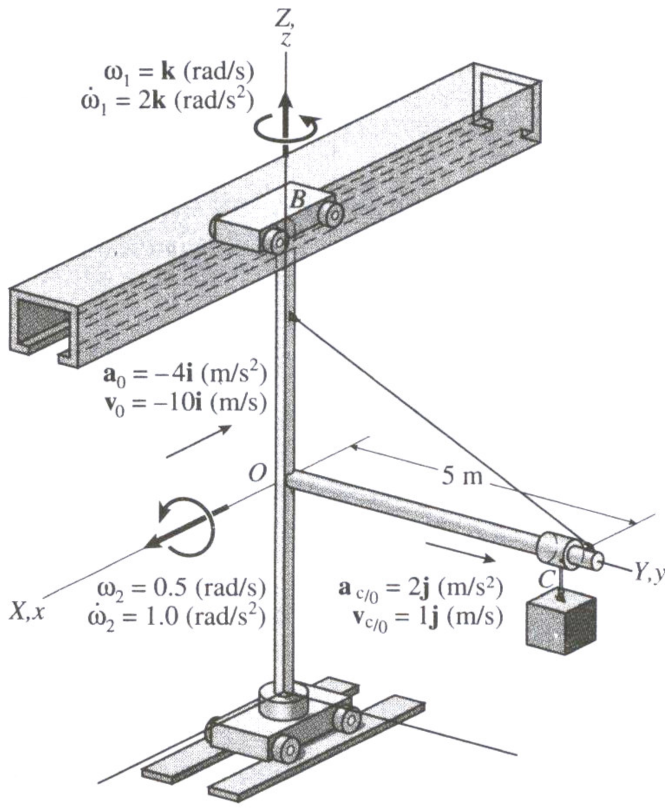
EXAMEN PARCIAL DEL CURSO DE DINÁMICA

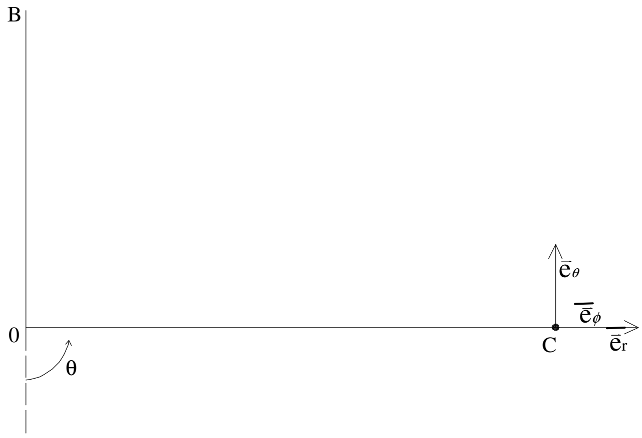
Fecha: 11 de Marzo del 2008

1.- En un instante dado, una grúa se mueve a lo largo de una vía a velocidad y aceleración que se muestra en la figura, mientras pivotea simultáneamente alrededor de su eje vertical con velocidad y aceleración angular, como se ilustra. Una pluma OC, sujeta mediante un pivote horizontal al poste vertical de la grúa, soporta un carro C que se mueve hacia fuera a lo largo de la pluma con velocidad y aceleración que se muestra. En el instante dado, la pluma se eleva alrededor del pivote O, como se ilustra, con velocidad angular y aceleración angular. Usando coordenadas esféricas en el eje vertical OB de la grúa, encuentre la velocidad y aceleración del carro C.



Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios que definen las coordenadas esféricas en OB.



2).- Calculo del movimiento de "C" respecto a "OB"

a) Identificación de los parámetros que definen el movimiento.

$r = 5m$ $\qquad \theta = 90°$ $\qquad \overset{\circ}{\phi} = -1 rad/s$

$\overset{\circ}{r} = 1 m/s$ $\qquad \overset{\circ}{\theta} = 0.5 rad/s$

$$\ddot{r} = 2m/s^2 \qquad \ddot{\theta} = 1rad/s \qquad \ddot{\phi} = -2rad/s^2$$

b) Cálculo del movimiento.

$$\overline{r_{OC}} = 5\,\overline{e}_r$$

$$\overline{V}_{C/OB} = \dot{r}\,\overline{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\overline{e}_\theta + r\,\dot{\phi}\,sen\theta\,\overline{e}_\phi = \overline{e}_r + 5*0.5\,\overline{e}_\theta + 5*(-1)sen90^\circ\,\overline{e}_\phi$$

$$\overline{V}_{C/OB} = \overline{e}_r + 2.5\,\overline{e}_\theta - 5\,\overline{e}_\phi \qquad (m/s)$$

$$\overline{a}_{C/OB} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\,\dot{\phi}^2\,Sen\theta\right)\overline{e}_r + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\overline{e}_\theta + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\phi}\,Sen\theta + r\,\dot{\phi}\,Sen\theta\right)\overline{e}_\phi$$

$$\overline{a}_{C/OB} = \left(2 - 5*0.5^2 - 5*1*1\right)\overline{e}_r + \left(2*1*0.5 + 5*1\right)\overline{e}_\theta + \left(2*1*(-1)*1 + 5*(-2)*1\right)\overline{e}_\phi$$

$$\overline{a}_{C/OB} = -4.25\,\overline{e}_r + 6\,\overline{e}_\theta - 12\,\overline{e}_\phi \qquad (m/s^2)$$

3).- Calculo del movimiento del marco móvil OB y del punto base O.

$$\overline{\omega_{OB}} = \overline{O} \qquad \overset{\circ}{\overline{\omega_{OB}}} = O$$

$$\overline{V_O} = -10\ \overline{e}_\phi\ \left(m/s\right)$$

$$\overline{a_O} = -4\ \overline{e}_\phi\ \left(m/s^2\right)$$

4).- Calculo de la velocidad y aceleración de C respecto al marco inercial tierra.

$$\overline{V_C} = \overline{V_O} + \overline{V}_{C/OB} + \overline{\omega_{OB}} \times \overline{r_{OC}} = \overline{e}_r + 2.5\,\overline{e}_\theta - \left(5+10\right)\overline{e}_\phi$$

$$\overline{V_C} = \overline{e}_r + 2.5\,\overline{e}_\theta - 15\,\overline{e}_\phi \qquad (m/s)$$

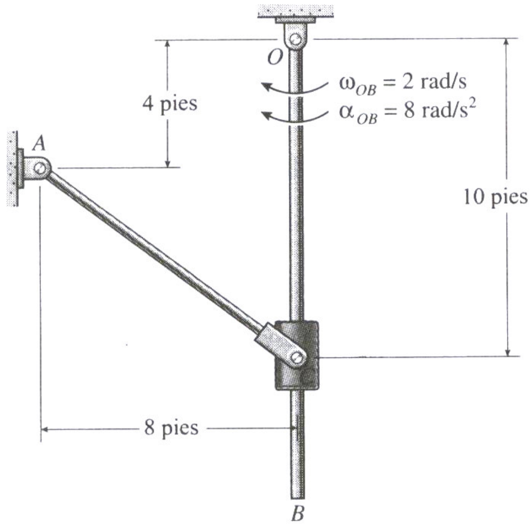
$$\left|\overline{V_C}\right| = 15.24\ m/s$$

$$\overline{a_C} = \overline{a_o} + \overline{a}_{C/OB} = -4.25\,\overline{e}_r + 6\,\overline{e}_\theta - \left(12+4\right)\overline{e}_\phi$$

$$\overline{a_C} = -4.25\,\overline{e}_r + 6\,\overline{e}_\theta - 16\,\overline{e}_\phi \qquad (m/s^2)$$

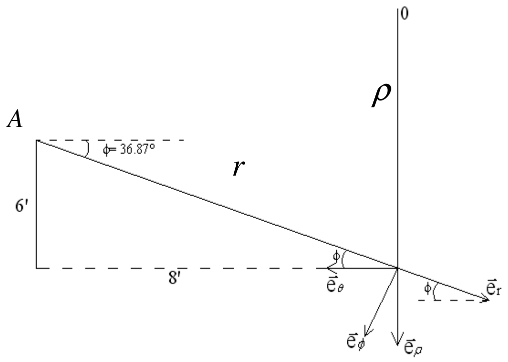
$$\left|\overline{a}_C\right| = 17.609 \quad m/s^2$$

2.- En el instante que se muestra, la barra OB gira en el sentido de las manecillas del reloj con una velocidad angular ω_{OB} = 2 rad/s y aceleración angular α_{OB} = 8 rad/s^2. El collarín C está unido por un perno a una barra AC y se desliza sobre OB. Usando coordenadas Polares, determine la velocidad angular y aceleración angular de la barra AC en el instante dado.



Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios e identificación de los parámetros que definen el movimiento en coordenadas polares, para los dos puntos de referencia O y A.



$$\overline{e}_r = sen\phi\,\overline{e}_\rho - \cos\phi\,\overline{e}_\theta$$

$$\overline{e}_\phi = \cos\phi\,\overline{e}_\rho + sen\phi\,\overline{e}_\theta$$

$\rho = 10 \quad pies$ $\qquad$ $\dot{\theta} = 2 \quad rad/s$

$\dot{\rho} = ?$ $\qquad$ $\ddot{\theta} = 8 \quad rad/s^2$

$\ddot{\rho} = ?$

$r = \sqrt{36+64} = 10 \quad pies$

$\dot{r} = 0$ $\qquad$ $\dot{\phi} = \omega_{AC}$

$\ddot{r} = 0$ $\qquad$ $\ddot{\phi} = \alpha_{AC}$

2) Cálculo de la velocidad y aceleración de "C", tomando como punto de referencia a "O".

$$\overline{V_C} = \dot{\rho}\,\overline{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\overline{e}_\theta \quad = \quad \dot{\rho}\,\overline{e}_\rho + 10*2\,\overline{e}_\theta \quad = \quad \dot{\rho}\,\overline{e}_\rho + 20\,\overline{e}_\theta \quad \text{(pies/s)} \;............(1)$$

$$\overline{a_C} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\overline{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\overline{e}_\theta = \left(\ddot{\rho} - 10*4\right)\overline{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}*2 + 10*8\right)\overline{e}_\theta$$

$$\overline{a_C} = \left(\ddot{\rho} - 40\right)\overline{e}_\rho + \left(4\dot{\rho} + 80\right)\overline{e}_\theta \ \left(pies/s^2\right) \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

3) Calculo de la velocidad y aceleración de “C”, tomando como punto de referencia a “A”.

$$\overline{V_C} = \ddot{r}\,\overline{e}_r + r\dot{\phi}\overline{e}_\phi = 10*\dot{\phi}\overline{e}_\phi = 10\ \dot{\phi}\left(\frac{4}{5}\overline{e}_\rho + \frac{3}{5}\overline{e}_\theta\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

(1) = (3) e igualando componentes.

$$\dot{\rho} = 8\dot{\phi} \quad y \quad 20 = 6\dot{\phi} \quad \rightarrow \quad \dot{\phi} = 3.33\ rad/s \quad \rightarrow \quad \dot{\rho} = 8*\left(\frac{20}{6}\right) = 26.6667 \ \ {pie}/{s}$$

Luego: $\omega_{AC} = \phi = 3.33 \circlearrowright$ rad/s

$$\overline{a_C} = \left(\ddot{r} - r\phi^2\right)\overline{e}_r + \left(2\dot{r}\phi + r\ddot{\phi}\right)\overline{e}_\phi = -10*3.33\,\overline{e}_r + 10\ddot{\phi}\overline{e}_\phi$$

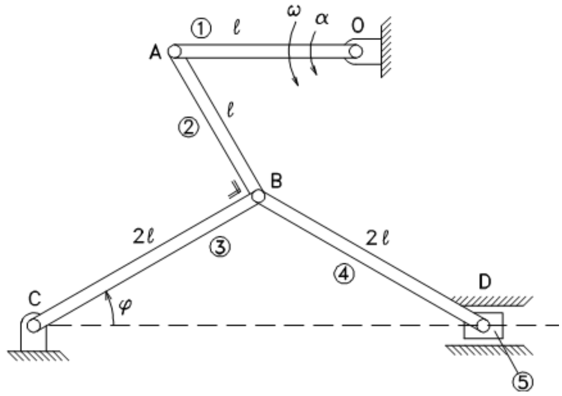
$$\overline{a_C} = -111.11\left(\frac{3}{5}\overline{e}_\rho - \frac{4}{5}\overline{e}_\theta\right) + 10\ddot{\phi}\left(\frac{4}{5}\overline{e}_\rho + \frac{3}{5}\overline{e}_\theta\right) = \left(8\ddot{\phi} - 66.667\right)\overline{e}_\rho + \left(6\ddot{\phi} - 88.887\right)\overline{e}_\theta \ .(4)$$

(2) = (4) e igualando la componente en $\overline{e}_\theta$ (transversal)

$$4*26.667 + 80 = 6\ddot{\phi} + 88.887 \quad \rightarrow \quad \ddot{\phi} = 16.297 \quad rad/s^2$$

Luego: $\alpha_{AC} = 16.297 \ \circlearrowright$ (rad/s^2)

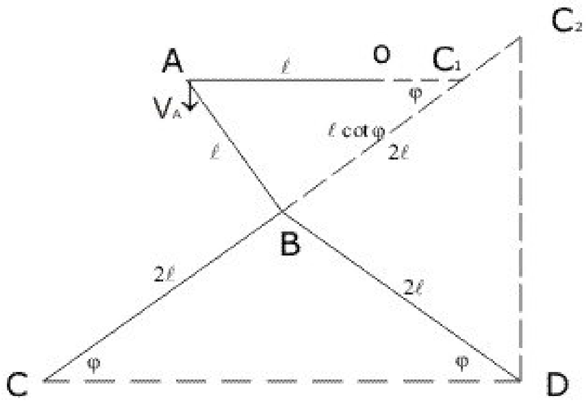
3.- La figura representa un dispositivo para prensar. En el instante considerado en la figura, la manivela OA de longitud es horizontal y son conocidas su velocidad y aceleración angulares. El ángulo en B es recto. Usando el método de los centros instantáneos de velocidad nula, determinar las velocidades angulares de las barras.



Solución

1).- Cálculo de la velocidad de las barras:

a).- Determinación de los centros instantáneos de velocidad nula y cálculos elementales.



$$sen\ \varphi = \frac{\ell}{C_1A} \quad \rightarrow \quad C_1A = \frac{\ell}{sen\ \varphi}$$

$$tg\ \varphi = \frac{\ell}{C_1B} \quad \rightarrow \quad C_1B = \ell \cot \varphi$$

b).- Cálculo de las velocidades

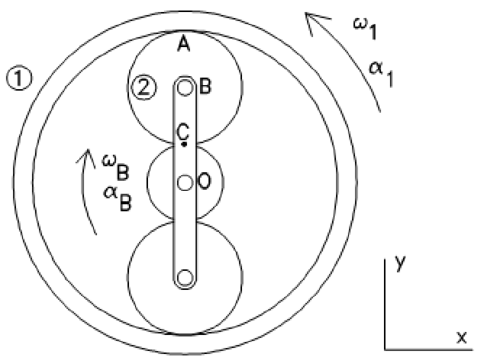
$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{C_1A} = \frac{\omega\,\ell}{\ell / sen\ \varphi} = \omega\ sen\ \varphi \quad \circlearrowleft \qquad \text{(Unidades de velocidad angular)}$$

$$V_B = \omega_{AB} C_1B = \omega\ sen\ \varphi\ l\ \frac{\cos\varphi}{sen\ \varphi} = \omega\,\ell\cos\varphi \qquad \text{(Unidades de velocidad)}$$

$$\omega_{CB} = \frac{V_B}{CB} = \frac{\omega\,\ell\cos\varphi}{2\,\ell} = \frac{\omega\cos\varphi}{2} \quad \circlearrowleft \qquad \text{(Unidades de velocidad angular)}$$

$$\omega_{DB} = -\omega_{CB} = \frac{\omega\cos\varphi}{2} \quad \circlearrowleft \qquad \text{(Unidades de velocidad angular)}$$

4.- En el sistema de engranajes de la figura, OB gira con ω_B y α_B conocidas en torno del punto O fijo. El piñón 1, de centro O, tiene ω_1 y α_1 también conocidas. Se pide los Valores de ω_2 y α_2. Si OC = r y BC = 2r.



Solución

1).- Cálculo de la velocidad angular del engranaje ②:

a).- Cálculo de la velocidad de B, como parte de la barra OB

$$\overline{V}_B = -\omega_B\overline{k}\ x\ 2r\ \overline{j} = 3\ r\ \omega_B\ \overline{i} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

b).- Cálculo de la velocidad de B, como parte del disco ②

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \omega_2\overline{k}\ x\ \overline{r}_{AB} = \omega_1\overline{k}\ x\ 5\ r\ \overline{j} + \omega_2\overline{k}\ x\ (-2\ r\ \overline{j}) = (2r\omega_2 - 5r\omega_1)\ \overline{i} \ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) = (2)

$$3r\omega_B = 2r\omega_2 - 5r\omega_1 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = \frac{3\omega_B + 5\omega_1}{2} \circlearrowleft \text{ (Unidades de velocidad angular)}$$

2).- Cálculo de la aceleración angular del engranaje ②:

a).- Cálculo de la aceleración de B, como parte de la barra OB

$$\overline{a}_B = -\alpha_B \overline{k} \ x \ 3r\ \overline{j} - \omega_B^2 (3r\ \overline{j}) = 3r\alpha_B\ \overline{i} - 3r\omega_B^2\ \overline{j}$$

b).- Cálculo de la aceleración de A_2 (punto perteneciente al engranaje ② coincidente con el punto A_1 del engranaje ①, ambos en A)

$$\overline{a}_{A2} = \overline{a}_B + \alpha_2 \overline{k} \ x \ \overline{r}_{BA2} - \omega_2^2 \overline{r}_{BA2} = \overline{a}_B + \alpha_2 \overline{k} \ x \ (2r\ \overline{j}) - \omega_2^2 (2r\ \overline{j})$$

$$\overline{a}_{A2} = (3r\alpha_B - 2r\alpha_2)\ \overline{i} - (3r\omega_B^2 + 2r\omega_2^2)\ \overline{j} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

c).- Cálculo de la aceleración de A_1

$$\overline{a}_{A1} = \alpha_1 \overline{k} \ x \ \overline{r}_{OA1} - \omega_1^2 \overline{r}_{OA1} = \alpha_1 \overline{k} \ x \ (5r\ \overline{j}) - \omega_1^2 (5r\ \overline{j}) = -5r\alpha_1\ \overline{i} - 5r\omega_1^2 \overline{j} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Como las aceleraciones tangenciales son iguales (en la dirección horizontal), en (3) y (4):

$$3r\alpha_B - 2r\alpha_2 = -5r\alpha_1 \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = \frac{3\alpha_B + 5r\alpha_1}{2} \circlearrowleft \text{ (Unidades de aceleración angular)}$$

5.- Los tres sólidos de la figura son engranajes cuyo dentado no se muestra. El piñón cónico ② gira con ω constante conocida, y el piñón ③ tiene Ω constante también conocida. Determinar la velocidad y aceleración angulares del piñón cónico ①.

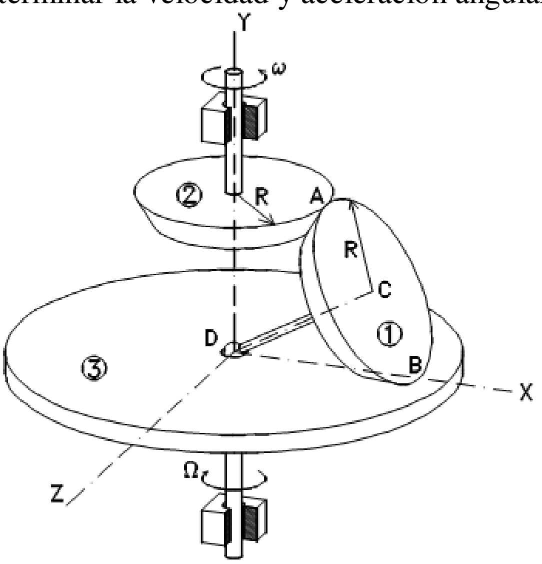


Figura 1

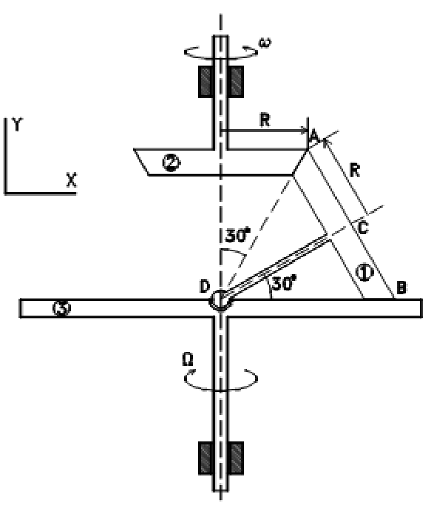
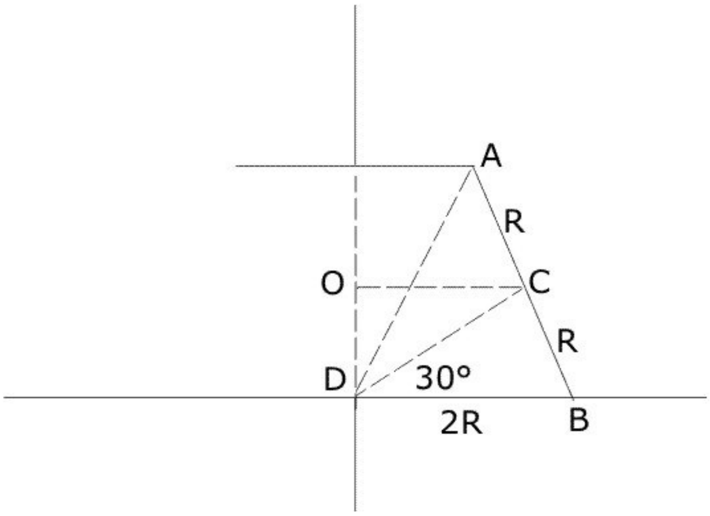


Figura 2

Solución

1).- Cálculo de la velocidad angular del piñón ①:



a).- Cálculo de la velocidad de A, como parte de ① en movimiento alrededor del punto fijo D)

$\overline{V}_A = \overline{\omega}_1 x\ \overline{r}_{DA} = (\omega_X \overline{i} + \omega_Y \overline{j} + \omega_Z \overline{k})\ x\ (R\overline{i} + R\cot 30° \overline{j})$

$\overline{V}_A = -\omega_Z R\sqrt{3}\ \overline{i} + \omega_Z R\ \overline{j} + (\omega_X R\sqrt{3} - \omega_Y R)\ \overline{k}$ ....(1)

b).- Cálculo de la velocidad de A como parte de ② en movimiento alrededor de un eje fijo

$\overline{V}_A = \omega \overline{j}\ x\ R\ \overline{i} = -\omega R\ \overline{k}$ ....(2)

(1) = (2):

$\omega_Z = 0$

$\omega_X R\sqrt{3} - \omega_Y R = -\omega R$ ....(3)

c).- Cálculo de la velocidad de B, como parte de ①

$\overline{V}_B = \overline{\omega}_1 x\ \overline{r}_{DB} = (\omega_X \overline{i} + \omega_Y \overline{j})\ x\ (2R\ \overline{i}) = -2R\omega_Y \overline{j}$ ....(4)

d).- Cálculo de la velocidad de B, como parte de ③

$\overline{V}_B = -\Omega \overline{k}\ x\ \overline{r}_{DB} = -\Omega \overline{k}\ x\ (2R\ \overline{i}) = 2R\ \Omega\ \overline{j}$ ....(5)

(4) = (5):

$$-2R\omega_Y = 2R\,\Omega \quad \rightarrow \quad \omega_Y = -\Omega \qquad y \qquad \omega_X = -\frac{(\Omega+\omega)}{\sqrt{3}}$$

Luego:

$$\overline{\omega}_1 = -\frac{(\Omega+\omega)}{\sqrt{3}}\,\overline{i} - \Omega\,\overline{j} \quad \text{(Unidades de velocidad angular)}$$

2).- Cálculo de la aceleración angular:

a).- Por el teorema de adición

$$\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_{1/DC} + \overline{\omega}_{DC/3} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(I)}$$

Si:

$$\overline{V}_C = \overline{\omega}_1 x\,\overline{r}_{DC} \qquad y \quad \overline{V}_C = \overline{\omega}_{DC/3}\,x\,\overline{r}_{OC}$$

$$\overline{V}_C = \left[\frac{-(\Omega+\omega)}{\sqrt{3}}\,\overline{i} - \Omega\,\overline{j}\right] x \left(2R\cos^2 30°\,\overline{i} + 2R\cos 30° sen 30°\,\overline{j}\right) = \left(2\Omega-\omega\right)\frac{R}{2}\,\overline{k} \ ..(6)$$

También:

$$\overline{V}_C = \omega_{DC/3}\,\overline{j}\ x\ 2R\cos^2 30°\,\overline{i} = -\frac{3}{2}R\,\omega_{DC/3}\,\overline{j} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

(7) = (6):

$$-\frac{3}{2}R\,\omega_{DC/3} = (2\Omega-\omega)\frac{R}{2} \quad \rightarrow \quad \overline{\omega}_{DC/3} = \frac{(\omega-2R)}{3}\,\overline{j}$$

Luego en (I):

$$\frac{-(\Omega+\omega)}{\sqrt{3}}\,\overline{i} - \Omega\,\overline{j} = \overline{\omega}_{1/DC} + \frac{(\omega-2\Omega)}{3}\,\overline{j}$$

$$\overline{\omega}_{1/DC} = -\frac{(\Omega+\omega)}{\sqrt{3}}\,\overline{i} - \frac{(\Omega+\omega)}{3}\,\overline{j}$$

b).- Derivando (I) respecto al tiempo:

$$\dot{\bar{\omega}}_1 = \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{1/DC}}^{\bar{0}} + \bar{\omega}_{DC/3}\, x\, \bar{\omega}_{1/DC} + \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{DC/3}}^{\bar{0}} = \frac{(\omega - 2\Omega)}{3}\,\bar{j}\; x \left[-\frac{(\Omega+\omega)}{\sqrt{3}}\,\bar{i} - \frac{(\Omega+\omega)}{3}\,\bar{j} \right]$$

$$\dot{\bar{\omega}}_1 = \frac{(\omega - 2\Omega)(\Omega+\omega)}{3\sqrt{3}}\,\bar{k} \quad \text{(Unidades de aceleración angular)}$$