción del árbol ④, del cual son solidarios dos engranajes (satélites) de radios respectivos R y r que engranan con los piñones ① y ② en P y Q. Determinar:

a).- La velocidad angular y aceleración angular de los satélites.

b).- La aceleración de Coriolis del punto P del satélite si la referencia móviles es el piñón ①.

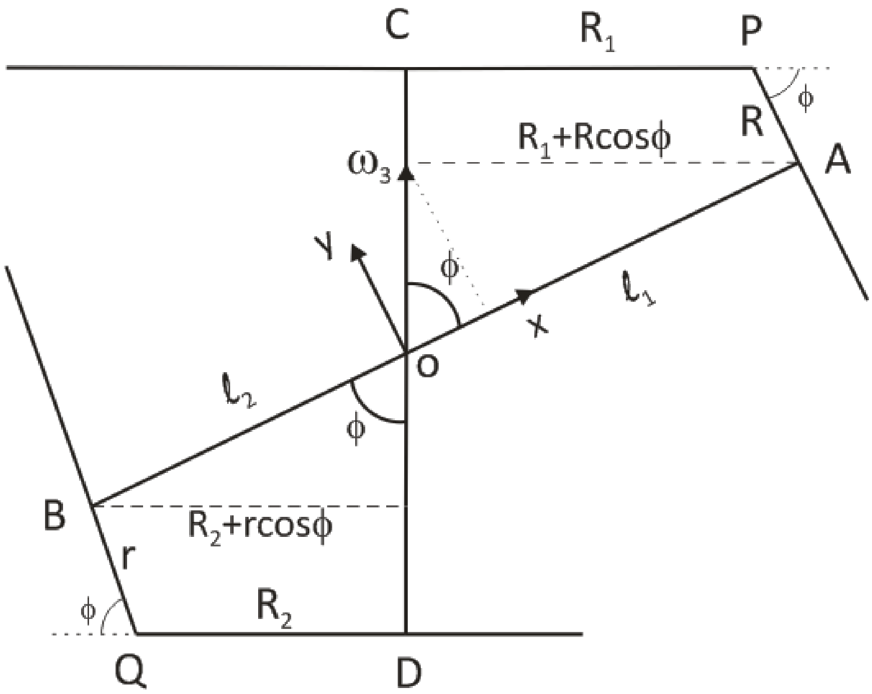
c).- Aceleración del punto Q del satélite.



Solución

1).- Consideraciones iniciales:

- El cuerpo ① tiene un movimiento alrededor de un eje fijo.
- El cuerpo ③ tiene un movimiento alrededor de un eje fijo.
- El cuerpo ④ tiene un movimiento alrededor de un punto fijo.



$$\bar{\omega}_3 = \omega_3\left(\cos\phi\,\bar{i} + \sin\phi\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1\left(\cos\phi\,\bar{i} + \sin\phi\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{\omega}_4 = \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_{4/3}$$

2).- Cálculo de la velocidad angular de ④

a).- Si: $\bar{V}_Q = 0$ y

$$\bar{V}_Q = \left(\bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_{4/3}\right)\times\bar{r}_{OQ} = \left[\omega_3\left(\cos\phi\,\bar{i} + \sin\phi\,\bar{j}\right) + \omega_{4/3}\,\bar{i}\right]\times\bar{r}_{OQ}$$

$$\bar{0} = \left[\left(\omega_3\cos\phi + \omega_{4/3}\right)\bar{i} + \omega_3\sin\phi\,\bar{j}\right]\times\left[\left(-\frac{R_2 + r\cos\phi}{\sin\phi}\right)\bar{i} - (r)\,\bar{j}\right]$$

Igualando componente en *z*

$$0 = -\left(\omega_3\cos\phi + \omega_{4/3}\right)r + \omega_3\left(R_2 + r\cos\phi\right)$$

$$0 = -\omega_{4/3}\,r + \omega_3 R_2 \qquad \rightarrow \qquad \omega_{4/3} = \frac{R_2}{r}\omega_3$$

b).- Cálculo de la velocidad de P como parte de ①

$$\bar{V}_P = -\omega_1 R_1 \bar{k} \qquad (1)$$

c).- Cálculo de la velocidad de P como parte de ④

$$\bar{V}_P = \left[\omega_3\left(\cos\phi + \omega_{4/3}\right) + \omega_{4/3}\bar{i}\right] \times \left[\frac{R_1 + R\cos\phi}{\sin\phi}\bar{i} + R\bar{j}\right]$$

$$\bar{V}_P = \left(\omega_3\cos\phi + \omega_{4/3}\right)R\bar{k} - \omega_3\left(R_1 + R\cos\phi\right)\bar{k}$$

$$\bar{V}_P = \left(\omega_{4/3}R - \omega_3 R_1\right)\bar{k} = \left(\frac{R_2 R}{r}\omega_3 - \omega_3 R_1\right)\bar{\mathrm{k}} \qquad (2)$$

(1) = (2)

$$-\omega_1 R_1 = \omega_3\left(\frac{R_2 R - R_1 r}{r}\right)$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_1 R_1 r}{R_1 r - R R_2}$$ (Unidades de velocidad angular)

$$\omega_{4/3} = \frac{\omega_1 R_1 R_2}{R_1 r - R R_2}$$ (Unidades de velocidad angular)

d).- Por el Teorema de adición:

$$\bar{\omega}_4 = \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_{4/3} = \left(\omega_3\cos\phi + \omega_{4/3}\right)\bar{i} + \omega_3\sin\phi\,\bar{j}$$ (Unidades de velocidad angular) (3)

3).- Cálculo de la aceleración angular de ④: Derivando (3) respecto al tiempo

$$\bar{\alpha}_4 = \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_3}^{\bar{0}} + \bar{\omega}_3 \times \bar{\omega}_{4/3} + \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{4/3}}^{\bar{0}} = \omega_3\left(\cos\phi\,\bar{i} + \sin\phi\,\bar{j}\right) \times \left(\omega_{4/3}\right)\bar{i}$$

$$\bar{\alpha}_4 = -\left(\omega_3\,\omega_{4/3}\sin\phi\right)\bar{k}$$ (Unidades de aceleración angular)

4).- Cálculo de la aceleración de coriolis de P

Si P es punto de ①:

$$\bar{a}_C = \bar{0}$$

5).- Cálculo de la aceleración de Q:

$$\bar{a}_Q = \bar{\alpha}_4 \times \bar{r}_{OQ} + \bar{\omega}_4 \times \left(\bar{\omega}_4 \times \bar{r}_{OQ}\right)$$

$$\bar{\alpha}_4 \times \bar{r}_{OQ} = \left(-\omega_3\,\omega_{4/3}\sin\phi\,\bar{k}\right) \times \left(-\frac{R_2 + r\cos\phi}{\sin\phi}\bar{i} - r\,\bar{j}\right) = -\omega_3\,\omega_{4/3}\left[r\sin\phi\,\bar{i} - \left(R_2 + r\cos\phi\right)\bar{j}\right]$$

$$\bar{\omega}_4 \times \bar{r}_{OQ} = \left[\left(\omega_3\cos\phi + \omega_{4/3}\right)\bar{i} + \left(\omega_3\sin\phi\right)\bar{j}\right] \times \left[-\left(\frac{R_2 + r\cos\phi}{\sin\phi}\right)\bar{i} - (r)\,\bar{j}\right]$$

$$\bar{\omega}_4 \times \bar{r}_{OQ} = -\left(\omega_3 \cos\phi + \omega_{4/3}\right) r\,\bar{k} + \omega_3 \left(R_2 + r\cos\phi\right)\bar{k}$$

$$\bar{\omega}_4 \times \left(\bar{\omega}_4 \times \bar{r}_{OQ}\right) = \left[\left(\omega_3 \cos\phi + \omega_{4/3}\right)\bar{i} - \left(\omega_3 \sin\phi\right)\bar{j}\right] \times \left[\omega_3 \left(R_2 + r\cos\phi\right) - \left(\omega_3 \cos\phi + \omega_{4/3}\right) r\right]\bar{k}$$

$$= -\omega_3 \sin\phi \left(\omega_3 R_2 - \omega_{4/3}\, r\right) r\,\bar{i} + \left(\omega_3 \cos\phi + \omega_{4/3}\right)\left(\omega_3 R_2 - \omega_{4/3}\, r\right)\bar{j} = \bar{0}$$

Luego:

$$\bar{a}_Q = -\left(\omega_3 \frac{R_2}{\cancel{r}} \omega_3 \sin\phi\, \cancel{r}\right)\bar{i} + \omega_3 \frac{R_2}{r} \omega_3 \left(R_2 + r\cos\phi\right)$$

$$\bar{a}_Q = -\omega_3^2 R_2 \sin\phi\, \bar{i} + \omega_3^2 \frac{R_2}{r}\left(R_2 + r\cos\phi\right)\bar{j}$$ (Unidades de aceleración)

ó

$$\bar{a}_Q = -\left(\omega_3^2 R_2 \sin\phi\right)\bar{i} + \omega_3 \left(\omega_{4/3} + \omega_3 \cos\phi\right) R_2\, \bar{j}$$ (Unidades de aceleración)

Nota: Se conoce ω_3 y $\omega_{4/3}$