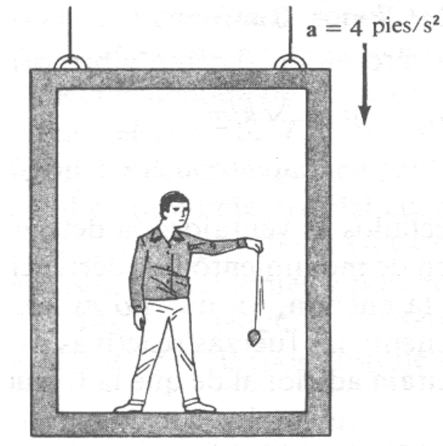
PROBLEMAS SOBRE MOVIMIENTOS VIBRATORIOS DE UN GRADO DE LIBERTAD

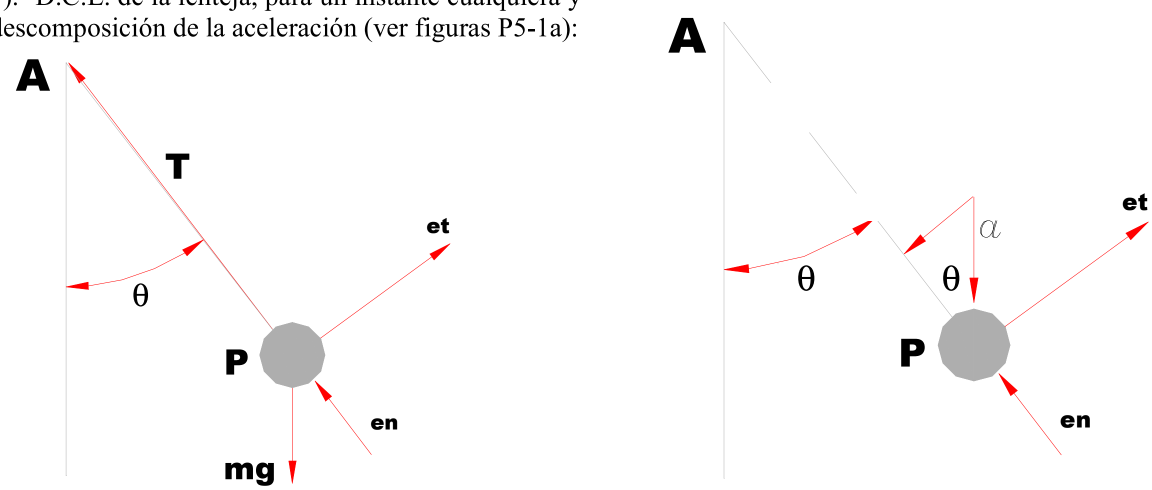
5-1.- Mientras está parado en un elevador el hombre sostiene un péndulo que consiste de una cuerda de 18 plg y una lenteja de 0.5 lb. Si el elevador está descendiendo con una aceleración de a = 4 pies/seg^2. Usando la teoría de momentos y cantidad de movimiento angular, determínese el periodo natural de vibración para pequeñas amplitudes de oscilación.



P5-1

Solución

1).- D.C.L. de la lenteja, para un instante cualquiera y descomposición de la aceleración (ver figuras P5-1a):



(a) P5-1a (b)

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum \overline{M}_A = \left(\dot{\overline{H}}_A\right)_r + \left(\sum m_i \overline{\rho}_i\right) x\, \overline{a}_A = \left(\dot{\overline{H}}_A\right)_r + m\overline{\rho}_{AP}\, x\, \overline{a}_A \qquad (1)$$

Si:

$$\left(\overline{H}_A\right)_r = \overline{\rho}_{AP}\, x\, m\dot{\overline{\rho}}_{AP} \quad \Rightarrow \quad \left(\dot{\overline{H}}_A\right)_r = \overline{\rho}_{AP}\, x\, m\ddot{\overline{\rho}}_{AP}$$

$$\bar{\rho}_{AP} = -\ell\, \bar{e}_n \quad \text{y} \quad \ddot{\bar{\rho}}_{AP} = \ell\ddot{\theta}\, \bar{e}_t + \ell\dot{\theta}^2 \bar{e}_n$$

$$\left(\dot{\bar{H}}_A\right)_r = -\ell\, \bar{e}_n x\, m\, \ell \left(\ddot{\theta}\, \bar{e}_t + \dot{\theta}^2 \bar{e}_n\right) = m\, \ell^2 \ddot{\theta}\, \bar{e}_b$$

$$m\bar{\rho}_{AP} x\, \bar{a}_A = -m\, \ell\, \bar{e}_n x\, a\left(-sen\theta\, \bar{e}_t - \cos\theta\, \bar{e}_n\right) = -m\, \ell\, a\, sen\theta\, \bar{e}_b$$

En (1), si: $sen\theta \cong \theta$

$$-mg\, \ell\, \overbrace{sen\theta}^{\theta}\, \bar{e}_b = \ell^2 m\ddot{\theta}\, \bar{e}_b - m\, \ell\, a\, \overbrace{sen\theta}^{\theta}\, \bar{e}_b$$

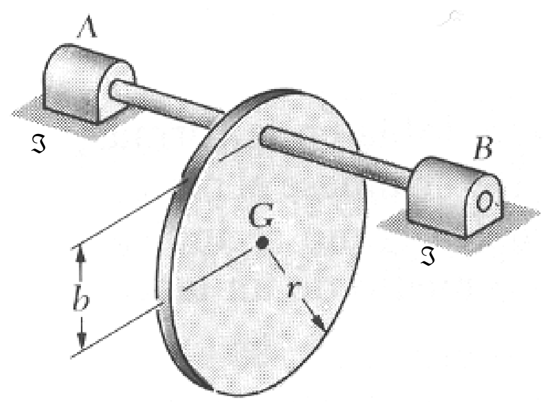
$$\ddot{\theta} + \frac{(g-a)}{\ell}\theta = 0 \quad \text{(M.A.S.)}$$

Donde:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{32.2-4}{1.5}} = 4.34 \quad \text{rad/seg}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 1.45 \quad \text{seg}$$

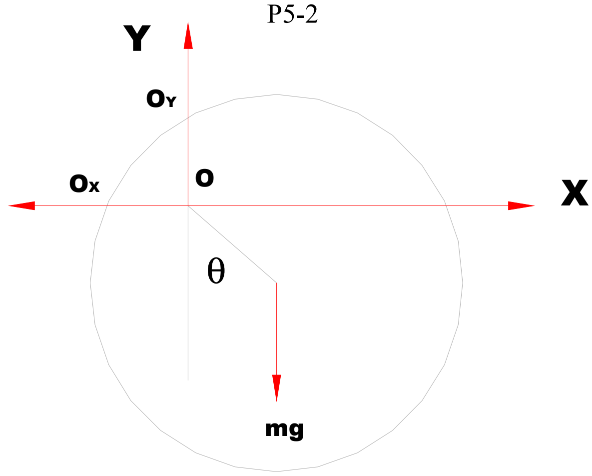
5-2.- Un disco delgado de radio r puede oscilar respecto a un eje AB, situado como se indica, a una distancia b de su centro de masa G. Determínese: a) el periodo de oscilaciones pequeñas, si b = r y b) un segundo valor de b para el cual el periodo de oscilación es el mismo que en el apartado a).



P5-2

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P5-02a):



P5-2a

2).- Tomando momentos con respecto al eje AB ("O"):

$$\sum M_O = I_O\ddot{\theta} \quad \rightarrow \quad -mg\, b\, \overbrace{sen\theta}^{\theta} = I_O\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\, b}{\left(\frac{1}{2} m\, r^2 + m\, b^2\right)}\theta = 0 \qquad (1)$$

a).- Si: b = r

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\,r}{\frac{3}{2}m\,r^2}\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{2g}{3r}\theta = 0 \quad \text{(M.A.S.)}$$

Luego:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}} \quad \text{(Unidades de tiempo)}$$

b).- Si: $T = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$, $b = ?$ (el otro valor)

En (1):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}mr^2 + mb^2\right)}{mgb}} = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$$

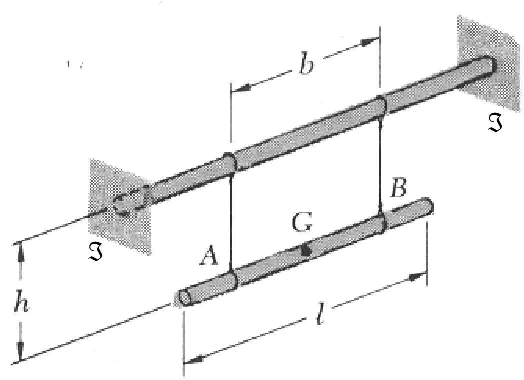
$$b^2 - \frac{3}{2}rb + \frac{r^2}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad b = \frac{\left(\frac{3}{2}r\right) \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}r\right)^2 - 2r^2}}{2}$$

$$b = \frac{3}{4}r \pm \frac{r}{4}$$

$b_1 = r$ (Unidades de longitud) Valor ya conocido

$b_2 = \frac{r}{2}$ (Unidades de longitud) Valor desconocido.

5-3.- Una varilla de longitud ℓ = 600 mm se cuelga de dos cables verticales de longitud h = 300 mm, ambos situados a una distancia $\frac{1}{2}$ b (b = 400mm) de su centro de masa G. Determínese el periodo de oscilación cuando: a) se gira la barra un pequeño ángulo respecto de un plano vertical que pasa por G y se suelta y b) se le da a la barra una pequeña traslación horizontal a lo largo de AB y se suelta.

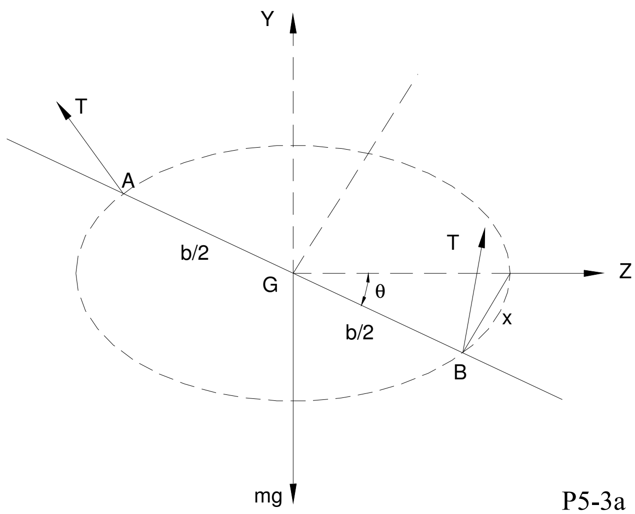


P5-3

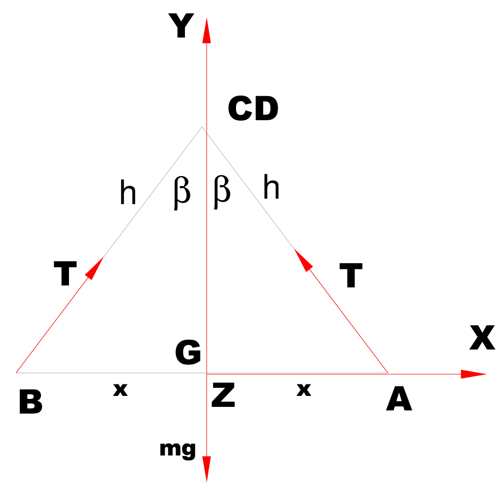
Solución

1).- Cuando se gira un pequeño ángulo, con respecto a un eje vertical que pasa por "G".

a).- D.C.L. (ver figura P5-03a):



(a)



(b)

Si: $X = h\ sen\beta$ y $X = \frac{b}{2} sen\theta$

Luego:

$$h\ sen\beta = \frac{b}{2} sen\theta$$

$$sen\beta = \frac{400}{600} sen\theta \quad \rightarrow \quad sen\beta = \frac{2}{3} sen\theta$$

Para ángulos pequeños $\beta = \frac{2}{3}\theta$ (1)

b).- Relaciones Cinéticas:

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad T\cos\beta + T\cos\beta = mg \quad \rightarrow \quad T = \frac{mg}{2}$$

$$\sum M_{GY} = I_G \alpha \quad \rightarrow \quad T\ sen\beta * \frac{b}{2}\cos\theta + T\ sen\beta * \frac{b}{2}\cos\theta = -I_G \ddot{\theta}$$

$$2T\frac{b}{2}\beta = -I_G\ddot{\theta} \quad \rightarrow \quad I_G\ddot{\theta} + \frac{mg}{2}b\beta = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgb}{2*\frac{1}{12}m\,\ell^2} * \frac{2}{3}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{4gb}{\ell^2}\right)\theta = 0$$

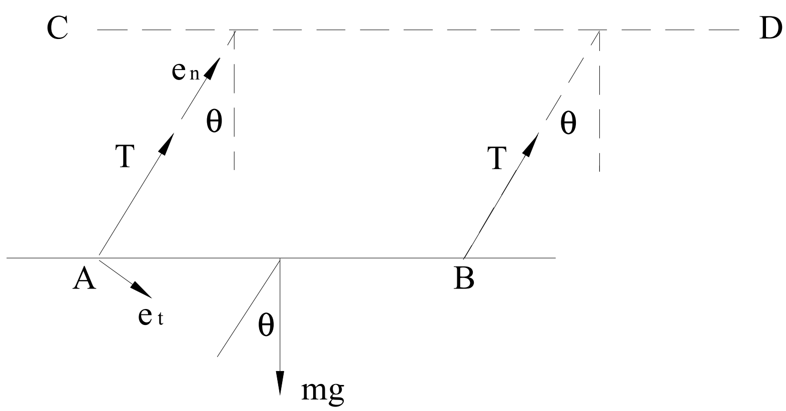
Donde:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^2}{4gb}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.6^2}{4*9.81*0.4}} = 0.9516 \ \text{seg}$$

$$T = 0.952 \ \text{seg}$$

2).- Si a la barra se le da una pequeña traslación para luego soltarla:

a).- D.C.L.:



P5-3b

b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_t = -m\ddot{\theta}\,h \quad \rightarrow \quad mgsen\theta = -m\ddot{\theta}\,h$$

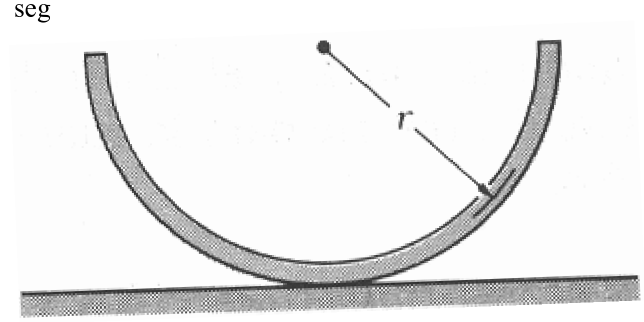
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{h}\theta = 0$$

Donde:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.3}{9.81}} = 1.09876 \text{ seg}$$

$$T = 1.099 \text{ seg}$$

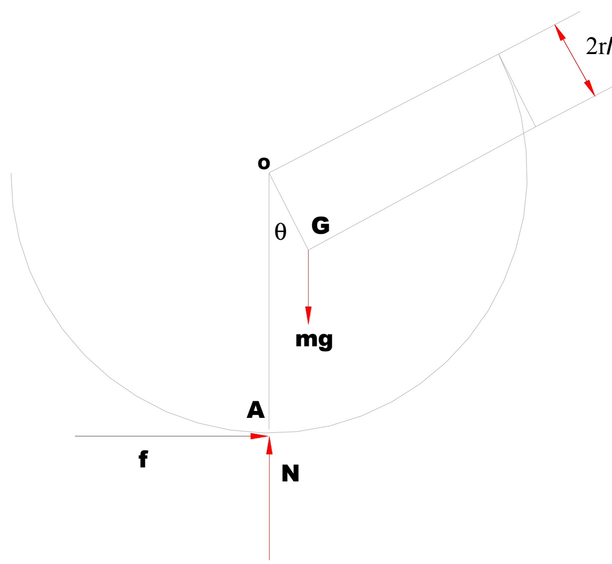
5-4.- Una media sección de tubo se coloca sobre una superficie horizontal, se gira un ángulo pequeño y luego se suelta. Suponiendo que dicha sección se balancea sin deslizar, determínese el periodo de oscilación.



P5-4

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P5-04a):



P5-4a

2).- Cálculo del momento de inercia de masa, para un pequeño ángulo (cos θ = 1), si $I_O = m r^2$:

$$I_G = I_O - m\left(\frac{2r}{\pi}\right)^2$$

Por lo que: $I_A = I_G + m\left(r - \frac{2r}{\pi}\right)^2$

Luego:

$$I_A = I_O - m\left(\frac{2r}{\pi}\right)^2 + mr^2 + m\left(\frac{2r}{\pi}\right)^2 - 2mr\left(\frac{2r}{\pi}\right)$$

$$I_A = mr^2 + mr^2 - 2mr^2\left(\frac{2}{\pi}\right) = 2mr^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$

3).- Relaciones cinéticas.- Cálculo del momento con respecto a "A" (positivo horario):

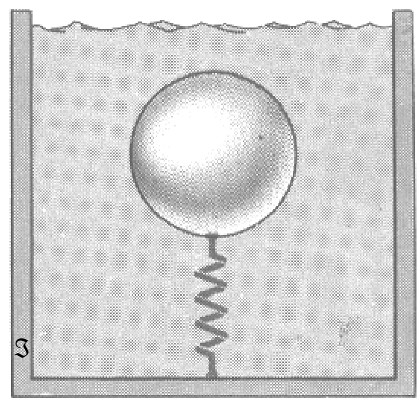
$$\sum M_A = I_A\ddot{\theta} \quad \rightarrow \quad -mg\left(\frac{2r}{\pi}\right)sen\theta = I_A\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgr\left(\frac{2}{\pi}\right)}{2mr^2 \frac{(\pi-2)}{\pi}}\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{r(\pi-2)}\theta = 0$$

Donde:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}(\pi-2)} \quad \text{(Unidades de tiempo)}$$

5-5.- Conforme un cuerpo sumergido se desplaza a través de un fluido, sus partículas se mueven alrededor del cuerpo y por lo tanto, adquieren energía cinética. En el caso de una esfera que se mueve en un fluido ideal, la energía cinética total adquirida por el fluido es $\frac{1}{4}\rho Vv^2$ donde ρ es la densidad máxima del fluido, V el volumen de la esfera y v la velocidad de la esfera. Considere un cascarón hueco de 1 lb de peso y de 3plg de radio, que se mantiene sumergido en un recipiente con agua, por un resorte de constante de 3 lb/plg. a) Despreciando el rozamiento del fluido, determine el periodo de vibración del cascarón cuando se le desplaza verticalmente y después se suelta y b) Resuélvase el apartado a) suponiendo que el recipiente es acelerado hacia arriba con una aceleración constante de 10 pies/seg^2.



P5-5

Solución

Como las únicas fuerzas que producen trabajo, en el sistema agua-esfera, son fuerzas conservativas por lo que se conserva la energía mecánica.

1).- Energía mecánica, para una posición cualquiera:

$$E_M = \frac{1}{4}\rho\, V\, \dot{Y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{Y}^2 + \frac{1}{2}K\, Y^2 \mapsto \text{constante}$$

Derivándole con respecto al tiempo:

$$\frac{d\, E_M}{dt} = \frac{1}{2}\rho\, V\, \dot{Y}\, \ddot{Y} + m\, \dot{Y}\, \ddot{Y} + K\, Y\, \dot{Y} = 0$$

$$\ddot{Y}\left(\frac{1}{2}\rho\, V + m\right) + K\, Y = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{Y} + \left(\frac{2K}{\rho\, V + 2m}\right) Y = 0 \qquad \text{(M.A.S.)}$$

Donde:

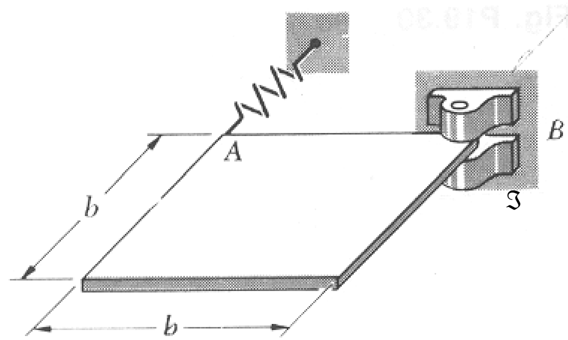
$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho\, V + 2m}{2K}} \quad \rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{1.94\left(\frac{4}{3}\pi\right)\left(\frac{3}{12}\right)^2 + \frac{2}{32.2}}{2*3*12}} = 0.5559 \text{ seg}$$

$$T = 0.5559 \quad \text{seg}$$

2).- Si aceleramos el recipiente.- El movimiento vibratorio, se lleva a cabo con respecto al recipiente, pero el tiempo es una cantidad absoluto (igual para ambos marcos, según la mecánica newtoniana); luego:

$$T = 0.5559 \quad \text{seg}$$

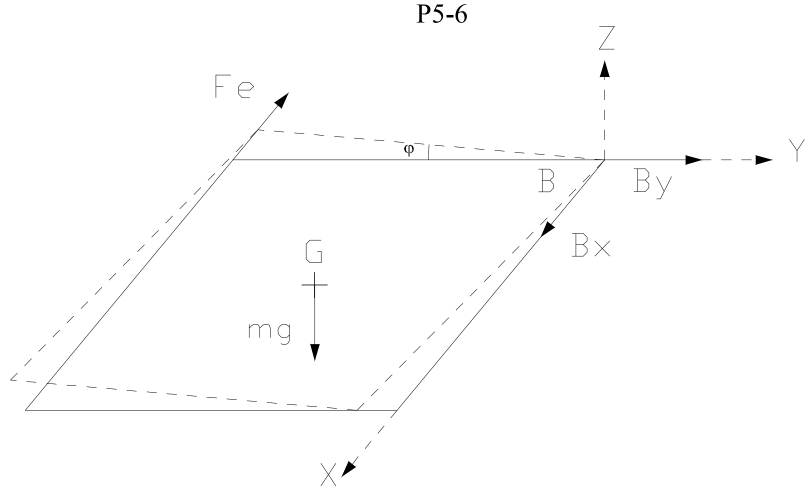
5-6.- Una placa uniforme y cuadrada de masa *m*, se sostiene en un plano horizontal mediante un pasador en B y se une en A a un resorte de constante K. Si a la esquina se le da una pequeño desplazamiento y se suelta determínese el periodo del movimiento resultante.



P5-6

Solución

1).- D.C.L.:



P5-6a

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_{BZ} = I_Z\ddot{\theta}$$

$$-F_e b\cos\theta = \frac{m}{6}b^2\ddot{\theta}$$

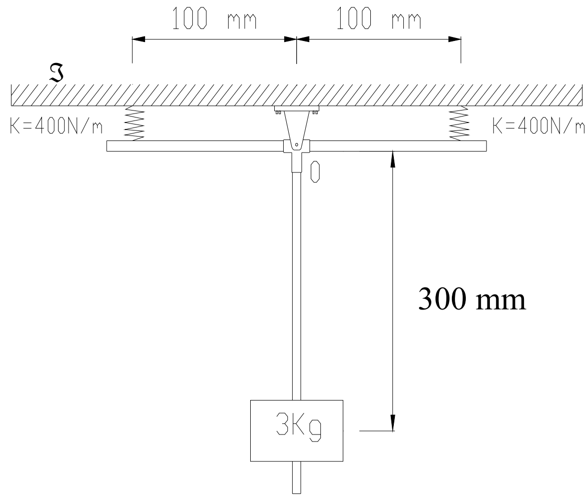
$$-Kb^2\overbrace{sen\theta}^{\theta}\,\overbrace{\cos\theta}^{1} = \frac{m}{6}b^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{6K}{m}\theta = 0 \qquad \text{(M.A.S.)}$$

Donde:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{6K}} \quad \text{(Unidades de tiempo)}$$

5-7.- El bloque A de 3 kg está fijo al extremo de un montaje de barra que tiene peso despreciable. Si ambos resortes de K = 400 N/m están in deformados cuando el montaje está en la posición indicada. Usando métodos energéticos determine el periodo natural de vibración para el bloque cuando el sistema se gira ligeramente alrededor del punto O y se suelta.

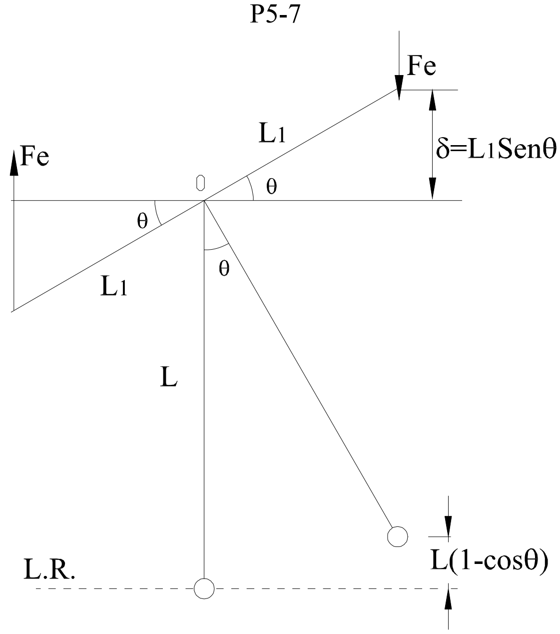


P5-7

Solución

Las únicas fuerzas que producen trabajo son conservativas, por lo que se conserva la energía mecánica.

1).- Diagrama de la posición inicial y una posición cualquiera (ver figura P4-07a):



P5-07a

2).- Por conservación de la energía mecánica:

$$E_M = 2\frac{K}{2}\delta^2 + mgL\left(1-\cos\theta\right) + \frac{1}{2}m\,V^2$$

$$E_M = K\,\left(L_1 sen\theta\right)^2 + mg\;L\left(1-\cos\theta\right) + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 L^2 \quad \mapsto \quad \text{constante}$$

Derivándole respecto al tiempo:

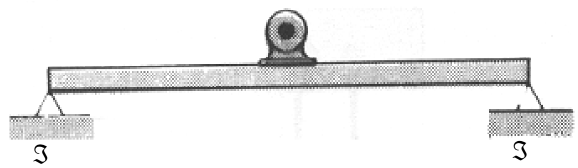
$$2\;L_1^2 K\;sen\theta\,\cos\theta\;\dot{\theta} + mg\;L\;sen\theta\;\dot{\theta} + m\;L^2\dot{\theta}\;\ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta}+\overbrace{\left(\frac{2\,L_1^2\;K}{m\,L^2}+\frac{g}{L}\right)}^{\omega_n^2}\theta=0$$

Reemplazando valores y operando:

$$\omega_n=18.165\ \text{rad/seg}\ \rightarrow\ T=\frac{2\pi}{\omega_n}=0.346\ \text{seg}$$

5-8.- Un motor de 50 kg, se sostiene directamente mediante una viga ligera horizontal cuya deformación estática es de 6 mm, debida al peso del motor. El desequilibrio del motor es equivalente a una masa de 100 gr situada a 75 mm del eje de rotación. Si se sabe que la amplitud de la vibración del motor es de 0.8 mm a una velocidad de 400 RPM, determínese a) el factor de amortiguamiento y b) el coeficiente de amortiguamiento.

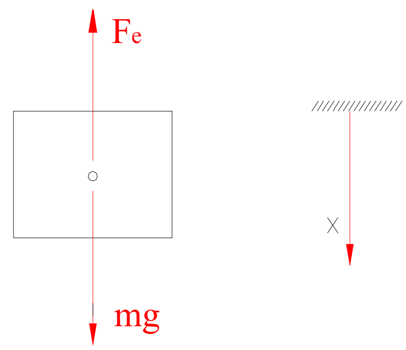


P5-8

Solución

1).- Cálculo del K_e, cuando el motor no están funcionando.

a).- D.C.L. del modelo discretizado, cuando el motor no está funcionando (ver figura P5-08a):



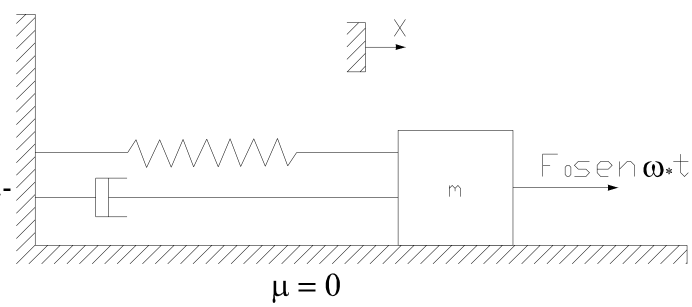
P5-08a

b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X=0\ \rightarrow\ mg=F_e=K_e\delta_S$$

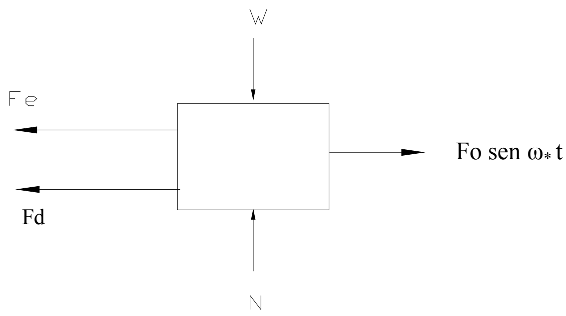
$$K_e=\frac{mg}{\delta_S}=\frac{50*9.81}{0.006}=81750\ \text{N/m}$$

2).- Cuando el motor está funcionando.- Para el modelo discretizado del sistema:



P5-8b

a).- D.C.L. (ver la figura P5-08c):



P5-8c

b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m\ddot{X}$$

$$K_e X - C\dot{X} + F_O sen\,\omega_* t = m\ddot{X}$$

$$m\ddot{X} + CX + K_e X = F_O sen\,\omega_* t \qquad (1)$$

Donde:

$$m = 50 \text{ kg} \;,\; \omega_* = 400 * \frac{\pi}{30} = 41.89 \text{ rad/seg}$$

$$F_O = m_{Ce} a_n = m_{Ce} r \omega_*^2 = 0.1 * 0.075 * 41.89^2 = 13.16 \text{ N}$$

En (1):

$$\ddot{X} + \frac{C}{m}\dot{X} + \frac{K_e}{m} X = 13.16\ sen 41.89\ t$$

$$\ddot{X} + \frac{C}{m}\dot{X} + 1635X = 13.16\ sen 41.89\ t$$

$$\omega_n = \sqrt{1635} = 40.44 \text{ rad/seg}$$

c).- Cálculo de la amplitud estacionaria y del factor de amortiguamiento:

Si:

$$X_O = \frac{F_O / K_e}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_*}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2\eta\,\omega_*}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{13.16 / 81750}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{41.89}{40.44}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2\eta\ 41.89}{40.44}\right)^2}} = 8x10^{-4} \text{ m}$$

$$2.75x10^{-6}\eta^2 = 2.25x10^{-8} \quad \rightarrow \quad \eta = 0.09$$

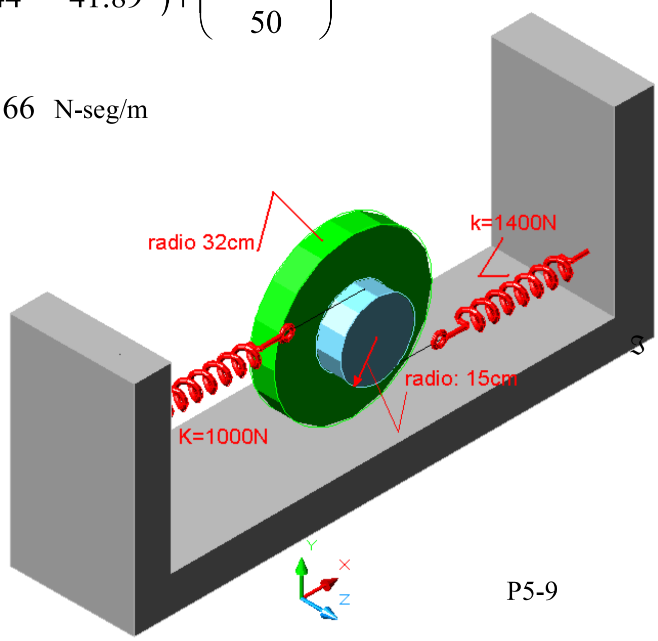
d).- Cálculo del coeficiente de amortiguamiento "C":

Si, también:

$$X_O = \frac{F_O/m}{\sqrt{\left(\omega_n^2-\omega_*^2\right)^2+\left(\frac{C\omega_*}{m}\right)^2}} = \frac{13.16/50}{\sqrt{\left(40.44^2-41.89^2\right)+\left(\frac{41.89C}{50}\right)^2}} = 8x10^{-4}\text{ m}$$

$$4.48x10^{-7}C^2 = 0.0599 \quad \rightarrow \quad C = 365.66 \text{ N-seg/m}$$

5-9.- Una rueda escalonada que pesa 90 N rueda por un plano horizontal, según se indica en la figura. Los resortes están unidos a hilos arrollados de manera segura sobre el cubo central de 32 cm de radio. Si el radio de giro en G del cilindro escalonado vale 225 mm, escribir la ecuación diferencial del movimiento para la posición X_G(t) del centro de masa del cilindro, y determinar la frecuencia y el periodo del movimiento vibratorio resultante.



P5-9

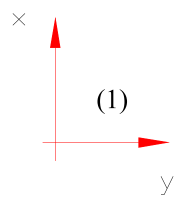
Solución

1).- D.C.L. (ver figura P5-09a):

2).- Relaciones cinéticas:

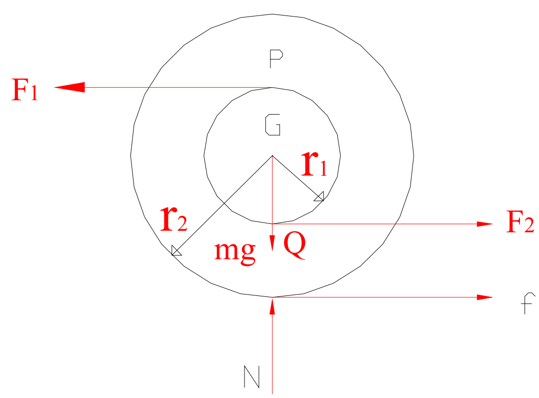
$$\sum F_X = m\ddot{X}_G$$

$$F_2 + f - F_1 = m\alpha\, r_2 \qquad (1)$$



$$\sum M_G = I_G\alpha$$

$$r_2 f + r_1 F_2 + r_1 F_1 = mK_G^2\alpha \qquad (2)$$



P5-9a

(1) en (2):

$$r_2\left(m\alpha\, r_2 + F_1 - F_2\right) + F_2 r_1 + F_1 r_1 = mK_G^2\alpha$$

$$F_1(r_2 + r_1) + F_2(r_1 - r_2) = m\alpha\left(K_G^2 - r_2^2\right) \qquad (3)$$

3).- Relaciones cinemáticas:

$$\dot{X}_G = 0.32\omega \quad \rightarrow \quad \omega = \dot{X}_G / 0.32$$

$$\dot{X}_P = 0.47\omega \quad \rightarrow \quad \omega = \dot{X}_P / 0.47$$

$$\dot{X}_Q = 0.117\omega \quad \rightarrow \quad \omega = \dot{X}_Q / 0.17$$

Luego:

$$\dot{X}_G = \frac{0.32}{0.47}\dot{X}_P \quad \rightarrow \quad X_G = \frac{32}{47}X_P$$

$$\dot{X}_G = \frac{0.32}{0.17}\dot{X}_Q \quad \rightarrow \quad X_G = \frac{32}{17}X_Q$$

Luego:

$$F_1 = X_P K = \frac{47}{32}X_G K$$

$$F_2 = X_Q K = \frac{17}{32}X_G K$$

En (3):

$$\frac{47}{32}*1000\,(0.47)X_G + \frac{17}{32}*1400\,(-0.17)X_G = \frac{90}{9.81}\left(\frac{\ddot{X}_G}{0.32}K_G^2 - 0.32\ddot{X}_G\right)$$

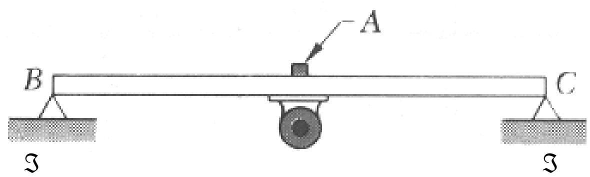
$$563.875X_G = -1.484\ddot{X}_G$$

$$\ddot{X}_G + 389.99\,X_G = 0 \qquad \text{(M.A.S.)}$$

Donde:

$\omega_n = 19.75$ rad/seg, $T = 0.318$ seg y $f_n = 3.1$ H_Z

5-10.- Un motor de velocidad variable está unido rígidamente a la viga BC. El motor está ligeramente desequilibrado y hace que la viga vibre con una frecuencia igual a la velocidad del motor. Cuando la velocidad es menor que 600 RPM o mayor de 1200RPM, se observa que un pequeño objeto, colocado en A permanece en contacto con la viga. Para una velocidad entre 600 a 1200 RPM se observa que el objeto "brinca" y realmente pierde contacto con la viga. Determínese la amplitud (deflexión estática) del movimiento de A cuando la velocidad del motor es a) 600 RPM y b) 1200RPM.Exprésese los resultados en S.I. y en unidades del sistema ingles.



P5-10

Solución

1).- Lo que nos piden, es la deflexión que produciría el motor, que es equivalente a la deflexión estática, por las condiciones dadas:

Si:

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta}} \quad \rightarrow \quad \Delta = \frac{g}{\omega_n^2}$$

2).- El ω_n de la viga, es la del motor de acuerdo a lo enunciado en el problema:

$$\omega_{n\,a} = 600 * \frac{\pi}{30} = 20\,\pi \text{ rad/seg} \quad \text{y} \quad \omega_{n\,b} = 1200 * \frac{\pi}{30} = 40\,\pi \text{ rad/seg}$$

a).- Reemplazando en (1) $\omega_{n\,a}$:

$$\Delta_a = \frac{g}{400\,\pi^2}$$

i).- Si g = 9810 mm/seg^2:

$$\Delta_a = \frac{9810}{400\,\pi^2} = 2.485 \text{ mm}$$

ii).- Si g = 386.4 plg/seg^2 :

$$\Delta_a = \frac{386.4}{400\,\pi^2} = 0.0979 \quad \text{plg}$$

b).- Reemplazando en (1), $\omega_{n\,b}$:

$$\Delta_b = \frac{g}{1600\,\pi^2}$$

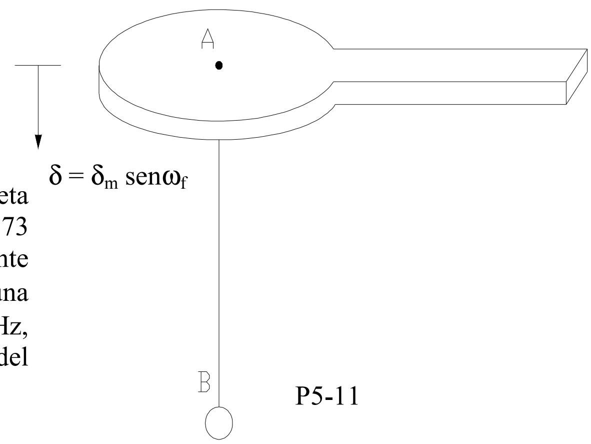
i).- Si g = 9810 mm/seg^2:

$$\Delta_b = \frac{9810}{1600\,\pi^2} = 0.621 \quad \text{mm}$$

ii).- Si g = 386.4 plg/seg^2:

$$\Delta_b = \frac{386.4}{1600\,\pi^2} = 0.0245 \quad \text{plg}$$

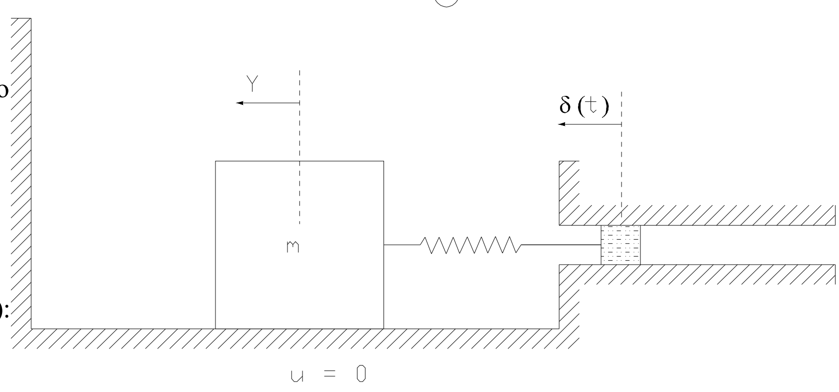
5-11.- Una pelota de 360 gr está unida a una paleta mediante un cordel elástico AB de constante K = 73 N/m. Sabiendo que la paleta se mueve verticalmente conforme a la relación $\delta = \delta_m$ senω_f t, con una amplitud δ_m = 200 mm y una frecuencia f_f = 0.5 Hz, hallar la amplitud de la parte estacionaria del movimiento de la pelota.



P5-11

Solución

1).- Movimiento discretizado (ver figura P5-11a):



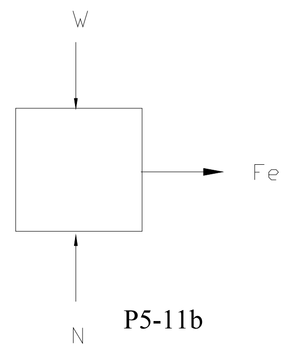
P5-11a

2).- D.C.L. (ver figura P5-11b):

3).- Relaciones cinéticas:

$$-F_e = m\ddot{Y}$$

$$-K\left(Y-\delta_{(t)}\right)=m\ddot{Y}$$



P5-11b

$$\ddot{Y}+\frac{K}{m}Y=\frac{K\ \delta_{(t)}}{m}=\frac{\overbrace{73*0.2}^{14.6}}{0.36}sen\omega_f t$$

$$\ddot{Y}+202.778\ Y=40.556\ sen\omega_f t$$ (Mov. forzado no amortiguado) (1)

Donde:

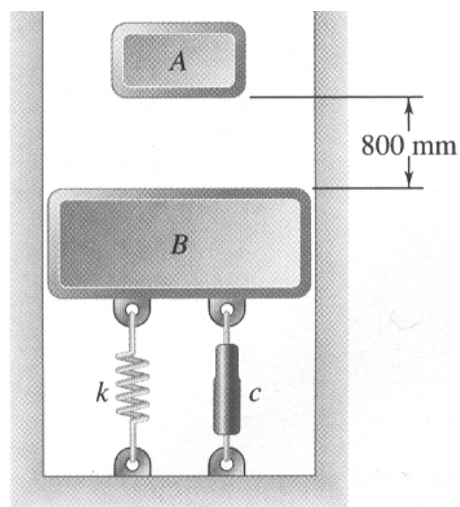
$\omega_n = 14.24$ rad/seg y $f_f = \dfrac{\omega_f}{2\pi} \quad \rightarrow \quad \omega_f = 2\pi * 0.5 = \pi$ rad/seg

En (1):

$$\ddot{Y}+202.778\ Y=14.6\ sen\pi\ t$$ (Mov. forzado no amortiguado)

2).- Cálculo de la amplitud de la parte transitoria:

$$Y_0 = \frac{14.6/0.36}{202.778-\pi^2}=\frac{40.556}{192.908}=0.21 \text{ m}$$



P5-12

5-12.- Un bloque A de 4 kg se deja caer desde una altura de 800 mm sobre un bloque B de 9 kg. Este está soportado por un muelle de constante K = 1500 N/m y sujeto a un amortiguador de coeficiente de amortiguamiento C = 230 N.seg/m. Sabiendo que no hay rebote, hallar la distancia máxima que recorren los bloques tras el choque.

Solución

1).- Condiciones iniciales del movimiento.

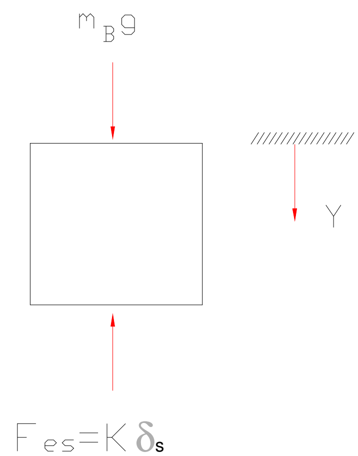
a).- Cálculo de la velocidad del bloque A, antes del choque:

$$V_A = \sqrt{2\ g\ h} = \sqrt{2*9.81*0.8} = 3.962 \text{ m/seg}$$

b).- Cálculo de la velocidad de los bloques A y B, un instante después del choque completamente plástico, por conservación de la cantidad de movimiento lineal:

$$m_A V_A + m_B \overbrace{V_B}^{0} = (m_A + m_B)V$$

$$V = \frac{4*3.962}{13} = 1.219 \cong 1.22 \text{ m/seg}$$



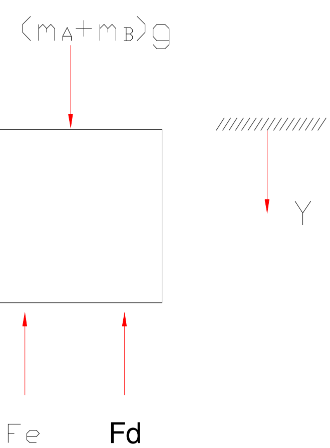
P5-12a

2).- Cuando el cuerpo B se encuentra en equilibrio estático (ver figura P5-12a):

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad m_B g - K\,\delta_S = 0 \qquad (1)$$

3).- Cuando el sistema se encuentra en movimiento.

a).- D.S.F. (ver figura P5-12b)



P5-12b

b).- Relaciones Cinéticas:

$$\sum F_Y = m_t \ddot{Y}$$

$$m_A g + m_B g - K(Y + \delta_S) - C\dot{Y} = (m_A + m_B)\ddot{Y}$$

$$13\,\ddot{Y} + 230\,\dot{Y} + 1500\,Y = 4*9.81$$

$$\ddot{Y} + \frac{230}{13}\dot{Y} + \frac{1500}{13}Y = \frac{4*9.81}{13} \quad \text{(Mov. forzado con amortiguamiento)}$$

Donde:

$$\omega_n = 10.74 \text{ rad/seg}$$

$$\eta = \frac{C}{2\sqrt{mK}} = 0.8235 \quad \text{(Mov. Vibratorio sub amortiguado)}$$

$$\omega' = \omega_n \sqrt{1 - \eta^2} = 6.093 \text{ rad/seg}$$

3).- Solución de la ecuación diferencial:

$$Y_{(t)} = Y_C + Y_P$$

Si:

$$Y_C = e^{-\eta\,\omega_n t}\left(A\,sen\,\omega'\,t + B\cos\omega'\,t\right)$$

$$Y_P = A_0 \quad \rightarrow \quad \frac{1500}{13}\,A_0 = \frac{4*9.81}{13} \quad \rightarrow \quad A_0 = 0.02616$$

Luego:

$$Y_{(t)} = e^{-8.844\,t}\left(A\,sen\,6.093\,t + B\cos 6.093\,t\right) + 0.02616 \;\text{ m} \qquad (2)$$

Derivando (2) con respecto al tiempo:

$$\dot{Y}_{(t)} = -8.844\,e^{-8.844\,t}\begin{pmatrix} A\,sen\,6.093\,t + \\ B\cos 6.093\,t \end{pmatrix} + 6.093\,e^{-8.844\,t}\begin{pmatrix} A\cos 6.093\,t - \\ B\,sen\,6.093\,t \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Determinación de las constantes, de acuerdo a las condiciones iniciales:

Para, $t = 0$, $Y_0 = 0$ m/seg y $\dot{Y}_0 = 1.22$ m/seg

En (2):

$$0 = B + 0.02616 \quad \rightarrow \quad B = -0.02616$$

En (3):

$$1.22 = -8.844\,B + 6.093\,A \quad \rightarrow \quad A = 0.1623$$

4).- Cálculo de la deformación máxima.- Esto se da cuando $\dot{Y}_{(t)} = 0$, luego en (3):

$$0 = -8.844\,e^{-8.844t}\begin{pmatrix} 0.1623 sen 6.093t - \\ 0.02616\cos 6.093t \end{pmatrix} + 6.093\,e^{-8.844t}\begin{pmatrix} 0.1623\cos 6.093t + \\ 0.02616 sen 6.093t \end{pmatrix}$$

$$0 = -1.276\,sen\,6.093\,t + 1.22\cos 6.093\,t$$

$tg\ 6.093\,t = 0.9563 \quad \rightarrow \quad 6.093\,t = 43.72° \quad o \quad 6.093\,t = 0.763$ rad

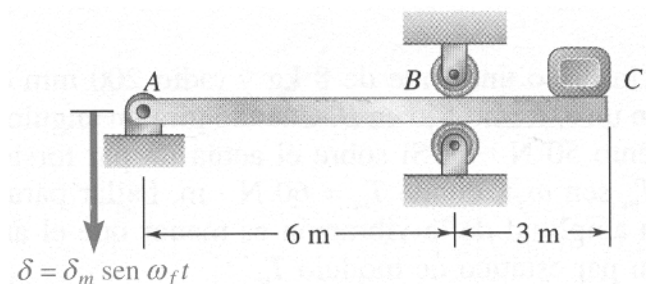
$t = 0.1252$ seg

En (2):

$$Y_{\max} = e^{-8.844x0.1252}\left(0.1623\ sen 43.72° - 0.02616\ \cos 43.72°\right) + 0.02616$$

$$Y_{\max} = 0.03082 + 0.02616 = 0.05698 \text{ m} \ \rightarrow \ Y_{\max} \cong 57 \text{ mm}$$

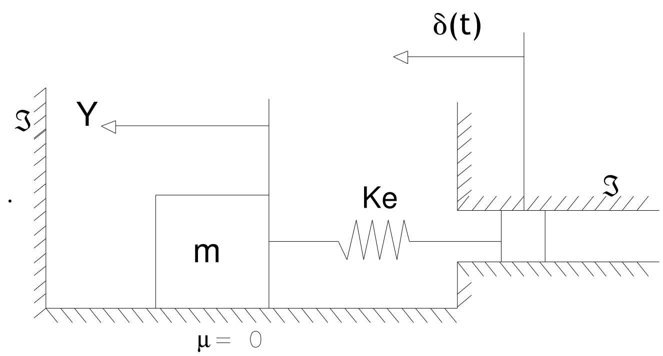
5-13.- Una viga ABC está soportada por una articulación en A y un juego de rodillos en B. Un bloque de 120 kg colocado en su extremo produce una flecha de 15 mm en C. Suponiendo que la articulación sufra en A un desplazamiento periódico $\delta = \delta_m$ sen ω_f t, donde δ_m = 10 mm y ω_f = 18 rad/seg y que el apoyo B no se mueva, hallar la aceleración máxima del bloque C. Se desprecia la masa de la viga y se supone que el bloque no se separa de ella.



P5-13

Solución

1).- Discretizando el movimiento:



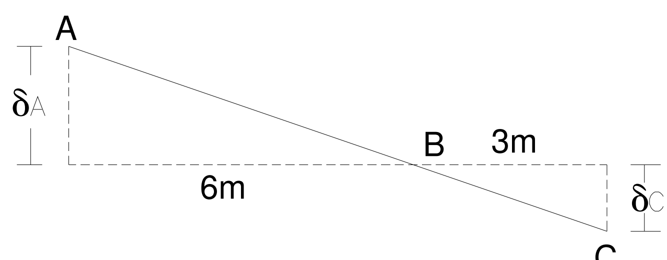
P5-13a

2).- Determinación del K_e , del $\delta_{(t)}$ y D.C.L .

a).- K_e para una viga en voladizo:

$$K_e = \frac{P}{\delta_S} = \frac{120*9.81}{0.015} = 78480 \text{ N/m}$$

b).- ABC es una viga rígida, con movimiento alrededor de un eje fijo (ángulos pequeños):

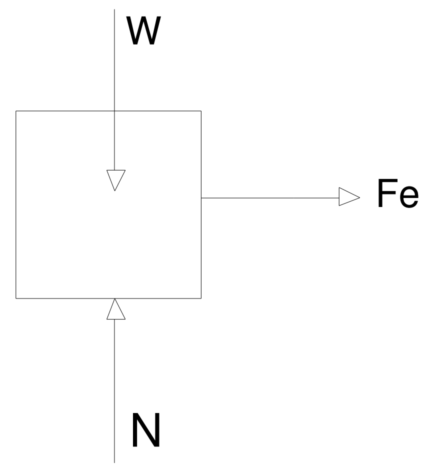


P5-13b

$$\frac{\delta}{6} = \frac{\delta_{C\,(t)}}{3}$$

$$\delta_{C\,(t)} = \frac{\delta}{2} = 5x10^{-3}\,sen\,18\,t \text{ m}$$

c).- D.C.L.:



P5-13c

3).- Relaciones Cinéticas (ver figura P5-13c):

$$-F_e = m\ddot{Y} \quad \rightarrow \quad -K_e\left(Y - \delta_{C\,(t)}\right) = m\ddot{Y}$$

$$\ddot{Y} + \frac{78480}{120}\,Y = \frac{78480 * 5x10^{-3}}{120}\,sen 18\,t$$

$$\ddot{Y} + 654\,Y = 3.27\,sen 18\,t \quad \text{(Mov. forzado sin amortiguamiento)}$$

Donde:

$$F_0 = 78480 * 5x10^{-3} = 392.4\ N$$

$$\omega_n = \sqrt{654} = 25.57 \text{ rad/seg}$$

4).- La aceleración máxima se dará en la solución particular:

Si:

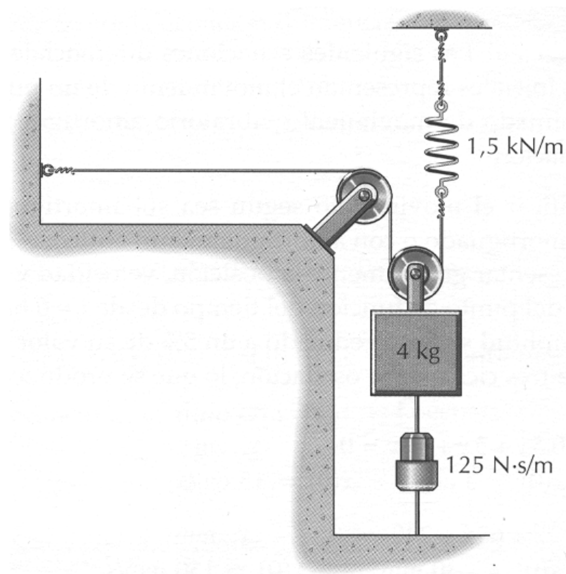
$$Y_P = Y_0\ sen\ \omega_* t \quad \Rightarrow \quad \dot{Y}_P = Y_0 \omega_* \cos \omega_* t \quad y \quad \ddot{Y}_P = -Y_0 \omega_*^2 sen\ \omega_* t$$

$$Y_0 = \frac{F_0 / K}{1 - \left(\frac{\omega_*}{\omega_n}\right)^2} = \frac{78480 * 5x10^{-3} / 78480}{1 - \left(\frac{18}{25.57}\right)^2} = 9.91x10^{-3} \text{ m}$$

Para $\ddot{Y}_{max}$, $sen\ \omega_* t = 1$; luego:

$$\ddot{Y}_{max} = 9.91x10^{-3} * 18^2 = 3.21 \text{ m/seg}^2$$

5-14.- Una masa A de 4 kg pende en un plano vertical, según se indica en la figura. El resorte de K =1.5 KN/m se halla sometido a tracción en todo momento y las poleas son pequeñas y extensa de rozamiento. Si se aplica una fuerza hacia abajo $P_{(t)}$ = 150 sen 18 t (Newton) al bloque A; C = 125 N-seg/m, y A se desplaza 15 mm por encima de su posición de equilibrio y se suelta dándole una velocidad hacia abajo de 750 mm/seg cuando t = 0. Determínese: a) la ecuación diferencial que rige el movimiento, b) la posición del bloque en función del tiempo.

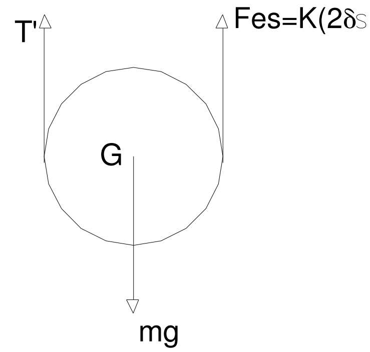


P5-14

Solución

1).- Cuando el sistema se encuentra en equilibrio estático:

a).- D.C.L.:



P5-14a

b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_C = 0$$

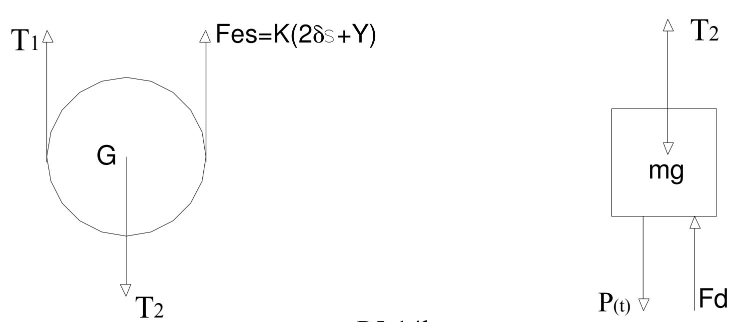
$$T'r - F_{es} r = 0 \quad \rightarrow \quad T' = F_{es} = 2K\delta_s$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$mg - T' - F_{es} = 0 \quad \rightarrow \quad mg - 4K\delta_s = 0 \qquad (1)$$

2).- Cuando el sistema se encuentra en movimiento:

a).- D.C.L.:



(a) P5-14b (b)

b).- Relaciones Cinéticas:

En (a):

$$\sum M_C = \overbrace{I_C}^{0}\alpha \quad \rightarrow \quad T_1 r - F_e r = 0 \quad \rightarrow \quad T_1 = F_e$$

$$\sum F_Y = \overbrace{m_P}^{0} a_C \quad \rightarrow \quad T_1 + F_e = T_2 \quad \rightarrow \quad T_2 = 2F_e$$

En (b):

$$\sum F_Y = m\ddot{Y} \quad \rightarrow \quad -C\dot{Y} + mg + P_{(t)} - 2F_e = m\ddot{Y}$$

$$-C\dot{Y} + mg + P_{(t)} - 4K(Y + \delta_s) = m\ddot{Y}$$

$$m\ddot{Y} + C\dot{Y} + 4KY = P_{(t)} \quad \rightarrow \quad 4\ddot{Y} + 125\dot{Y} + 6000Y = 150\ sen\ 18t$$

$$\ddot{Y} + 31.25\ \dot{Y} + 1500\ Y = \frac{150}{4} sen\ 18\ t \quad \text{(Mov. forzado con amortiguamiento)} \qquad (2)$$

3).- Solución de la ecuación diferencial (2):

Si:

$$Y_{(t)} = Y_P + Y_C$$

a).- Determinación de la solución particular:

$$Y_P = Y_0\ sen\ (18\ t - \phi_S)$$

Donde:

$$Y_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(K - m\omega_*^2)^2 + (C\omega_*)^2}} = \frac{150}{\sqrt{(6000 - 4*18^2)^2 + (125*18)^2}}$$

$$Y_0 = 0.028766 \ \text{m} \quad \text{ó} \quad Y_0 = 28.766 \ \text{mm}$$

$$tg\ \phi_S = \frac{C\omega_*}{K - m\omega_*^2} = \frac{125*18}{6000 - 4*18^2} = 0.4783 \;\rightarrow\; \phi_S = 25.56° \quad ó \quad \phi_S = 0.4462 \text{ rad.}$$

Luego:

$$Y_P = 28.766\, sen(18\,t - 0.4462) \text{ mm} \tag{3}$$

b).- Determinación de la solución complementaria:

$$\ddot{Y} + 31.25\,\dot{Y} + 1500\,Y = 0$$

i).- Cálculo de η, para determinar el tipo de amortiguamiento :

Si:

$$m_{ef} = 1 \text{ kg}, \; C_{ef} = 31.25 \text{ N.seg/m}, \text{ y } \omega_{n\,ef} = \sqrt{1500} = 38.73 \text{ rad/seg}$$

$$\eta = \frac{C_{ef}}{2\,m_{ef}\,\omega_{n\,ef}} = \frac{31.25}{2*1*38.73} = 0.4034 \quad \text{(Mov. Subamortiguado)}$$

ii).- La solución está dado por:

$$Y_C = e^{-\eta\omega_n t}\left(Asen\,\omega' t + B\cos\omega' t\right)$$

Donde:

$$\omega' = \omega_n\sqrt{1-\eta^2} = 38.73\sqrt{1-0.4034^2} = 35.438 \text{ rad/seg}$$

Luego la solución general está dado por:

$$Y_{(t)} = e^{-15.625\,t}\left(Asen35.438\,t + B\cos 35.438\,t\right) + 28.766 sen(18t - 0.4462) \text{ mm} \tag{4}$$

3).- Cálculo de las constantes A y B, por las condiciones iniciales:

Para, t = 0, Y_0 = -15 mm , y $\dot{Y}_0$ = 750 mm/seg

Si:

$$\dot{Y}_{(t)} = -15.625\,e^{-15.625t}\left(A\,sen\,35.438\,t + B\,\cos\,35.348\,t\right) +$$
$$35.438\,e^{-15.625t}\left(A\cos 35.438\,t - B\,sen\,35.348\,t\right) + 20.766*18\cos(18\,t - 0.4462) \tag{5}$$

En (4):

$$-15 = B + 28.766\ sen(-0.4462) \quad \rightarrow \quad B = -2.587$$

En (5):

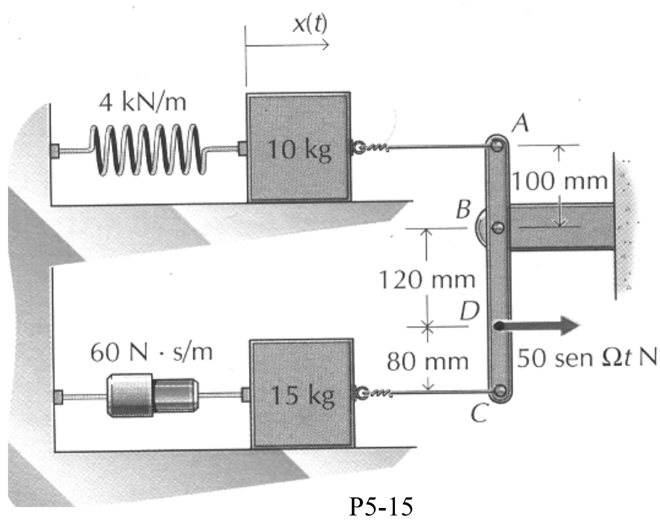
$$750 = -15.625 * (-2.587) + 35.438\ A + 28.766 * 18 \cos(-0.4462)$$

$$A = 6.842 \text{ mm}$$

Luego:

$$Y_{(t)} = e^{-15.625t}\left(6.842\ sen\ 35.438\ t - 2.587 \cos 35.438\ t\right) + 28.766\ sen(18\ t - 0.4462) \text{ mm}$$

5-15.- Las dos masas de la figura se deslizan por sendas superficies horizontales exentas de rozamiento. La barra ABC es de masa despreciable y está vertical en la posición de equilibrio. Si al punto D de la barra se aplica una fuerza $P_{(t)}$ = 50 sen Ω t (Newton). Determínese: a) la máxima amplitud de la oscilación estacionaria del bloque de 10 kg, b) el dominio de pulsaciones Ω que hay que evitar para que la amplitud de la oscilación estacionaria del bloque de 10 kg no supere los 25 mm.

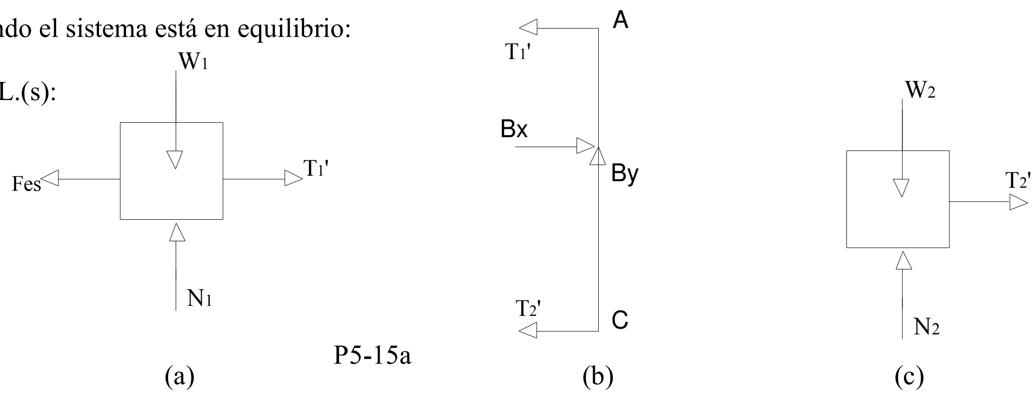


P5-15

Solución

1).- Cuando el sistema está en equilibrio:

a).- D.C.L.(s):



P5-15a

b).- Relaciones cinéticas:

En (a):

$$\sum F_X = 0 \quad \rightarrow \quad T_1' = F_{es} = K\delta_{s1} \tag{1}$$

En (b):

$$\sum M_B = 0 \quad \rightarrow \quad T_1'(0.1) = T_2'(0.2) \tag{2}$$

En (c):

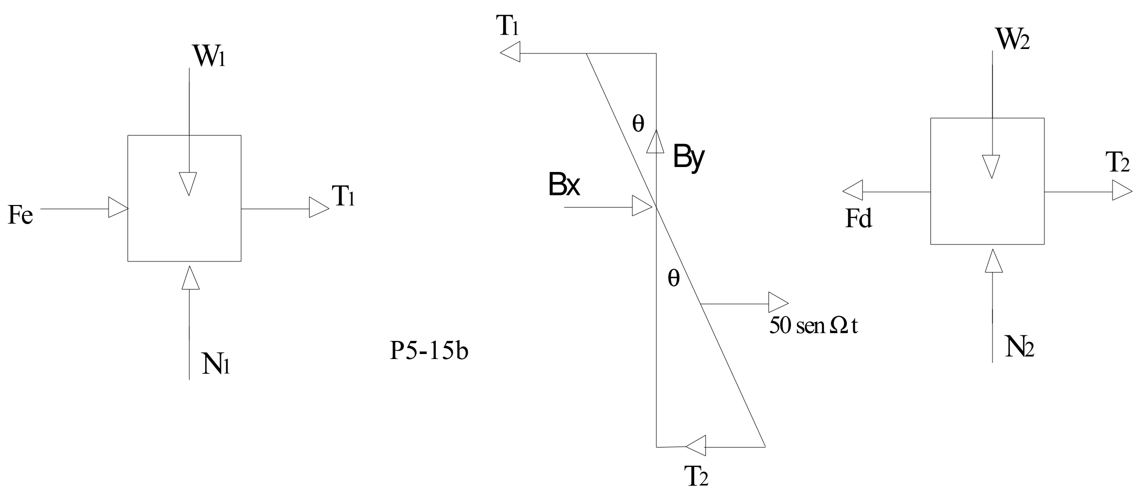
$$\sum F_X = 0 \quad \rightarrow \quad T_2' = 0$$

Luego en (1) y (2):

$$T_1' = 0 = K\delta_{s1}$$

2).- Cuando el sistema esta en movimiento:

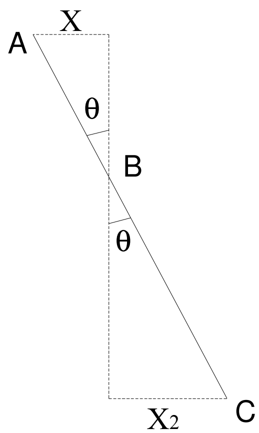
a).- D.C.L. (ver figura P5-15b):



P5-15b

(a) (b) (c)

b).- Relaciones cinemáticas (para pequeños desplazamientos):



5-15c

$$\frac{X}{0.1} = \frac{X_2}{0.2} \quad \rightarrow \quad X_2 = 2X$$

$$\dot{X}_2 = 2\dot{X}$$

$$\ddot{X}_2 = 2\ddot{X}$$

c).- Relaciones cinéticas:

En (c):

$$\sum F_X = m_2\ddot{X}_2 \quad \rightarrow \quad T_2 - F_d = m_2\ddot{X}_2 \quad \rightarrow \quad T_2 - C\left(2\dot{X}\right) = m_2\left(2\ddot{X}\right)$$

$$T_2 = 30\ddot{X} + 120\dot{X} \tag{3}$$

En (b):

$$\sum M_B = \overbrace{I_B}^{0}\alpha \quad \rightarrow \quad T_1 * 0.1 + 0.12 * 50 sen\Omega t - 0.2T_2 = 0$$

Reemplazando (3):

$$T_1 = 2T_2 - 60 sen\Omega\, t = 60\ddot{X} + 240\dot{X} - 60 sen\Omega\, t \tag{4}$$

En (a):

$$\sum F_X = m_1\ddot{X}_1 \quad \rightarrow \quad T_1 + KX = -m_1\ddot{X}$$

Reemplazando (4):

$$60\ddot{X} + 240\dot{X} - 60 sen\Omega\, t + KX = -10\ddot{X} \tag{5}$$

$$7\ddot{X} + 24\dot{X} + 400X = 6\ sen\Omega\, t$$ (Mov. forzado amortiguado)

Donde:

$m_{eff} = 7$, $C_{eff} = 24$, $K_{eff} = 400$, $F_{0\,eff} = 6$, $\omega_* = \Omega$ y $\eta = 0.086$

3).- Cálculo de la máxima amplitud de la vibración permanente:

$$X_0 = \frac{F_{0\,eff}}{\sqrt{\left(K_{eff} - m_{eff}\Omega^2\right)^2 + \left(C_{eff}\Omega\right)^2}} \qquad (6)$$

Usando máximos y mínimos para la amplitud en función de la pulsación perturbadora:

$$\frac{dX_0}{d\Omega} = 0 = -\frac{F_{0\,eff}}{2} * \frac{\overbrace{\left[2\left(K_{eff}m_{eff}\Omega\right)\left(-2m_{eff}\right) + 2C_{eff}^2\Omega\right]}^{0}}{\left[\left(K_{eff} - m_{eff}\Omega^2\right)^2 + \left(C_{eff}\Omega\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$2\left(K_{eff} - m_{eff}\Omega^2\right)\left(-2m_{eff}\Omega\right) + 2C_{eff}^2\Omega = 0 \quad \rightarrow \quad C_{eff}^2 = 2m_{eff}\left(K_{eff} - m_{eff}\Omega^2\right)$$

$$\Omega = \left[\frac{2m_{eff}K_{eff} - C_{eff}^2}{2m_{eff}^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{2*7*400 - 24^2}{2*7^2}\right]^{1/2} = 7.16 \ \text{rad/seg}$$

En (6):

$$X_0 = \frac{6}{\sqrt{\left(400 - 7*7.16^2\right)^2 + \left(24*7.16\right)^2}} = 0.03396 \ \text{m} \quad \rightarrow \quad X_0 = 33.96 \ \text{mm}$$

4).- Cálculo del dominio de la pulsación Ω, que hay que evitar para que la amplitud de oscilación estacionaria del bloque de 10 kg no supere los 25 mm.

En (6):

$$\left(0.025\right)^2 = \left[\frac{6}{\sqrt{\left(400 - 7\Omega^2\right)^2 + \left(24\Omega\right)^2}}\right]^2$$

$$160000+49\Omega^4-5600\Omega^2+576\Omega^2=\left(\frac{6}{0.025}\right)^2 \quad\rightarrow\quad \Omega^4-102.5306\Omega^2+2089.8=0$$

$$\Omega^2=\frac{102.5306\pm\sqrt{102.5306^2-4*2089.8}}{2}=\frac{102.5306\pm 46.404}{2}$$

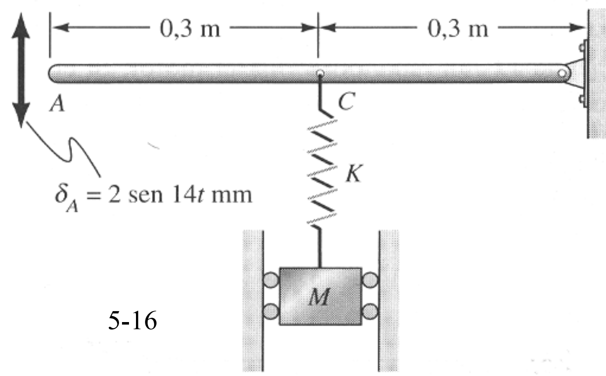
De donde, se tiene:

$\Omega_1=8.629$ rad/seg y $\Omega_2=5.2975$ rad/seg

Luego:

$5.298\le\Omega\le 8.629$ (rad/seg)

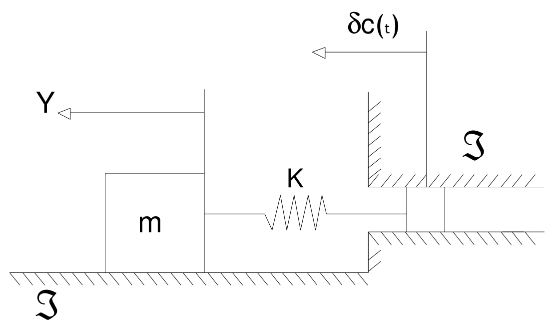
5-16.- Una masa de 0.5 kg está suspendida de una barra rígida AB a través de un resorte cuya constante K vale 100 N/m. Al extremo de la barra AB se le da un movimiento vertical sinusoidal δ_A =2 sen 14 t (mm), con t en segundos. ¿Cuál será la máxima fuerza sobre la barra en el punto C, mucho tiempo después de que el movimiento haya comenzada?



5-16

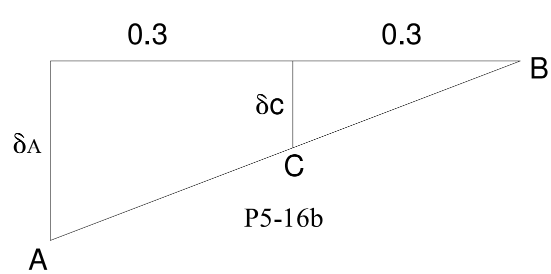
Solución

1).- Modelo discretizado (ver figura P5-16a) y cálculos elementales (ver figura P5-16b):



P5-16a

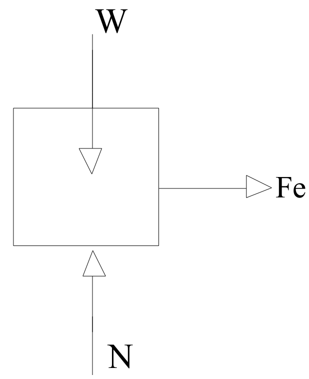
$$\frac{\delta_A}{0.6}=\frac{\delta_C}{0.3}\quad\rightarrow\quad\delta_C=\frac{\delta_A}{2}$$



P5-16b

2).- Cálculo de la aceleración máxima:

a).- D.C.L. (ver figura P5-16c):



P5-16c

b).-Relaciones cinéticas:

$$\sum F_Y = m\ddot{Y}$$

$$-F_e = m\ddot{Y} \quad \rightarrow \quad -K(Y-\delta_C) = m\ddot{Y}$$

$$\ddot{Y} + \frac{K}{m}Y = \frac{K}{m}\delta_C$$

$$\ddot{Y} + 200Y = \frac{0.1}{0.5} sen\,14\,t$$ (Movimiento forzado no amortiguado)

La aceleración máxima de la masa se da en la solución particular, luego:

$$X_0 = \frac{F_0/m}{K/m - \omega_*^2} = \frac{0.1/0.5}{200-14^2} = 0.05 \text{ m}$$

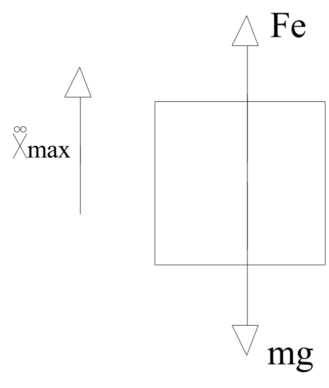
Si:

$$X_P = X_0 sen\,\omega_* t \;,\; \dot{X}_P = X_0\omega_* \cos\omega_* t \;\text{ y }\; \ddot{X}_P = -X_0\omega_*^2 sen\,\omega_* t$$

La aceleración máxima se da cuando: $sen\,\omega_* t = 1$

$$\ddot{X}_P = -0.05 * 14^2 = -9.8 \text{ m/seg}^2$$

3).- Cálculo de la fuerza elástica máxima que actúa en C (ver figura P5-16d):

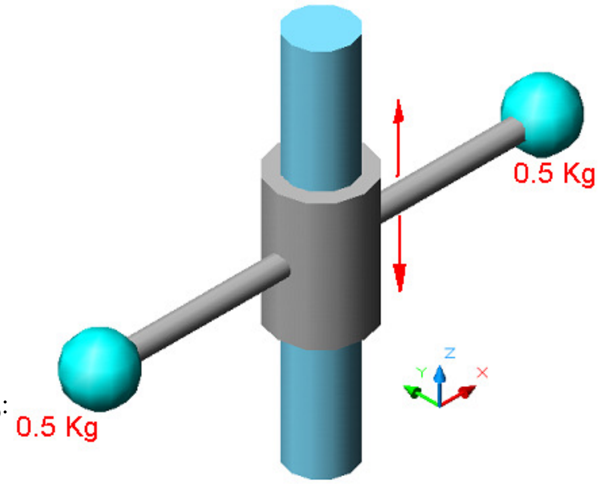


P5-16d

$$mg - F_e = -m\ddot{X} \quad \rightarrow \quad F_e = m(g + \ddot{X}_{máx})$$

$$F_e = 0.5(9.81 + 9.8) = 9.805 \text{ N}$$

5-17.- Cada una de las bolas de 0.5 kg está sujeta al extremo de la varilla elástica sin peso que flexiona 4 mm cuando recibe la aplicación estática de una fuerza de 2 N. Si el collarín central recibe un movimiento armónico vertical de frecuencia 4 Hz y una amplitud de 3 mm, hallar la amplitud Y_0 de la oscilación vertical de cada bola.



P5-17

Solución

1).- Cálculo de K_e y la función desplazamiento $\delta_{(t)}$:

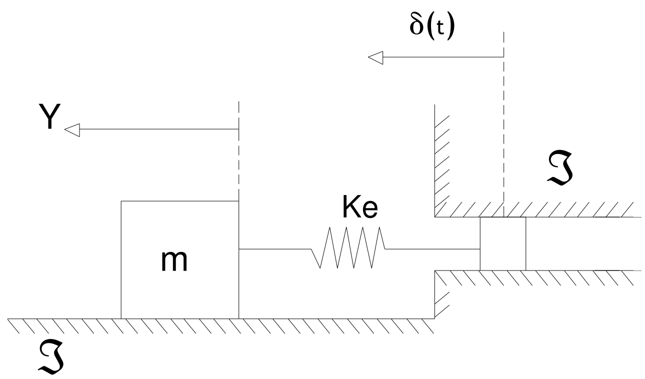
$$K_e = \frac{2}{0.004} = 500 \quad \text{N/m}$$

$$\omega_* = 2\pi\ f_* = 4 * 2\pi = 25.133 \quad \text{rad/seg}$$

$$b = \delta_0 = 0.003 \quad \text{m}$$

$$\delta_{(t)} = 0.003\ sen\ 25.133\ t \ \text{m}$$

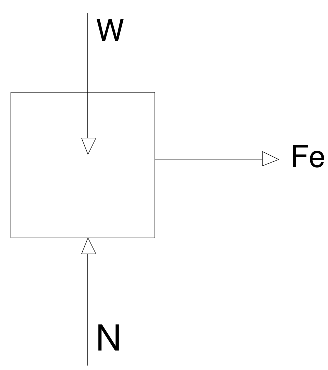
2).- Modelo discretizado para una de las bolas:



P5-17a

3).- Relaciones cinéticas:

a).- D.C.L.(ver figura P5-17b):



P5-17b

b).- $\sum F_Y = m\ddot{Y} \quad \rightarrow \quad -F_e = m\ddot{Y}$

$$-K_e\left(Y - \delta_{(t)}\right) = m\ddot{Y}$$

$$\ddot{Y} + \frac{K_e}{m} = \frac{K_e}{m}\delta_{(t)} \qquad \text{(Mov. Forzado no amortiguado)}$$

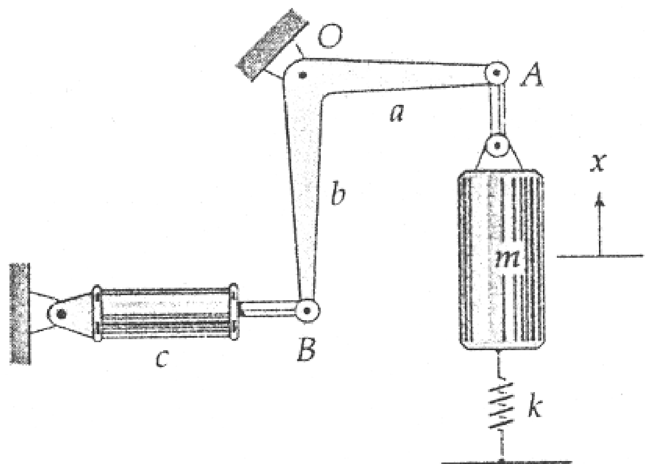
$$\ddot{Y} + \frac{500}{0.5} Y = \frac{500 * 0.003}{0.5} \, sen\ 25.133\, t$$

Donde:

$$\omega_n = 31.623 \ \text{ rad/seg}$$

$$Y_0 = \frac{0.003 K_e \big/ K_e}{1 - \left(\dfrac{\omega_*}{\omega_n}\right)^2} = \frac{0.003}{1 - 0.632} = 0.00815 \ \text{m} \quad \rightarrow \quad Y_0 = 8.15 \ \text{ mm}$$

5.18.- Para el sistema representado escribir su ecuación diferencial del movimiento en función de la variable X. Hallar la expresión del índice de amortiguamiento η en función de las constantes del sistema indicadas. Despreciar la masa de la palanca AB y suponer que se efectúan pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio representada.

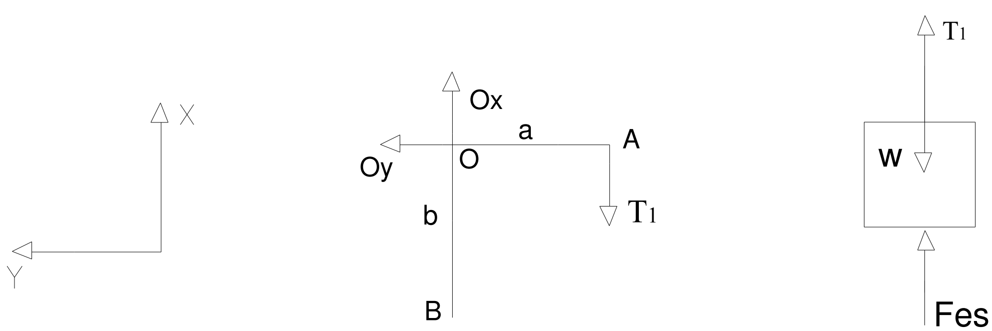


P-18

Solución

1).- D.C.L.:

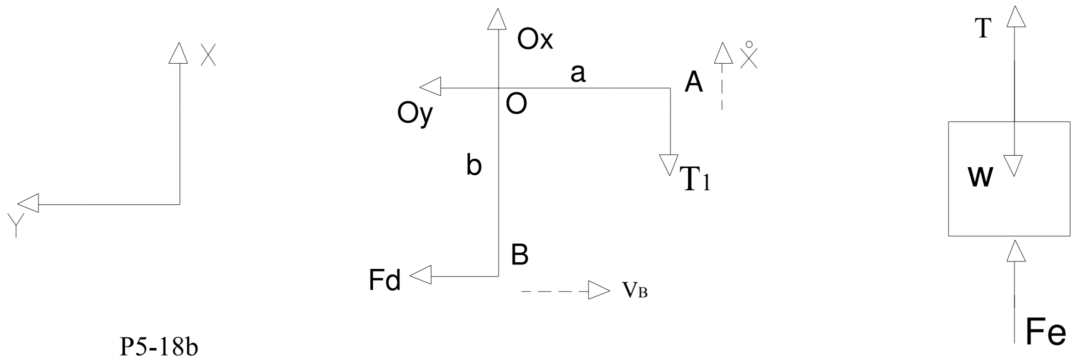
a).- Para los cuerpos en equilibrio estático:



(a) (b)

P5-18a

b).- Para los Cuerpos en movimientos, con pequeñas oscilaciones:



P5-18b (a) (b)

2).- Relaciones cinéticas:

a).- Para los cuerpos en equilibrio estático:

En (a):

$$\sum M_0 = 0 \quad \rightarrow \quad T_1 a = 0 \quad \rightarrow \quad T_1 = 0$$

En (b):

$$\sum F_X = 0 \quad \rightarrow \quad -mg + F_{es} = 0 \quad \rightarrow \quad K\delta_s - mg = 0 \qquad (1)$$

b).- Para los cuerpos en movimiento, con pequeñas oscilaciones:

En (a), $(m_{BA} \cong 0)$ y $\omega = \dfrac{\dot{X}}{a} \quad \Rightarrow \quad V_B = \dfrac{b\dot{X}}{a}$

$$\sum M_0 = 0 \quad \rightarrow \quad -F_d b - T\,a = 0 \quad \rightarrow \quad -C\left(\frac{b\dot{X}}{a}\right)b - T\,a = 0 \;\rightarrow\; T = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 C\dot{X} \qquad (2)$$

En (b):

$$\sum F_X = m\ddot{X} \;\rightarrow\; T - mg - K(X - \delta_s) = m\ddot{X} \;\rightarrow\; -\left(\frac{b}{a}\right)^2 C\dot{X} - mg - KX + K\delta_s = m\ddot{X}$$

$$\ddot{X} + \frac{b^2 C}{a^2 m}\dot{X} + \frac{K}{m}X = 0 \qquad \text{(Mov. libre amortiguado)}$$

2).- Cálculo de η:

$$2\eta\omega_n = \frac{b^2C}{a^2m} \quad\rightarrow\quad \eta = \frac{b^2C}{2a^2m\sqrt{\frac{K}{m}}} \quad\rightarrow\quad \eta = \frac{b^2C}{2a^2\sqrt{Km}}$$

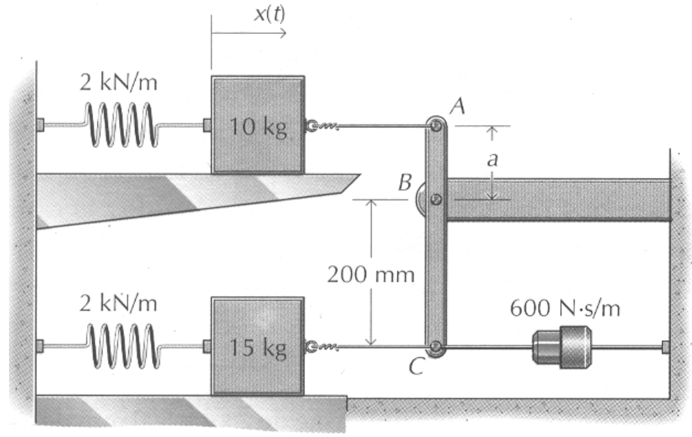
5-19.- Las dos masas de la figura se deslizan por sendas superficies horizontales exentas de rozamiento. En la posición de equilibrio, la barra ABC está vertical, siendo despreciable su masa. Si a = 100 mm y se supone oscilaciones de pequeña amplitud, determinar:

a).- La razón de amortiguamiento η.

b).- El tipo de movimiento (Subamortiguado, sobreamortiguado o críticamente amortiguado).

c).- La frecuencia y periodo del movimiento (Si procede).

d).- El valor de "a" que da amortiguamiento crítico.

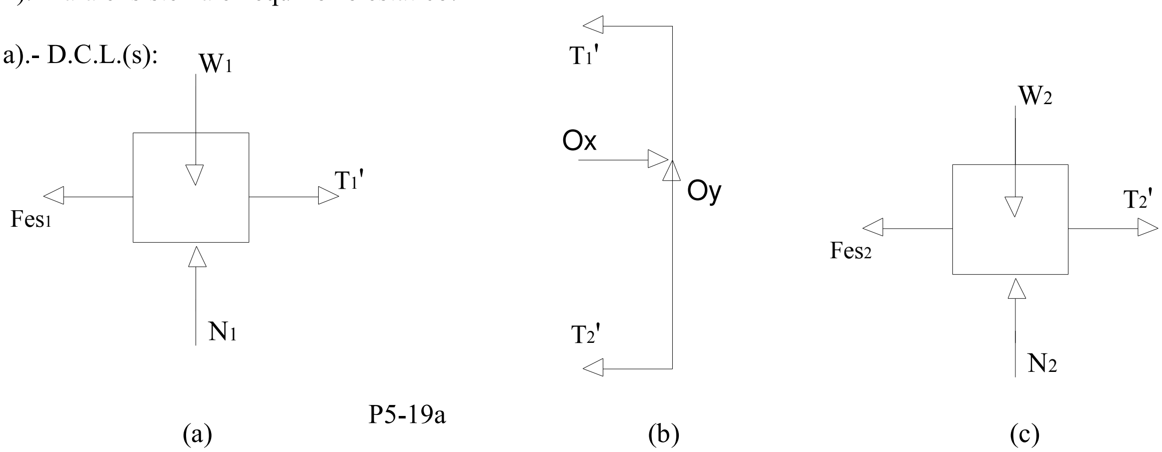


P5-19

Solución

1).- Para el sistema en equilibrio estático:

a).- D.C.L.(s):



P5-19a

b).- Relaciones cinéticas:

En (a):

$$\sum F_X = 0 \quad \rightarrow \quad T_1' = K\delta_{S1} \qquad (1)$$

En (b):

$$\sum M_B = 0 \quad \rightarrow \quad aT_1' = 0.2T_2' \quad \rightarrow T_1' = \frac{0.2}{a}T_2' \qquad (2)$$

En (c):

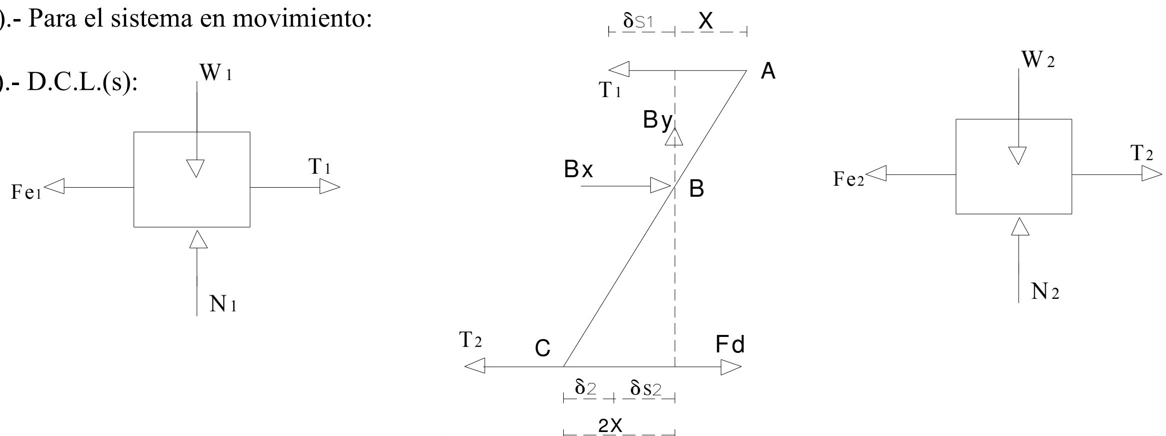
$$\sum F_X = 0 \quad \rightarrow \quad T_2' = K\delta_{S2} \qquad (3)$$

(1) y (3) en (2) :

$$K\delta_{S1} = \frac{0.2}{a}K\delta_{S2} \quad \rightarrow \quad \delta_{S2} = \frac{a}{0.2}\delta_{S1} \qquad (4)$$

2).- Para el sistema en movimiento:

a).- D.C.L.(s):



P5-19b

(a) (b) (b)

$$\delta_1 = X + \delta_{S1} \quad \text{y} \quad \delta_2 = 2X - \delta_{S2}$$

b).- Relaciones cinemáticas:

$$X_2 = \frac{0.2}{a}X \quad \rightarrow \quad \dot{X}_2 = \frac{0.2}{a}\dot{X} \quad y \quad \ddot{X}_2 = \frac{0.2}{a}\ddot{X}$$

c).- Relaciones cinéticas:

En (c):

$$\sum F_X = m_2\,\ddot{X}_2 \quad \rightarrow -F_{e2} - T_2 = m_2\ddot{X}_2 \quad \rightarrow \quad -K\left(2X - \frac{a}{0.2}\delta_{S1}\right) - T_2 = \frac{0.2}{a}m_2\ddot{X}$$

$$T_2 = -K\left(\frac{0.2}{a}X - \frac{a}{0.2}\delta_{S1}\right) - \frac{0.2}{a}m_2\ddot{X} \tag{5}$$

En (b):

$$\sum M_B = \overbrace{I_B}^{0}\alpha \quad \rightarrow \quad aT_1 + 0.2(F_d - T_2) = 0 \quad \rightarrow \quad T_1 = \frac{0.2}{a}(T_2 - F_d)$$

Si:

$$F_d = C\dot{X}_2 = \frac{0.2}{a}C\dot{X} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{0.2}{a}\left(T_2 - \frac{0.2}{a}C\dot{X}\right) \tag{6}$$

En (a):

$$\sum F_X = m_1\,\ddot{X} \quad \rightarrow \quad T_1 - F_{e1} = m_1\ddot{X} \tag{7}$$

(6) en (7):

$$\frac{0.2}{a}T_2 - \frac{0.04}{a^2}C\dot{X} - K(X + \delta_{S1}) = m_1\ddot{X} \tag{8}$$

(5) en (8):

$$\frac{-0.2}{a}\left[K\left(\frac{0.2X}{a} - \frac{a}{0.2}\delta_{S1}\right) + \frac{0.2}{a}m_2\ddot{X}\right] - \frac{0.04}{a^2}C\dot{X} - K(X + \delta_{S1}) = m_1\ddot{X}$$

$$\ddot{X}\left(m_1 + \frac{0.04}{a^2}m_2\right) + \frac{0.04}{a^2}C\dot{X} + \left(\frac{a^2 + 0.04}{a^2}\right)KX = 0$$

$$\ddot{X} + \frac{0.04\,C}{a^2\left(m_1 + \dfrac{0.04}{a^2}m_2\right)}\dot{X} + \frac{(a^2 + 0.04)K}{a^2\left(m_1 + \dfrac{0.04}{a^2}m_2\right)}X = 0 \tag{9}$$

3).- Para a = 0.1 m, reemplazando en (9):

$$\ddot{X} + 34.2857\dot{X} + 142.86X = 0$$

Donde:

$$\omega_n = 11.9523 \text{ rad/seg}$$

$$2\eta\,\omega_n = 34.2857$$

$$\eta = \frac{34.2857}{2*11.9523} = 1.434$$

Lo que nos dice, que es un movimiento sobreamortiguado, por lo que no tiene frecuencia ni periodo.

4).- Cálculo de "a" para el movimiento críticamente amortiguado (η = 1):

Luego:

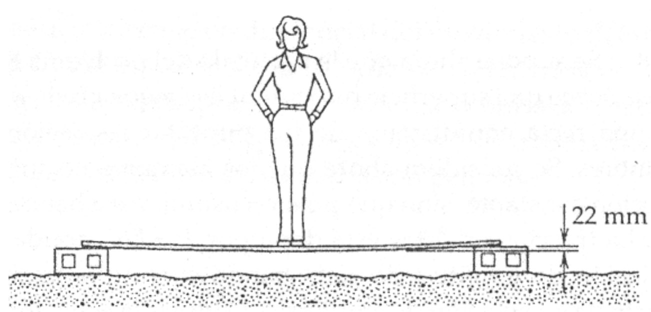
$$\frac{24}{10\,a^2 + 0.6} = 2*1*\sqrt{\frac{(a^2+0.04)*2000}{10\,a^2+0.6}} \quad \rightarrow \quad \frac{24^2}{10\,a^2+0.6} = 4\,(a^2+0.04)*2000$$

$$10a^4 + 0.6a^2 + 0.4a^2 + 0.024 = 0.072$$

$$a^4 + 0.1a^2 - 0.0048 = 0 \quad \rightarrow \quad a^2 = \frac{-0.1 \pm \sqrt{0.1^2 + 4*0.0048}}{2} = 0.03544$$

$$a = 0.1883 \text{ m ó } a = 188.3 \text{ mm.}$$

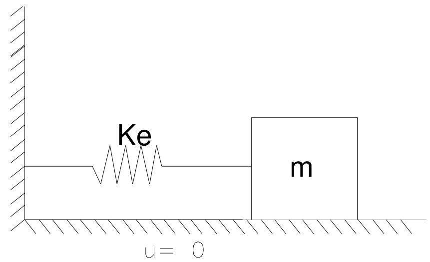
5-20.- Una mujer de 55 kg se halla de pie en el centro de un tabón apoyado por los extremos y produce una flecha de 22 mm en el centro. Si dobla levemente las rodillas con el objeto de provocar una vibración vertical, ¿cuál será la frecuencia natural f_n del movimiento? Se supondrá que el tablón responde elásticamente y se despreciará su relativa pequeña masa.



P5-20

Solución

1).- Discretizando el sistema (ver figura P5-20a):

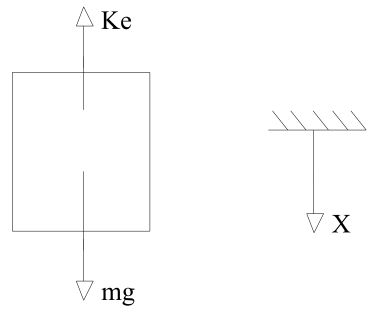


P5-20a

2).- Cálculo de K_e, cuando la mujer esta quieta (ver figura P5-20b):

$$\sum F_X = 0 \quad \rightarrow \quad mg = K_e \delta_s$$

$$K_e = \frac{55 * 9.81}{0.022} = 24\,525 \text{ N/m}$$

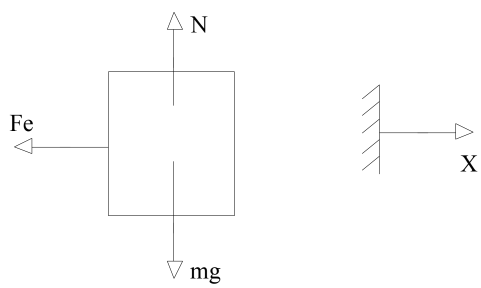


P5-20b

3).- Cuando el cuerpo se encuentra en movimiento:

a).- D.C.L.: (ver figura P5-20c)

b).- Relaciones cinéticas:



P5-20c

$$\sum F_X = m\,\ddot{X}$$

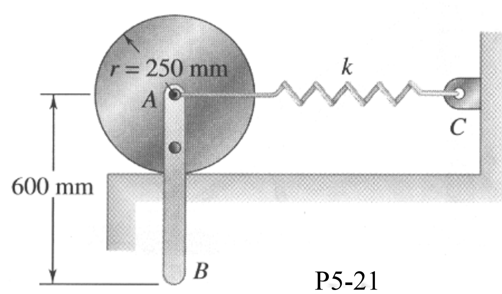
$$-K_e X = m\,\ddot{X} \quad \rightarrow \quad \ddot{X} + \frac{K_e}{m} X = 0$$

$$\ddot{X} + \frac{24\,525}{55} X = 0$$

Donde:

$$\omega_n = 21.1166 \text{ rad/seg} \quad \rightarrow \quad f_n = \frac{\omega_n}{2\,\pi} = 3.36 \text{ Hz}$$

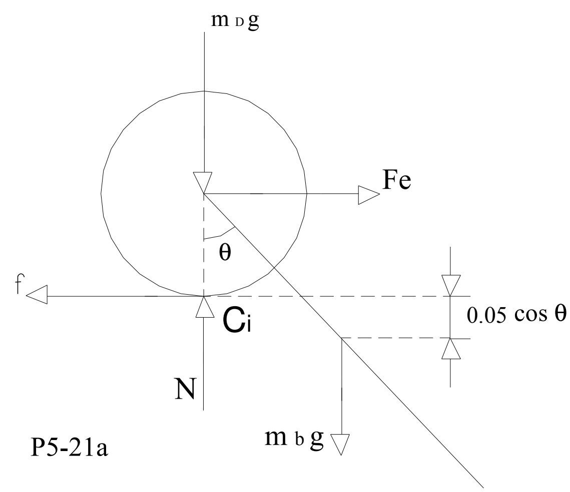
5-21.- Una varilla AB de 800 gr está atornillada a un disco de 1.2 kg. El centro A de éste, está sujeto a un muelle de constante K = 12 N/m cuyo otro extremo C está unido a una pared. Sabiendo que el disco rueda sin deslizar, hallar el periodo de las pequeñas oscilaciones.



P5-21

Solución

1).- D.C.L.:



P5-21a

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_{Ci} = I_{Ci}\ddot{\theta}$$

Si:

$$I_{Ci} = \left(\frac{1}{2}m_D r^2 + m_D r^2 + \frac{1}{12}m_b \ell^2 + m_b * 0.05^2\right) = 1.2 * 0.25^2\left(\frac{1}{2}+1\right) + 0.8\left(\frac{0.6^2}{12} + 0.05^2\right)$$

$$I_{Ci} = 0.1385 \text{ kg m}^2$$

Luego:

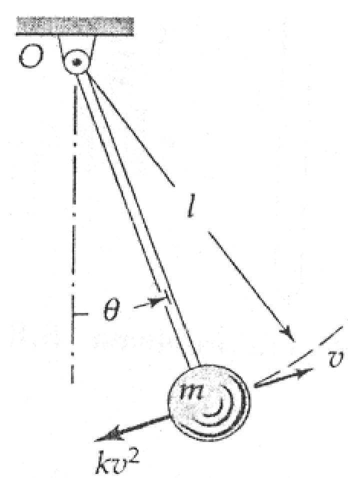
$$-m_b g \frac{\ell}{2}\overbrace{sen\,\theta}^{\theta} - K\,(r\,\theta)\,r = I_A\ddot{\theta} \quad \rightarrow \quad \left(-0.8 * 9.81 * 0.3 - 12 * 0.25^2\right)\theta = 0.1385\,\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + 22.414\,\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_n = 4.7344 \text{ rad/seg}$$

Luego:

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega_n} = 1.327 \text{ seg}$$

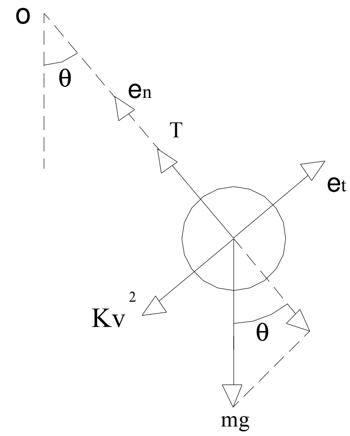
5-22.- La lenteja esférica del péndulo de la figura oscila en el seno de un fluido que le ejerce una fuerza resistente de la forma Kv^2, donde K es una constante y v es la velocidad de la lenteja. Si la masa de ésta es *m* y puede despreciarse la masa, resistencia de la varilla y el rozamiento en la suspensión, deducir la ecuación diferencial del movimiento del péndulo para pequeñas oscilaciones.



P5-22

Solución

1).- D.C.L.:



P5-22a

2).- Relaciones cinemáticas:

$$\bar{v} = \dot{\theta}\,\ell\,\bar{e}_t$$

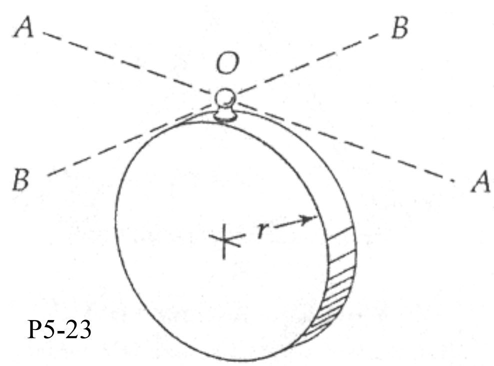
$$\bar{a} = \ddot{\theta}\,\ell\,\bar{e}_t + \dot{\theta}^2\ell\,\bar{e}_n$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_t = m\,a_t \quad \rightarrow \quad -mg\,\theta - K\left(\dot{\theta}\,\ell\right)^2 = m\,\ddot{\theta}\,\ell$$

$$\ddot{\theta} + \frac{K\,\ell}{m}\left(\dot{\theta}\right)\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\dot{\theta} = 0$$

5-23.- El disco uniforme cuelga de una rótula (no representada) que encaja en la pequeña bola O. Hallar el período del pequeño movimiento si el disco se balancea libremente alrededor: a) del eje A-A y b) del eje B-B. Despreciar el leve descentrado, la masa y el rozamiento de la bola.



P5-23

Solución

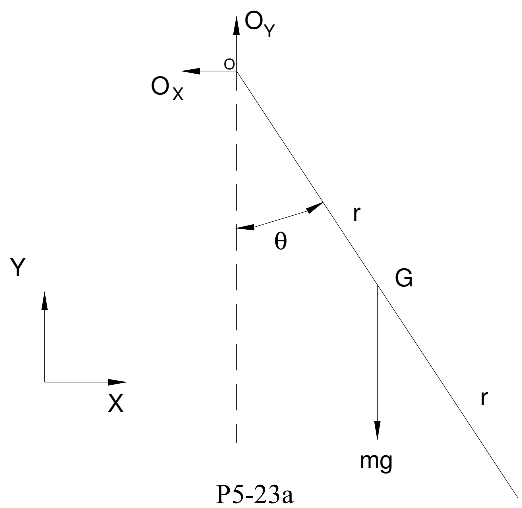
1).- Para el balanceo del disco alrededor del eje A-A:
a).- D.C.L (ver figura P5-23a).:

b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_O = I_O\ddot{\theta}$$

$$-mg\,r\,\theta = \left(\frac{1}{4}m\,r^2 + m\,r^2\right)\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{4g}{5\,r}\,\theta = 0 \quad \text{(M.A.S.)}$$



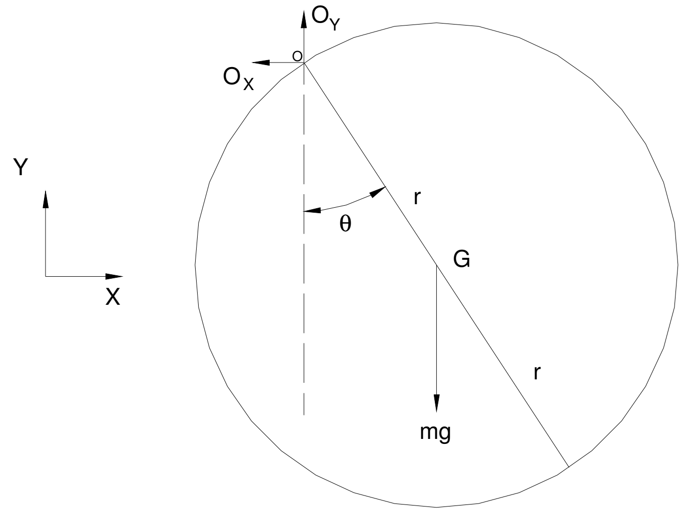
P5-23a

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{g}{5\,r}}$$ (Unid. de velocidad angular)

Luego:

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega_n} = \pi\sqrt{\frac{5\,r}{g}}$$ (Unid. de tiempo)

2).- Para el balanceo del disco alrededor del eje B-B:



P5-23b

a).- D.C.L. (ver figura P5-23b):

b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_O = I_O\ddot{\theta}$$

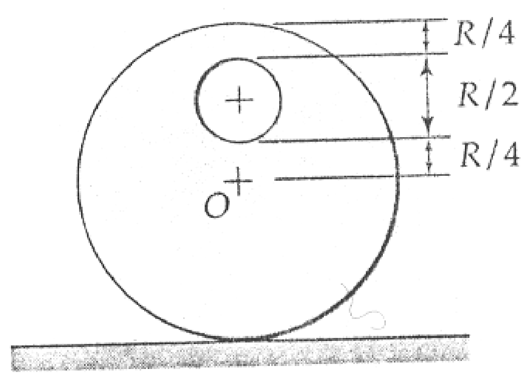
$$-mg\,r\,\theta = \left(\frac{1}{2}m\,r^2 + m\,r^2\right)\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3\,r}\theta = 0 \quad \text{(M.A.S.)} \quad \rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{2g}{3\,r}}$$ (Unid. de velocidad angular)

Luego:

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega_n} = 2\,\pi\sqrt{\frac{3\,r}{2g}}$$ (Unid. de tiempo)

5-24.- En el cilindro de radio R se práctica, como se muestra, un orificio de radio R/4 para formar un cuerpo de masa *m*. Si éste rueda sin deslizamiento por la superficie horizontal, hallar el período de sus pequeñas oscilaciones.



P5-24

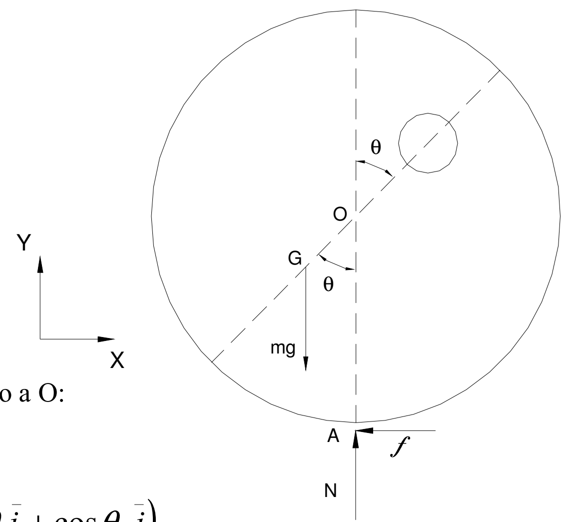
Solución

1).- D.C.L.:

$$\rho = \frac{m_t}{A} = \frac{m_t}{\pi\, R^2}$$

$$m_1 = \rho\, A_1 = \frac{m_t}{\pi\, R^2} * \pi \left(\frac{R}{4}\right)^2$$

$$m_1 = \frac{m_t}{16}$$



5-24a

2).- Cálculo de la posición del centro de masa respecto a O:

$$\bar{r}_G = \frac{-\frac{R}{2}\left(sen\,\theta\,\bar{i} + \cos\theta\,\bar{j}\right)\frac{m_t}{16}}{m_t\left(\frac{16-1}{16}\right)} = \frac{-R}{30}\left(sen\,\theta\,\bar{i} + \cos\theta\,\bar{j}\right)$$

3).- Cálculo del momento de inercia de masa, respecto a A:

$$I_O = \frac{1}{2}m_t R^2 - \frac{m_t}{16}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{R}{4}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right] = m_t R^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\left(\frac{1+8}{32}\right)\right) = 0.482\; m_t R^2$$

$$I_G = I_O - m_t\left(1 - \frac{1}{16}\right)\left(\frac{R}{30}\right)^2 = I_O - \frac{15}{16}m_t\left(\frac{R}{30}\right)^2$$

$$I_A = I_G + \frac{15}{16}m_t\left(R - \frac{R}{30}\right)^2$$

$$I_A = I_O - \frac{15}{16}m_t\left(\frac{R}{30}\right)^2 + \frac{15}{16}m_t R^2 + \frac{15}{16}m_t\left(\frac{R}{30}\right)^2 - \frac{15}{8}m_t R\left(\frac{R}{30}\right)$$

$$I_A = 0.482\; m_t R^2 + \frac{15}{16}m_t R^2 - \frac{15}{240}m_t R^2 = 1.357\; m_t R^2$$

4).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_A = \dot{H}_A \quad \rightarrow \quad \frac{15}{16} m_t g * \frac{R}{30} sen\,\theta = -I_A\ddot{\theta} = -1.357\ m_t R^2\ddot{\theta}$$

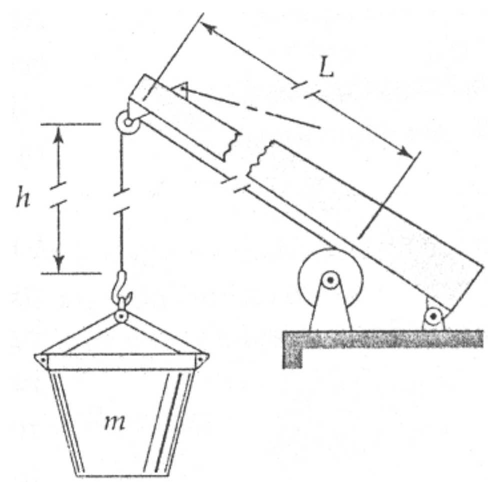
Para $\theta \cong 0$:

$$\ddot{\theta} + \frac{15\ g}{16*30*1.357\ R}\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{0.023\ g}{R}\theta = 0$$

Donde:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{R}{0.023\ g}} = 41.43\sqrt{\frac{R}{g}} \quad \text{(Unid. de tiempo)}$$

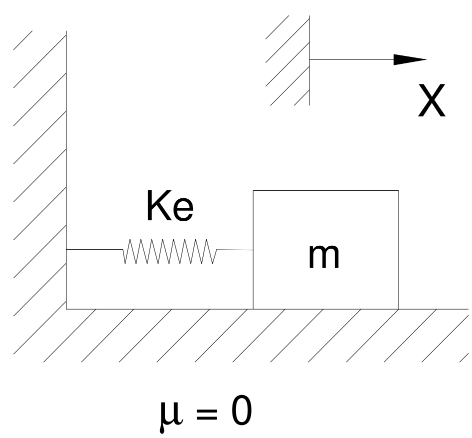
5-25.- La tolva de cemento tiene una masa total *m* = 5500 kg y está siendo descendida a 1.2 m/seg cuando el tambor izador se detiene repentinamente. Hallar el desplazamiento descendiente adicional Δh de la tolva y la frecuencia f_n de la consiguiente vibración de la tolva para h = 12 m. La longitud del cable de acero de 25 mm de diámetro es L = 15 m entre la polea y el tambor. El módulo elástico del acero es E = 200 GPa. (Recuérdese que E = σ/ε, donde el esfuerzo σ es fuerza por unidad de superficie y la deformación ε es el alargamiento elástico por unidad de longitud).



P5-25

Solución

1).- Se tiene el modelo discretizado (ver figura P5-2a):



P5-25a

2).- Relaciones cinéticas.- Como la única fuerza que produce trabajo en el modelo discretizado es la fuerza elástica, la energía mecánica se conserva.

Para una posición cualquiera:

$$E_{M\ X} = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}K_e X^2 \rightarrow cte$$

Derivándole con respecto al tiempo:

$$\frac{1}{2}*2\ \dot{X}\ \ddot{X}\ m+\frac{1}{2}*2\ X\ \dot{X}\ K_e=0$$

$$\ddot{X}+\frac{K_e}{m}X=0 \quad \text{(M.A.S.)} \tag{1}$$

a).- Cálculo del K_e, para los resortes en serie:

$$K_e=\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}$$

Si:

$$\delta=\frac{P\ L}{E\ A} \quad \rightarrow \quad P=\left(\frac{E\ A}{L}\right)\delta \quad \rightarrow \quad K_1=\frac{E\ A}{L} \quad \text{y} \quad K_2=\frac{E\ A}{h}$$

$$K_e=\frac{(E\ A)^2 / L*h}{E\ A\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{h}\right)}=\frac{E\ A}{L+h}=\frac{2x10^{11}*\pi\left(0.025/2\right)^2}{27}=3\ 636\ 102.602 \quad \text{N/m}$$

b).- Cálculo de la frecuencia circular natural y la frecuencia natural:

$$\omega_n=\sqrt{\frac{K_e}{m}}=25.712 \quad \text{rad/seg}$$

$$f_n=\frac{\omega_n}{2\ \pi}=4.092 \quad \text{Hz}$$

c).- Solución de la ecuación diferencial (1):

$$X_{(t)}=c\ sen\left(\omega_n t+\phi\right) \tag{2}$$

$$\dot{X}_{(t)}=c\ \omega_n\cos\left(\omega_n t+\phi\right) \tag{3}$$

Para, $t=0$, $X=0$, $\dot{X}=1.2$ m/seg:

En (2):

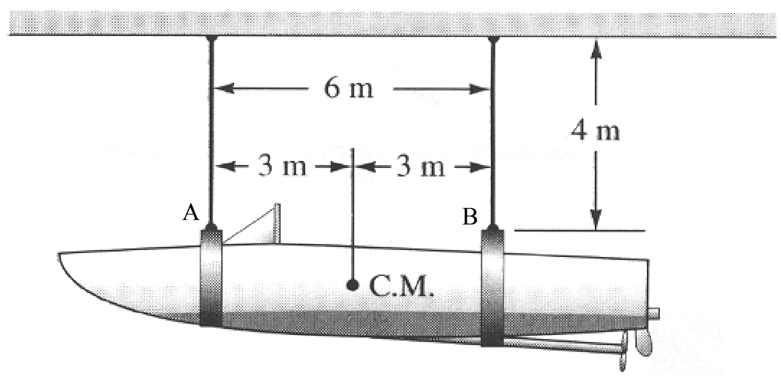
$$0 = c\ sen\ \phi \quad \rightarrow \quad \phi = \pi$$

En (3):

$$12 = c\ \omega_n \cos \pi \quad \rightarrow \quad c = \Delta h = \frac{1.2}{\omega_n} = \frac{1.2}{25.712} = 0.04667 \text{ m}$$

$$\Delta h = 46.7 \text{ mm}$$

5-26.- ¿Cuál es el radio de giro de la lancha rápida respecto a un eje que pase por su centro de masa, si se sabe que el bote oscilará alrededor de su eje vertical una vez por segundo? La masa del bote es de 5500 kg.

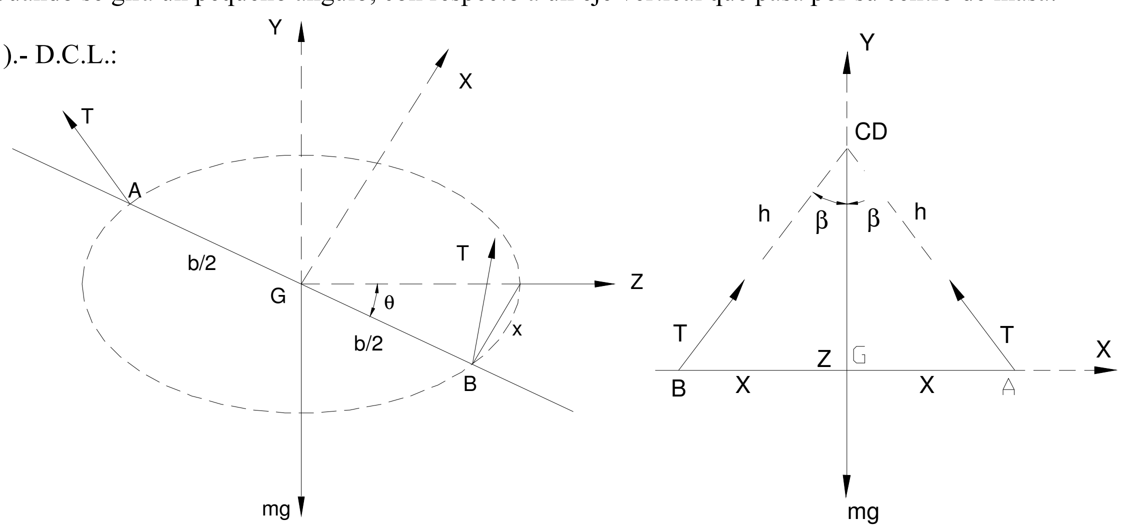


P5-26

Solución

Cuando se gira un pequeño ángulo, con respecto a un eje vertical que pasa por su centro de masa:

1).- D.C.L.:



P5-26a

Si:

$X = 4\ sen\ \beta$ y $X = 3\ sen\ \theta$

Luego:

$$4\ sen\ \beta = 3\ sen\ \theta \quad \rightarrow \quad sen\ \beta = \frac{3}{4}\ sen\ \theta$$

Para pequeños ángulos:

$$\beta = \frac{3}{4}\ \theta$$

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad T \cos\beta + T\cos\beta = mg \quad \rightarrow \quad T = \frac{mg}{2} \tag{1}$$

$$\sum M_G = I_G\ddot{\theta} \quad \rightarrow \quad T\ sen\ \beta * 3\cos\theta + T\ sen\ \beta * 3\cos\theta = -m\ K_G^2\ddot{\theta}$$

$$2\ T\ \beta * 3 = -m\ K_G^2\ddot{\theta} \tag{2}$$

(1) en (2):

$$2 * \frac{mg}{2} * \frac{3}{4}\theta * 3 = -m\ K_G^2\ddot{\theta} \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{9\ g}{4\ K_G^2}\theta = 0 \quad \text{(M .A.S.)}$$

Donde:

$$\omega_n^2 = \frac{9\ g}{4\ K_G^2} \tag{3}$$

Si:

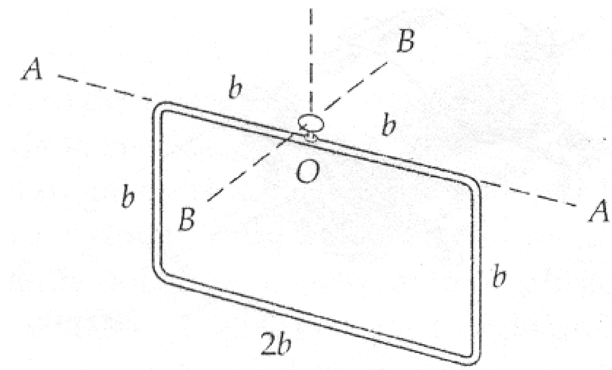
$$f_n = 1 = \frac{\omega_n}{2\ \pi} \quad \rightarrow \quad \omega_n^2 = 4\ \pi^2 \tag{4}$$

(3)=(4):

$$4\ \pi^2 = \frac{9\ g}{4\ K_G^2} \quad \rightarrow \quad K_G = \frac{3}{4\ \pi}\sqrt{g} = \frac{3}{4\ \pi}\sqrt{9.81} = 0.74773 \text{ m}$$

$K_G = 0.748$ m

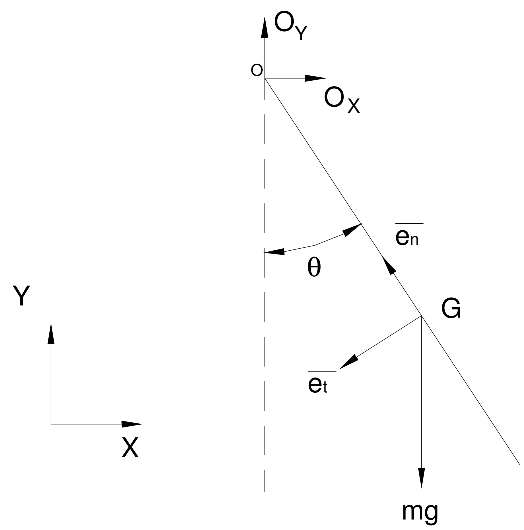
5-27.- El marco rectangular está construido de varillas delgadas uniformes y cuelga de una rótula (no representada) que encaja en la pequeña bola situada en O. Si se hace que el rectángulo se balancee alrededor del eje A-A, hallar la frecuencia circular natural de las pequeñas oscilaciones. Despreciar el leve descentrado, la masa y el rozamiento de la bola.



P5-27

Solución

1).- D.C.L. (representando al cuerpo en el plano en la figura P5-27a):



P5-27a

Si, ρ es la densidad lineal

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_O = \sum I_{G\,i}\alpha_i + \sum m_i a_{G\,i} d_i$$

Donde:

$$\sum M_O = -[2\rho\, b + 2\rho\,(2b)]\, g\, \frac{b}{2} sen\,\theta$$

$$\sum M_O = -3\rho\, g\, b^2 sen\,\theta$$

$$\sum I_{G\,i}\alpha_i = 2\left(\frac{1}{12}\rho\, b\, b^2\right)\ddot{\theta} = \frac{\rho\, b^3}{6}\,\ddot{\theta}$$

$$\sum m_i a_{G\,i} d_i = 2\left(\rho\, b * \ddot{\theta}\frac{b}{2} * \frac{b}{2}\right) + \rho\,(2b) * b * b\ddot{\theta} = \rho\, b^3\ddot{\theta}\left(\frac{1}{2}+2\right) = \frac{5}{2}\rho\, b^3\ddot{\theta}$$

Luego:

$$-3\rho\, g\, b^2 sen\,\theta = \rho\, b^3\ddot{\theta}\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{2}\right) = \frac{8}{3}\rho\, b^3\ddot{\theta}$$

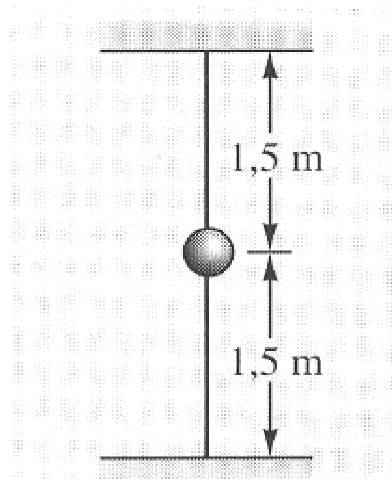
Para ángulos pequeños:

$$\ddot{\theta}+\frac{9\,g}{8\,b}\theta=0 \quad \text{(M.A.S.)}$$

Donde:

$$\omega_n=\sqrt{\frac{9\,g}{8\,b}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{2\,b}} \quad \text{(Unid. de velocidad angular)}$$

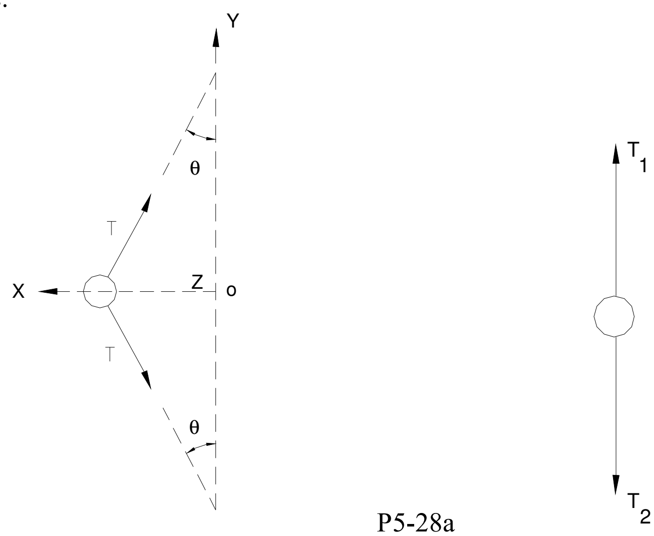
5-28.- Una pequeña esfera de 2.5 kg de masa se sostiene mediante dos cordones elásticos y tensos sobre un plano sin rozamiento. Si se necesita una fuerza de 225 N para producir un alargamiento de 25 mm de cada cordón, ¿cuál será la frecuencia circular natural para pequeñas oscilaciones del cuerpo en dirección transversal? Además determinar la frecuencia circular natural del peso en la dirección de los cordones, también para pequeñas oscilaciones. Ignorar la masa de los cordones. La fuerza de tracción en los cordones en la configuración que se muestra es de 450 N.



P5-28

Solución

1).- D.C.L., para el cuerpo en movimientos transversal y en la dirección de los cordones:



P5-28a

(a) (b)

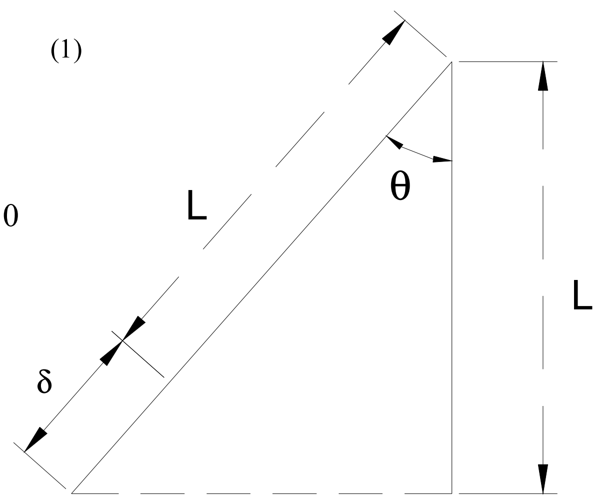
2).- Cálculo del K_e, de la condición del problema:

$$225 = K_e * 0.025 \quad \rightarrow \quad K_e = \frac{225}{0.025} = 9\,000 \ \text{ N/m}$$

3).- Para el movimiento transversal:

En (a), la segunda Ley de Newton:

$$\sum F_X = m\,\ddot{X} \quad \rightarrow \quad -2\,T\,sen\,\theta = m\,\ddot{X} \qquad (1)$$



P5-28b

Para pequeños ángulos:

$$m\,\ddot{X} + 2\,T\,\theta = 0 \quad \rightarrow \quad m\,\ddot{X} + 2\,T\left(\frac{X}{1.5}\right) = 0$$

Si:

$$T = K_e\left(\delta + \delta_s\right)$$

$$\delta_s = \frac{450}{K_e} = \frac{450}{9\,000} = 0.05 \ \text{ m}$$

$$\frac{L+\delta}{L} = \sec\theta \quad \rightarrow \quad \delta = L\left(\sec\theta - 1\right)$$

Para ángulos pequeños:

$$\delta = 0 \quad \rightarrow \quad T = 0.05\,K_e$$

Luego, en (1):

$$2.5\,\ddot{X} + \frac{2}{1.5} * 0.05 * 9\,000\,X = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{X} + 240\,X = 0 \ \text{ (M.A.S.)}$$

Donde:

$$\omega_n = \sqrt{240} = 15.492 \ \text{ rad/seg}$$

4).- Para el movimiento en la dirección de los cordones:

En (b), la segunda Ley de Newton:

$$\sum F_Y = m\,\ddot{Y} \quad \rightarrow \quad T_1 - T_2 = m\,\ddot{Y}$$

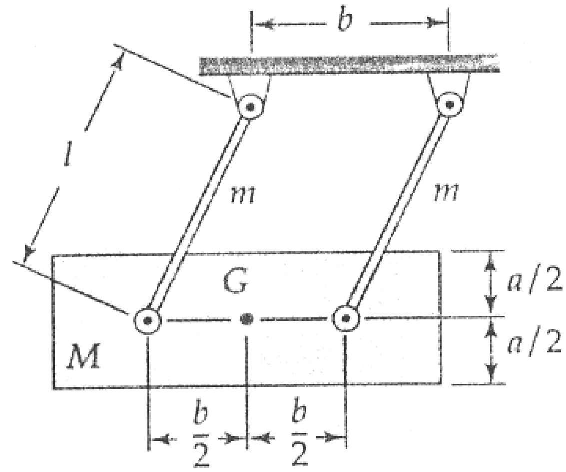
$$K_e(\delta_s - Y) - K_e(\delta_s + Y) = m\,\ddot{Y} \quad \rightarrow \quad -2\,K_e\,Y = m\,\ddot{Y}$$

$$\ddot{Y} + \frac{2*9\,000}{2.5}\,Y = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{Y} + 7200\,Y = 0 \quad \text{(M.A.S.)}$$

Donde:

$$\omega_n = \sqrt{7\,200} = 84.853 \ \text{ rad/seg}$$

5-29.- El Bloque de masa M está suspendida mediante las dos varillas delgadas uniformes de masa *m* cada una. Hallar la pulsación natural ω_n de las pequeñas oscilaciones del sistema.

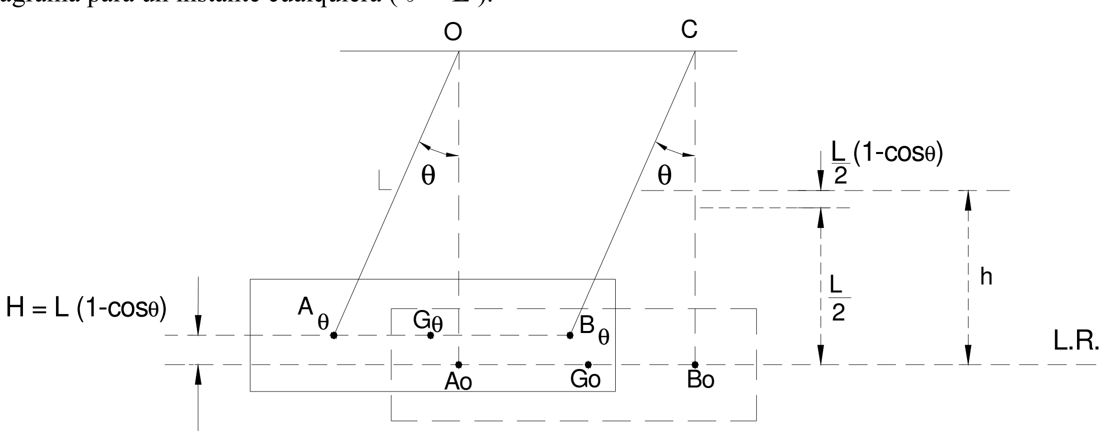


P5-29

Solución

Las únicas fuerzas que producen trabajo son los pesos, por lo que la energía mecánica se conserva.

1).- Diagrama para un instante cualquiera ($\ell = L$):



P5-29a

2).- Por conservación de la energía mecánica, si las barras OA, BC tienen movimiento alrededor de ejes fijos y el bloque en movimiento de traslación.

a).- Energía mecánica para un θ (pequeña) cualquiera:

$$U_\theta = 2\ mg\ h + MgH = 2\ mg\left[\frac{\ell}{2}(1-\cos\theta)+\frac{\ell}{2}\right] + Mg\ \ell\ (1-\cos\theta)$$

$$U_\theta = mg\ [\ell\ (1-\cos\theta)+\ell] + Mg\ \ell\ (1-\cos\theta)$$

$$E_{K\,\theta} = 2\left(\frac{1}{2}*\frac{1}{3}m\ \ell^2\dot{\theta}^2\right)+\frac{1}{2}M\ (\ell\ \dot{\theta})^2 = \dot{\theta}^2\ell^2\left(\frac{1}{3}m+\frac{1}{2}M\right)$$

$$E_{M\,\theta} = mg\ \ell + g\ \ell\ (1-\cos\theta)\,(M+m)+\dot{\theta}^2\ell^2\left(\frac{M}{2}+\frac{m}{3}\right) \quad \rightarrow \quad cte \qquad (1)$$

b).- Derivando (1) respecto al tiempo:

$$0 = \ell\ (M+m)\ g\ sen\ \theta\ \dot{\theta} + \ell^2\left(\frac{M}{2}+\frac{m}{3}\right)*2\ \dot{\theta}\ \ddot{\theta}$$

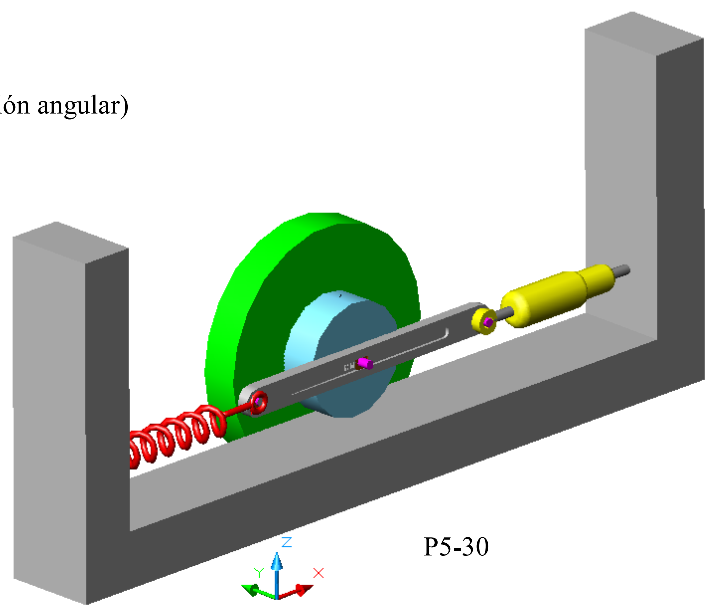
Para ángulos pequeños:

$$\ddot{\theta}\ \ell\ (M+\tfrac{2}{3}m)+g\ (M+m)\,\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\left(\frac{M+m}{M+\frac{2}{3}m}\right)\theta = 0 \quad \text{(M.A.S.)}$$

Donde:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\ell}\left(\frac{M+m}{M+\frac{2}{3}m}\right)} \quad \text{(Unid. de aceleración angular)}$$

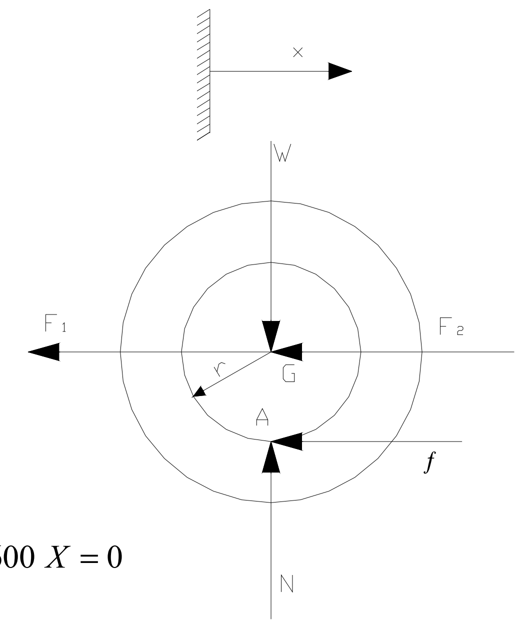
5-30.- Calcular el índice de amortiguamiento η del sistema representado, si la masa y el radio de giro del cilindro escalonado son m = 9 kg y K_G = 140 mm, la constante del resorte es K = 2.6 KN/m y el coeficiente de amortiguamiento del cilindro hidráulico es C = 30 N-seg/m. El cilindro rueda sin deslizamiento sobre su radio r = 150 mm y el resorte resiste tanto a la tracción como a la compresión así como el eje del cilindro está fijo respecto a la barra.



P5-30

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P5-30a):



P5-30a

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_A \bar{k} = \dot{H}_A \bar{k} + \overbrace{\rho_{AG}\bar{j}\ x\ \omega^2 r\ \bar{j}}^{0} = I_A \alpha\ \bar{k}$$

$$-K\ X\ r - C\ \dot{X}\ r = \left(m\ K_G^2 + m\ r^2\right)\frac{\ddot{X}}{r}$$

$$\ddot{X} * 9\left(0.14^2 + 0.15^2\right) + 0.15^2 * 30\ \dot{X} + 0.15^2 * 2\ 600\ X = 0$$

$$\ddot{X} + 1.781\ \dot{X} + 154.39\ X = 0 \qquad \text{(Mov. libre amortiguado)}$$

Donde:

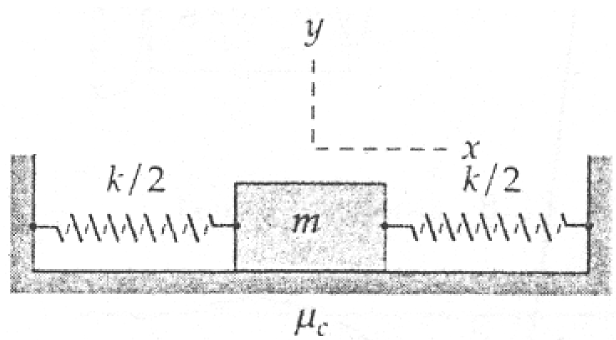
$$m_{ef} = 1,\ \ C_{ef} = 1.781,\ \ K_{ef} = 154.39\ \text{ y } \omega_n = 12.425 \ \text{rad/seg}$$

Luego:

$$2\ \eta\ \omega_n = 1.781 \quad \rightarrow \quad \eta = \frac{1.781}{2 * 12.425} = 0.07167$$

$$\eta = 0.0717$$

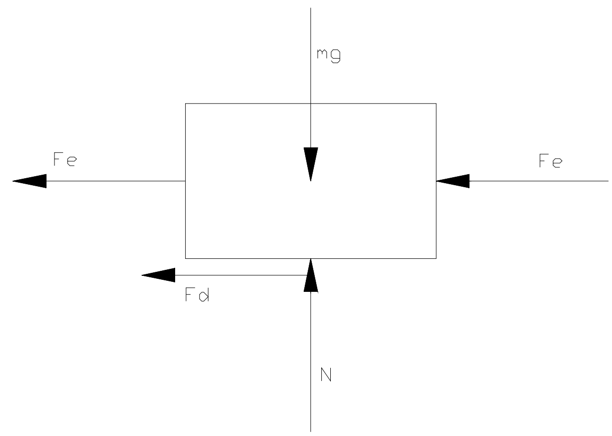
5-31.- Estudiar el caso de amortiguamiento de Coulomb para el bloque de la figura, en la que el coeficiente de rozamiento cinético μ_c y cada resorte posee una rigidez K/2. El bloque se separa una distancia X_0 de la posición neutra y luego se suelta. Encontrar y resolver la ecuación diferencial del movimiento. Representar gráficamente la oscilación resultante e indicar la velocidad de decrecimiento "r" de la amplitud por unidad de tiempo.



P5-31

Solución

1).- D.C.L.:



P5-31a

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m\,\ddot{X} \quad \rightarrow \quad -2\,F_e - F_d = m\,\ddot{X}$$

$$\ddot{X} + \frac{C_e}{m}\dot{X} + \frac{2\left(\frac{K}{2}\right)}{m} = 0$$

$$\ddot{X} + \frac{C_e}{m}\dot{X} + \frac{K}{m} = 0 \quad \text{(Mov. libre amortiguado)}$$

Donde:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}\ , \quad \omega' = \omega_n\sqrt{1-\eta^2} \quad \text{y} \quad \eta = \frac{C_e}{2\,\omega_n m}$$

La solución de la ecuación diferencial sería:

$$X_{(t)} = e^{-\eta\,\omega_n t}\left(C_1 sen\ \omega' t + C_2 \cos\omega' t\right) \tag{1}$$

$$\dot{X}_{(t)} = -\eta\ \omega_n e^{-\eta\,\omega_n t}\left(C_1 sen\ \omega' t + C_2 \cos\omega' t\right) + e^{-\eta\,\omega_n t}\left(C_1\omega'\cos\omega' t - C_2\omega'\,sen\ \omega' t\right) \tag{2}$$

Para, t = 0 , $X = X_0$ y $\dot{X} = 0$:

En (1):

$$X_0 = C_2$$

En (2):

$$0 = -\eta\ \omega_n X_0 + C_1\omega' \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{\eta\ X_0\omega_n}{\omega'} = \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}X_0$$

Luego:

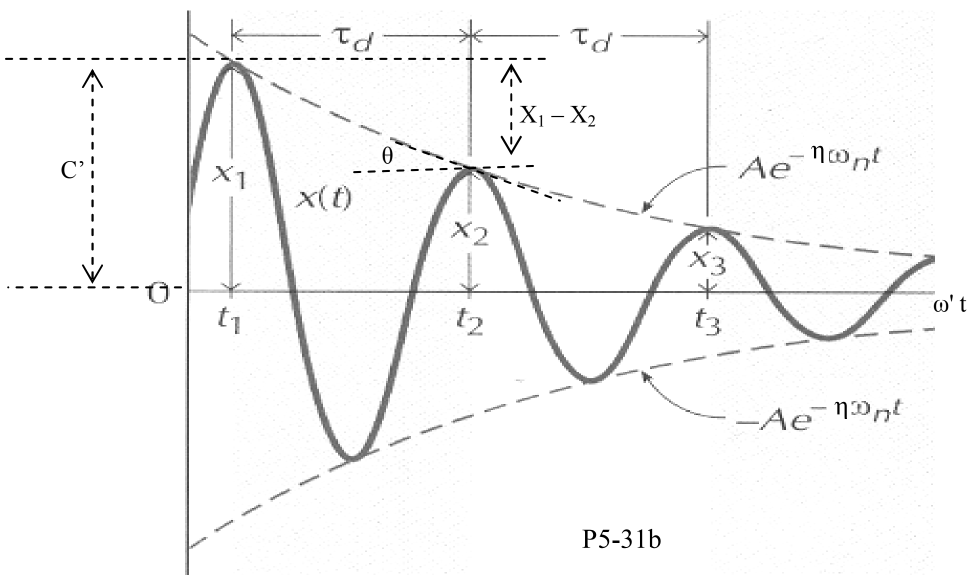
$$X_{(t)} = e^{-\eta\,\omega_n t}\left(\frac{\eta}{1-\eta^2}\,X_0 sen\;\omega' t + X_0\cos\omega' t\right)$$

Si:

$$C' = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \left(\sqrt{\frac{\eta^2}{1-\eta^2}+1}\right)X_0 = \frac{X_0}{\sqrt{1-\eta^2}} \qquad \text{y} \qquad \phi' = tg^{-1}\left(\frac{C_2}{C_1}\right) = tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}\right)$$

$$\therefore \quad X_{(t)} = \frac{X_0}{\sqrt{1-\eta^2}}\,e^{-\eta\,\omega' t}\,sen\left(\omega' t + \phi'\right)$$

3).- Determinación de la razón de caída:



P5-31b

Para la determinación de la razón de caída en el amortiguamiento de Coulomb, recurrimos a igualar el trabajo realizado y el cambio de energía cinética, escogiendo un medio ciclo, que arranca de la posición extrema con velocidad igual a cero y amplitud X_1, por lo que el cambio de energía cinética será igual a cero, luego también el trabajo lo será.

$$\frac{1}{2}K\left(X_1^2 - X_{-1}^2\right) - F_d\left(X_1 + X_{-1}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}K\left(X_1 - X_{-1}\right) = F_d$$

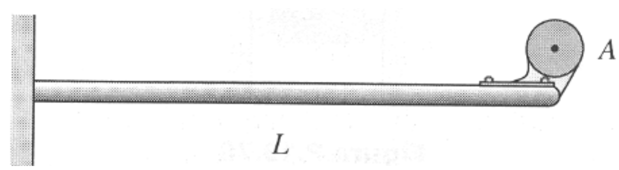
Repitiendo este procedimiento, para el próximo medio ciclo, se encuentra un ulterior decrecimiento de la amplitud $2F_d/K$, así la caída de la amplitud por ciclo es constante e igual a:

$$X_1 - X_2 = \frac{4\,F_d}{K} \quad \text{y} \quad tg\theta = \frac{X_1 - X_2}{T} = \frac{dA_m}{dt} = r$$

Luego:

$$r = \frac{4\,F_d}{K\,t} = \frac{4\,\mu_c mg}{K} * \frac{\omega'}{2\,\pi} \quad \rightarrow \quad r = \frac{2\,\mu_c g}{\pi}\sqrt{\frac{m}{K}}$$

5-32.- Una viga ménsula de longitud L tiene un motor eléctrico A de 100 N de peso fijado en su extremo libre. Dicho extremo desciende 12 mm cuando se fija el motor. Si el centro de masa del rotor está a una distancia de 2 mm del eje de rotación del mismo, ¿cuál será la amplitud de vibración del motor cuando éste esté girando a 1750 RPM?. El rotor pesa 40 N. Ignorar la masa de la viga y la fricción molecular en está.



P5-32

Solución

1).- Cálculo del K_e y de la fuerza perturbadora sinusoidal:

$$K_e = \frac{100}{0.12} = 8\,333.33 \quad \text{N/m}$$

Si:

$$\omega_* = 1750 * \frac{\pi}{30} = 183.26 \quad \text{rad/seg}$$

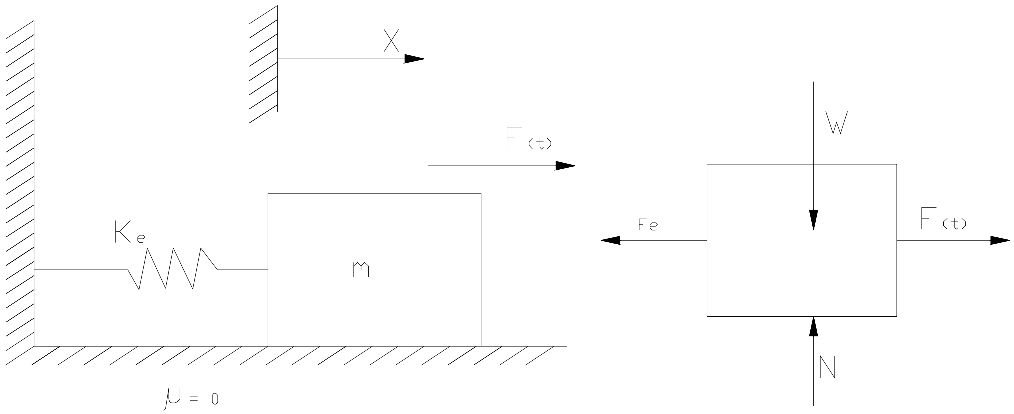
$$F_0 = m\,r\,a_{G\,n} = \frac{40}{9.81} * 0.002 * 183.26^2 = 273.877 \quad \text{N}$$

Luego:

$$F_{(t)} = 273.877\ sen\,183.26\,t$$

2).- Para el motor en funcionamiento:

a).- Modelo discretizado y D.C.L. (ver figura P5-32a):



P5-32a

b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m\,\ddot{X} \quad \rightarrow \quad -K_e X + F_{(t)} = m\,\ddot{X} \quad \rightarrow \quad \ddot{X} + \frac{K_e}{m}X = \frac{F_{(t)}}{m}$$

$$\ddot{X} + \frac{8\,333.33}{10.193}X = \frac{273.877}{10.193}\,sen\,183.26\,t \quad \rightarrow \quad \ddot{X} + 817.5\,X = 26.87\,sen\,183.26\,t$$

Donde:

$\omega_n = 28.59$ rad/seg

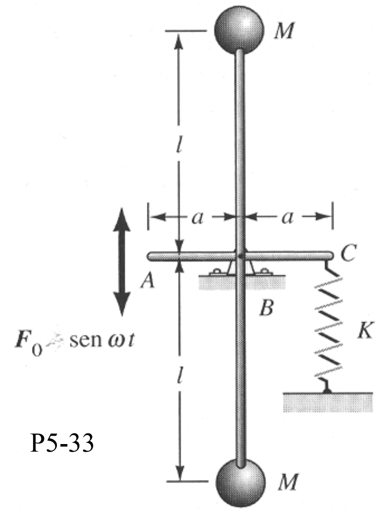
Luego:

$$X_0 = \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega_*^2} = \frac{26.87}{817.5 - 183.26^2} = -8.2x10^{-4} \text{ m}$$

$X_0 = -0.82$ mm

$\omega_* >> \omega_n$ La masa permanece esencialmente estacionaria, debido a su inercia (no puede reaccionar con suficiente rapidez), además $\dfrac{X_0}{\delta_0}$ es negativa y la oscilación está en oposición de fase (desfasado 180°) con la fuerza.

5-33.- Dos esferas de M = 2 kg de masa cada una están soldadas a una barra ligera que está articulada en el punto B. Una segunda barra ligera AC está soldada a la anterior. Se aplica una perturbación en el punto A igual a $F = F_0$ sen ωt. En el otro extremo C, se encuentra un muelle recuperador que cuando AC está horizontal no presenta deformación. ¿Cuál es el ángulo de rotación del sistema 10 seg después de la aplicación de la carga sinusoidal? El sistema está estacionario en el instante t = 0. Tomar: ω = 13 rad/seg, ℓ = 300 mm, K = 7 N/m, F_0 = 10 N y a = 100 mm.

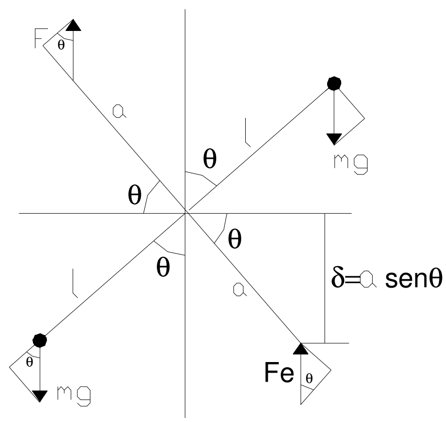


P5-33

Solución

1).- D.C.L.:

$$\ell = l$$



P5-33a

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_B = \dot{H}_{OZ}$$

$$-F\overbrace{\cos\theta}^{1} + F_e\overbrace{\cos\theta}^{1} - Mg\ sen\,\theta + Mg\ sen\,\theta = -2M\ \ell^2\ddot{\theta}$$

$$2M\ \ell^2\ddot{\theta} + K\,(a\,\theta)\,a = a\ F_0 sen\ \omega\, t \quad \rightarrow \quad 2*2*0.3^2\ddot{\theta} + 7\ 000*0.1^2\theta = 0.1*10\ sen\,13\,t$$

$$0.36\,\ddot{\theta} + 70\,\theta = sen\,13\,t$$

$$\ddot{\theta} + 194.444\,\theta = 2.7778\ sen\,13\,t$$ (Mov. forzado no amortiguado) (1)

Donde:

$\omega_n = 13.9443$ rad/seg, $m_{ef} = 1$ kg, $F_{0ef} = 2.7778$ N, $K_{ef} = 194.444$ N/m y $\omega_* = 13$ rad/seg

Solución de la ecuación diferencial (1):

$$\theta_{(t)} = \theta_P + \theta_C$$

a).- Solución particular:

$$\theta_P = D\ sen\ 13\ t$$

Si:

$$D = \theta_0 = \frac{F_{0\,ef} / K_{ef}}{1 - \left(\frac{\omega_*}{\omega_n}\right)} = \frac{2.7778 / 194.444}{1 - \left(\frac{13}{13.9443}\right)^2} = 0.10917 \text{ rad}$$

$$\theta_P = 0.10917\ sen\ 13\ t \qquad (2)$$

b).- Solución complementaria:

$$\theta_C = c\ sen\ (\omega_n t + \phi)$$

Luego:

$$\theta_{(t)} = 0.10917\ sen\ 13\ t + c\ sen\ (13.9444\ t + \phi) \qquad (3)$$

$$\dot{\theta}_{(t)} = 1.4192 \cos 13\ t + 13.9444\ c\ \cos(13.9444\ t + \phi) \qquad (4)$$

Para, t = 0, $\theta = 0°$ y $\dot{\theta} = 0$ en (3) y (4):

$$0 = 0.10917\ sen\ 0° + c\ sen\ \phi \quad \rightarrow \quad \phi = 0$$

$$0 = 1.4192\ \cos 0° + 13.9444\ c\ \cos 0° \quad \rightarrow \quad c = \frac{-1.4192}{13.9444} = -0.1018$$

$$\therefore \quad \theta_{(t)} = 0.10917\ sen\ 13\ t - 0.1018\ sen\ 13.9444\ t \qquad (5)$$

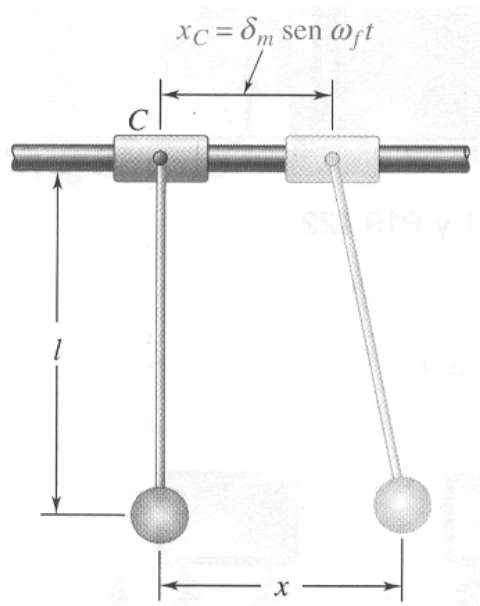
3).- Cálculo del ángulo de rotación, para t = 10 seg, en (5):

$$\theta_{(10)} = 0.10917\ sen 130 - 0.1018\ sen\ 139.444$$

$$\theta_{(10)} = -0.10154 - 0.0954 = -0.19694 \quad \text{rad}$$

$$\theta_{(10)} = -11.2838° \cong -11.28°$$

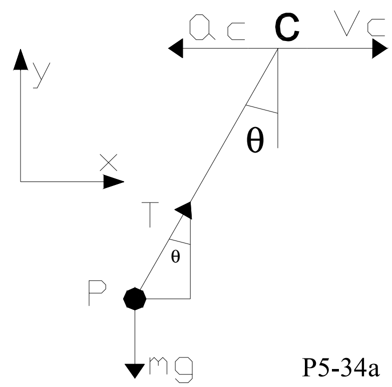
5-34.- La lenteja de 1.2 kg de un péndulo simple de longitud ℓ = 600 mm cuelga de una corredera C de 1.4 kg. Éste ejecuta un movimiento forzado según la relación $X_C = \delta_m$ sen $\omega_f\, t$, con una amplitud δ_m = 10 mm y una frecuencia f_f = 0.5 Hz. Hallar la amplitud del movimiento.



P5-34

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P5-34a):



P5-34a

2).- Relaciones cinemáticas:

Si:

$$f_f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_*}{2\,\pi} = 0.5 \quad \rightarrow \quad \omega_* = \pi \ \text{rad/seg}$$

$$X_C = \pm 0.01\, sen\, \pi\, t \ , \ \dot{X}_C = \pm 0.01\, \pi \cos \pi\, t$$

$$\ddot{X}_C = \mp 0.01\, \pi^2 sen\, \pi\, t$$

$$\bar{a}_P = \bar{a}_C + \ddot{\theta}\, \bar{k}\ x\, \ell\left(-sen\,\theta\,\bar{i} - \cos\theta\,\bar{j}\right) - \dot{\theta}^2 \ell\left(-sen\,\theta\,\bar{i} - \cos\theta\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_P = a_C \bar{i} + \ell\,\ddot{\theta}\cos\theta\,\bar{i} - \ell\,\ddot{\theta}\ sen\,\theta\,\bar{j} - \ell\,\dot{\theta}^2\left(-sen\,\theta\,\bar{i} - \cos\theta\,\bar{j}\right)$$

Para ángulos pequeños:

$$\bar{a}_P = \left[a_C + \ell\left(\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2\theta\right)\right]\bar{i} + \ell\left(-\ddot{\theta}\,\theta + \dot{\theta}^2\right)\bar{j}$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m\, a_{P\,X} \quad \rightarrow \quad T\ sen\,\theta = m\left[a_C + \ell\left(\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2\theta\right)\right] \qquad (1)$$

$$\sum F_Y = m\, a_{P\,Y} \quad \rightarrow \quad T\cos\theta = m\left[g + \ell\left(-\ddot{\theta}\,\theta + \dot{\theta}^2\right)\right] \qquad (2)$$

(1) ÷ (2):

$$\overbrace{tg\theta}^{\theta} = \frac{a_C + \ell\left(\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2\theta\right)}{g + \ell\left(-\ddot{\theta}\,\theta + \dot{\theta}^2\right)} \quad \rightarrow \quad -g\,\theta - \ell\,\ddot{\theta}\,\overbrace{\dot{\theta}^2}^{0} + \dot{\theta}^2\ell\,\theta = a_C + \ell\,\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2\ell\,\theta$$

$$\ell\,\ddot{\theta} + g\,\theta = -a_C \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\theta = \frac{+0.01\,\pi^2}{\ell}\,sen\,\pi\,t$$

$\ddot{\theta} + 16.35\,\theta = 0.1645\ sen\,\pi\,t$ (Mov. forzado no amortiguado)

Donde:

$\omega_n = 4.0435$ rad/seg, $m_{ef} = 1$ kg, $K_{ef} = 16.35$ N/m y $F_{0\,ef} = 0.1645$ N

Luego:

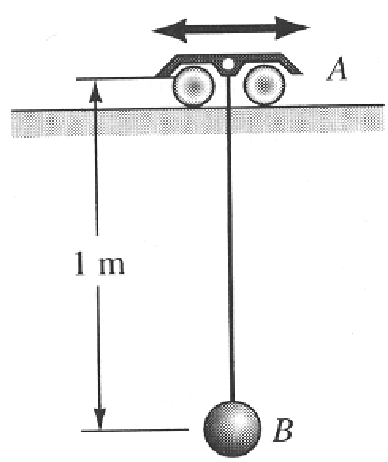
$$\theta_0 = \frac{0.1645}{16.35 - \pi^2} = 0.0254 \text{ rad}$$

Por lo tanto:

$$X_0 = X_{C\,máx} + X_{P/C\,máx} = 0.01 + 0.6 * 0.0254 = 0.02523 \text{ m}$$

$$X_0 = 25.23 \text{ mm}$$

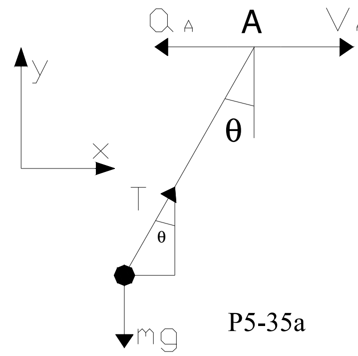
5-35.- Un péndulo B de peso w está suspendido de un vehículo A que sigue un movimiento $X_A = \delta$ sen ωt. Si δ es muy pequeña, ¿cuál debería ser ω para que el péndulo B tenga una amplitud de movimiento igual a 1.5 δ?



P5-35

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P5-35a):



P5-35a

2).- Relaciones cinemáticas:

$$X_A = \pm\, \delta\ sen\ \omega\, t\ ,\ \dot{X}_A = \pm\, \delta\ \omega \cos \omega\, t$$

$$\ddot{X}_A = \mp\, \delta\ \omega^2 sen\ \omega\, t$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A - \ddot{\theta}\ \bar{k}\ x\ \ell\ \left(-sen\ \theta\ \bar{i} - \cos\theta\ \bar{j}\right) - \dot{\theta}^2 \ell\ \left(-sen\ \theta\ \bar{i} - \cos\theta\ \bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_B = \left(-a_A - \ddot{\theta}\ \ell \cos\theta + \dot{\theta}^2 \ell\ sen\ \theta\right)\bar{i} + \left(\ddot{\theta}\ \ell\ sen\ \theta + \dot{\theta}^2 \ell \cos\theta\right)\bar{j}$$

Para θ pequeños:

$$\bar{a}_B = \left(\delta\ \omega^2 sen\ \omega\, t - \ddot{\theta}\ \ell\right)\bar{i} + \ell\ \ddot{\theta}\ \theta\ \bar{j}$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m\ \ddot{X}_B \quad \rightarrow \quad T\ sen\ \theta = m\left(\delta\ \omega^2 sen\ \omega\, t - \ddot{\theta}\ \ell\right)$$

$$\sum F_Y = m\ \ddot{Y}_B \quad \rightarrow \quad T \cos\theta = m\left(\ell\ \ddot{\theta}\ \theta + g\right)$$

$$\overbrace{tg\ \theta}^{\theta} = \frac{\delta\ \omega^2 sen\ \omega\, t - \ddot{\theta}\ \ell}{\ell\ \ddot{\theta}\ \theta + g}$$

$$g\ \theta + \ddot{\theta}\ \ell\ \overbrace{\dot{\theta}^2}^{0} = \delta\ \omega^2 sen\ \omega\, t \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\ \theta = \frac{\delta\ \omega^2}{\ell}\ sen\ \omega\, t$$

Para, ℓ = 1 m:

$$\ddot{\theta} + g\ \theta = \delta\ \omega^2 sen\ \omega\, t$$

Donde:

$$\omega_n^2 = g\ \text{(rad/seg)}^2,\ m_{ef} = 1\ \text{kg},\ K_{ef} = \sqrt{g}\ \text{N/m y} \quad F_{0ef} = \delta\ \omega^2\ \text{N}$$

La amplitud angular es:

$$\theta_0 = \frac{F_{0\,ef}}{\omega_n^2 - \omega_*^2} = \frac{\delta\,\omega^2}{g - \omega^2} \ \text{rad}$$

4).- Cálculo de la velocidad angular:

Si:

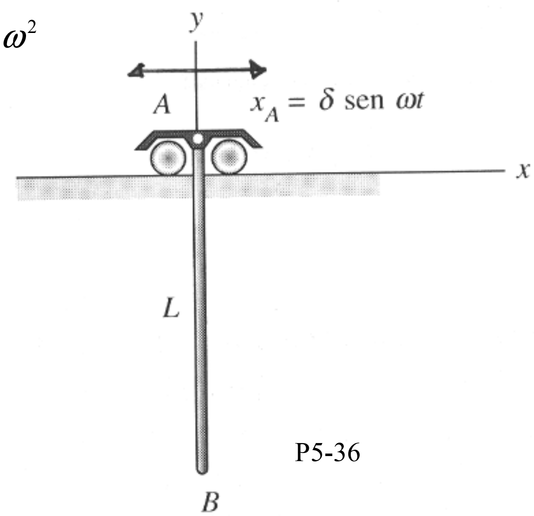
$$X_0 = X_{A\,máx} + X_{B/A\,máx} = \delta + \overset{1}{\overbrace{\ell}}\,\theta_0 = \delta + \theta_0$$

Se sabe, que:

$$1.5\,\delta = \delta + \frac{\delta\,\omega^2}{g - \omega^2} \quad \rightarrow \ 1.5\left(g - \omega^2\right) = g - \omega^2 + \omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{0.5\,g}{1.5} \quad \rightarrow \quad \omega = 1.8083 \ \text{rad/seg}$$

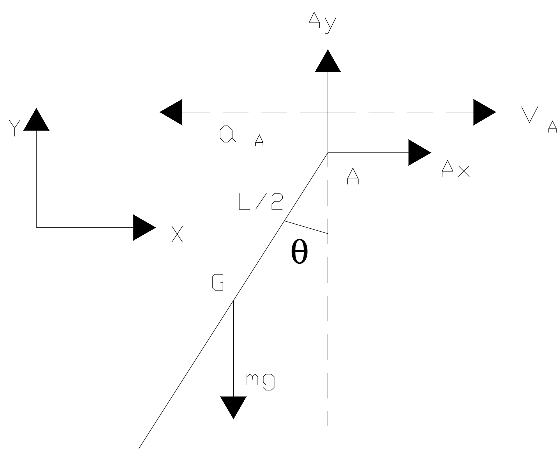
5-36.- Una barra de longitud L y peso w está suspendida de un soporte ligero en el punto A. Este soporte recibe un movimiento $X_A = \delta$ sen ωt, donde δ es muy pequeña comparado con L. ¿A qué frecuencia ω, debería A moverse si la amplitud del movimiento del extremo B, debe ser igual a 1.5δ?



P5-36

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P5-36a):



P5-36a

2).- Relaciones cinemáticas:

$$X_A = \pm\,\delta\ sen\ \omega\,t\,,\ \ \dot{X}_A = \pm\,\delta\ \omega \cos\omega\,t$$

$$\ddot{X}_A = \mp\,\delta\ \omega^2 sen\ \omega\,t$$

$$\bar{a}_A = \mp\,\delta\ \omega^2 sen\ \omega\,t\ \bar{i}$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_A \bar{k} = I_A \alpha\ \bar{k} + \bar{\rho}_{AG} x\ m\ \bar{a}_A$$

$$mg\frac{L}{2}\ sen\ \theta\ \bar{k} = -I_A\ddot{\theta}\ \bar{k} + \frac{L}{2}\left(-\ sen\ \theta\ \bar{i} - \cos\theta\ \bar{j}\right) x \left(-\ \delta\ \omega^2 sen\ \omega\, t\ \bar{i}\right)$$

$$mg\frac{L}{2} = -\frac{1}{3}m\ L^2\ddot{\theta} - \frac{L}{2}\delta\ \omega^2 sen\ \omega\, t \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{3\ g}{2\ L}\ \theta = -\frac{3\ \delta\ \omega^2}{2\ m\ L}\ sen\ \omega\, t$$

Donde:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3\ g}{2\ L}},\ \ m_{ef} = 1,\ \ K_{ef} = \frac{3\ g}{2\ L}\ \ y\ \ F_{0\,ef} = \frac{3\ \delta\ \omega^2}{2\ m\ L}$$

Luego:

$$\theta_0 = \frac{3\ \delta\ \omega^2}{2\ m\ L\left(\dfrac{3\ g}{2\ l} - \omega^2\right)} = \frac{3\ \delta\ \omega^2}{3\ w - 2\ m\ L\ \omega^2}$$

4).- Cálculo de la velocidad angular:

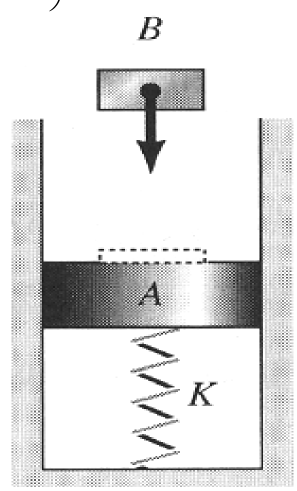
Si:

$$X_0 = X_{A\ máx} + X_{G/A\,máx} = \delta + \frac{3\ \delta\ \omega^2}{3\ w - 2\ m\ L\ \omega^2} = 1.5\ \delta$$

$$4.5\ w - 3\ m\ L\ \omega^2 = 3\ w - 2m\ L\ \omega^2 + 3\ \omega^2 \quad \rightarrow\ 1.5\ w = \omega^2\left(\frac{3\ g + w\ L}{g}\right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1.5\ w\ g}{3\ g + w\ L}} \quad \text{(Unid. de velocidad angular)}$$

5-37.- Un sólido rígido A descansa sobre un muelle de rigidez K igual a 8.8 N/mm. Un taco de plomo B cae sobre el bloque A con una velocidad de impacto de 7 m/seg. Si el impacto es perfectamente plástico, ¿cuáles serán la frecuencia circular natural y la amplitud del movimiento del sistema, suponiendo que el taco de plomo queda pegado a A durante todo el tiempo? Tomar w_A = 134 N y w_B = 22 N, ¿cuál será la distancia recorrida por A en 20 mseg? (Precaución: tener cuidado con las condiciones iniciales).



P5-37

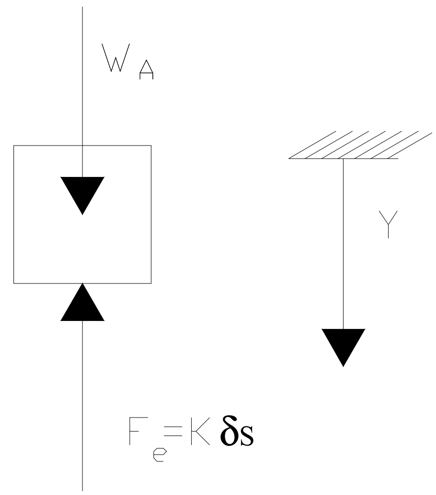
Solución

1).- Condiciones iniciales del movimiento.- Cálculo de la velocidad de los bloques A y B, un instante después del choque complemente plástico, por conservación de la cantidad de movimiento en la dirección vertical.

$$m_B V_B + m_A \overbrace{V_A}^{0} = \left(m_A + m_B\right) V$$

$$V = \frac{m_B}{m_A + m_B} V_B = \frac{22}{134 + 22} * 7 = 0.987 \text{ m/seg}$$

2).- Cuando el cuerpo A se encuentra en equilibrio (ver figura P5-37a):

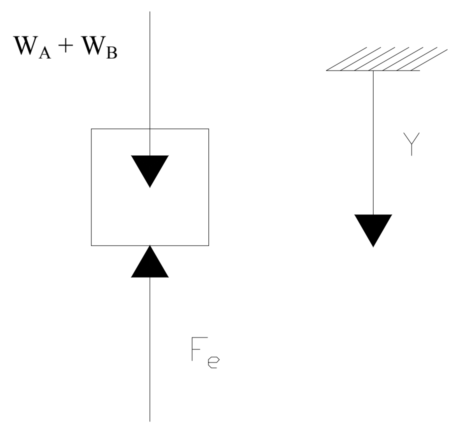


P5-37a

$$\sum F_Y = 0$$
$$w_A - K\,\delta_s = 0$$

3).- Cuando el sistema se encuentra en movimiento:

a).- D.S.F. (ver figura P5-37b):



P5-37b

b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_Y = m_t \ddot{Y}$$

$$w_A + w_B - K\left(Y + \delta_s\right) = \left(m_A + m_B\right)\ddot{Y}$$

$$\overbrace{\left(w_A - K\,\delta_s\right)}^{0} + w_B - K\,Y = \left(m_A + m_B\right)\ddot{Y}$$

$$\left(\frac{134 + 22}{9.81}\right)\ddot{Y} + 8\,800\,Y = 22$$

$\ddot{Y} + 553.46\,Y = 1.386$ (Mov. forzado sin amortiguamiento) (1)

Donde:

$\omega_n = \sqrt{553.46} = 23.526$ rad/seg

La solución de la ecuación diferencial, está conformado por una solución complementaria y otra particular.

$$Y_{(t)} = Y_C + Y_P$$

$$Y_C = c\ sen\ (\omega_n t + \phi)$$

Para, Y_P (función polinómica):

$$Y_P = A_0$$

En (1):

$553.46\ A_0 = 1.384 \quad \rightarrow \quad A_0 = 2.5x10^{-3}$ m²/N seg²

Luego:

$$Y_{(t)} = c\ sen\ (\omega_n t + \phi) + 2.5x10^{-3} \qquad (2)$$

$$\dot{Y}_{(t)} = c\ \omega_n \cos(\omega_n t + \phi) \qquad (3)$$

Para, t = 0, $Y = 0$ y $\dot{Y} = V = 0.987$ m/seg; en (2) y (3):

$$0 = c\ sen\ \phi + 2.5x10^{-3} \quad \rightarrow \quad c\ sen\ \phi = -2.5x10^{-3} \qquad (4)$$

$$0.987 = c\ \omega_n \cos\phi = 23.526\ c \cos\phi \quad \rightarrow \quad c \cos\phi = 0.04195 \qquad (5)$$

(4) ÷ (5):

$tg\phi = -0.0596 \quad \rightarrow \quad \phi = -0.06$ rad y $c = 0.042$ m

En (2):

$$Y_{(t)} = 0.042\ sen\ (23.526\ t - 0.06) + 2.5x10^{-3} \text{ m} \qquad (6)$$

4).- Cálculo del $Y_{máx}$.- Esto se da cuando $\dot{Y} = 0$, luego en (3):

$$0 = 0.042 * 23.526 \cos\left(23.526\, t - 0.06\right)$$

Esto se da, si:

$$\cos\left(23.526\, t - 0.06\right) = 0 \quad \rightarrow \quad 23.526\, t - 0.06 = \frac{\pi}{2} = 1.57 \quad \rightarrow \; t = 0.06932 \text{ seg}$$

En (6):

$$Y_{máx} = 0.042\, sen\left(1.57\right) + 2.5x10^{-3} = 0.0445 \text{ m} \quad \rightarrow \quad Y_{máx} = 44.5 \text{ mm}$$

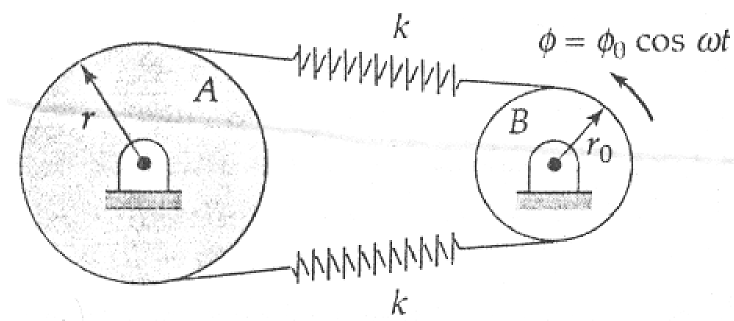
5).- Cálculo de la distancia recorrida por el sistema, en donde está A; en $20x10^{-3}$ seg:

En (6):

$$Y_{\left(2x10^{-3}\right)} = 0.042\, sen\left(23.526 * 20x10^{-3} - 0.06\right) + 2.5x10^{-3} = 4.19x10^{-5} \text{ m}$$

$$Y_{máx} = 44.5 \text{ mm}$$

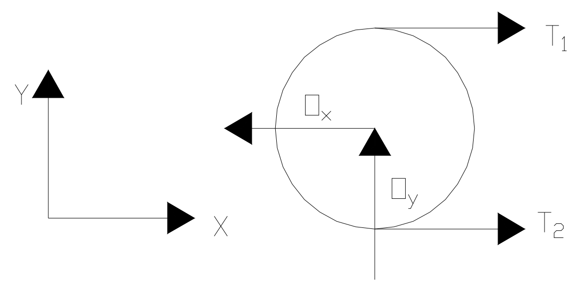
5-38.- El cilindro A de radio r, masa *m* y radio de giro K_0 es accionado por un sistema de cable y resorte unido al cilindro motor B, que oscila como indica. Si los cables no resbalan en los cilindros y si ambos resortes se tensan hasta el punto de no aflojarse durante un ciclo, hallar la expresión de la amplitud máxima $\theta_{máx}$ de la oscilación estacionaria del cilindro A.



P5-38

Solución

1).- D.C.L. del cilindro A (ver figura P5.38a):



P5-38a

2).- Relaciones cinéticas:

a).- Cuando el sistema se encuentra en equilibrio estático:

$$\sum M_O = 0 \quad \rightarrow \quad -T_1 + T_2 = 0 \quad \rightarrow \quad -K\ \delta_{S\,1} + K\ \delta_{S\,2} = 0 \quad \rightarrow \quad \delta_{S\,1} = \delta_{S\,2} = \delta_S$$

b).- Cuando el sistema está en movimiento:

Si: $\delta = r\ \theta - r_0 \phi$

$$\sum M_0 = I_0 \ddot{\theta} \quad \rightarrow \quad -T_1 r + T_2 r = m\ K_0^2\ \ddot{\theta}$$

$$-K\left(\delta_S + \delta\right) r + K\left(\delta_S - \delta\right) r = m\ K_0^2\ \ddot{\theta} \quad \rightarrow \quad -2\ K\ r\ \delta = m\ K_0^2\ \ddot{\theta}$$

$$-2\ K\ r\left(r\ \theta - r_0 \phi\right) = m\ K_0^2\ \ddot{\theta} \quad \rightarrow \quad m\ K_0^2\ \ddot{\theta} + 2\ K\ r^2 \theta = 2\ K\ r\ r_0 \phi$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2\ K\ r^2}{m\ K_0^2}\theta = \frac{2\ K\ r\ r_0}{m\ K_0^2}\phi_0 \cos\omega\, t \quad \text{(Mov. forzado sin amortiguamiento)}$$

Donde:

$$\omega_n = \frac{r}{K_0}\sqrt{\frac{2\ K}{m}} \quad \text{(Unid. de velocidad angular)}$$

3).- Cálculo de la expresión de la amplitud máxima $\theta_{máx}$ estacionaria (se da en la solución particular):

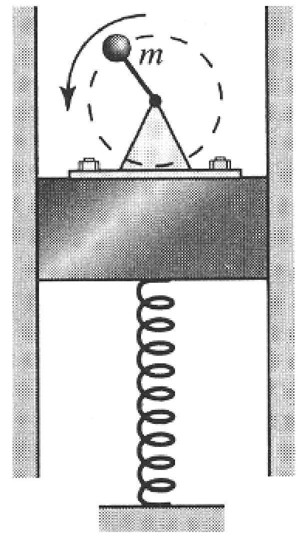
Si: $\theta_P = D \cos\omega\, t$

Derivándole dos veces respecto al tiempo y reemplazando en la ecuación diferencial:

$$-D\ \omega^2 \cos\omega\, t + D\omega_n^2 \cos\omega\, t = \frac{2\ K\ r\ r_0}{m\ K_0^2}\phi_0 \cos\omega\, t$$

$$D\left(\omega_n^2 - \omega^2\right) = \frac{2\ K\ r\ r_0 \phi_0}{m\ K_0^2} \quad \rightarrow \quad D = \frac{\dfrac{2\ K\ r\ r_0}{m\ K_0^2\ \omega_n^2}\phi_0}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$D = \phi_{máx} = \frac{\phi_0\left({}^{r_0}\!/_{r}\right)}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)} \text{ rad}$$



P5-39

5-39.- Una plataforma de 222 N de peso comprime el muelle 50 mm cuando se coloca cuidadosamente sobre éste. Un motor de 22 N de peso está fijado sobre la plataforma y hace girar una masa excéntrica *m* que pesa 1 N. La masa *m* se desplaza 150 mm respecto a su eje de rotación y gira con una velocidad angular de 28 rad/seg. El amortiguamiento viscoso que está presente produce una resistencia al movimiento de la plataforma de 275 N/(m/seg), ¿cuál será la amplitud estacionaria del movimiento de la plataforma?

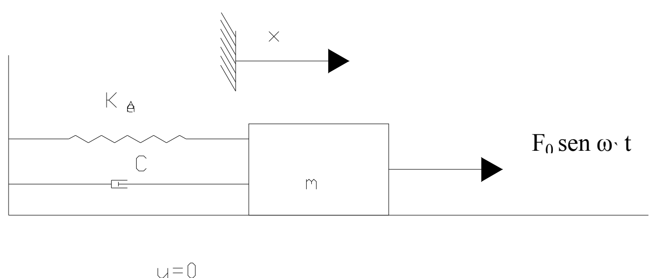
Solución

1).-Cálculo del K_e, cuando el motor todavía no esta montado:

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad m_P g = K_e \delta_S$$

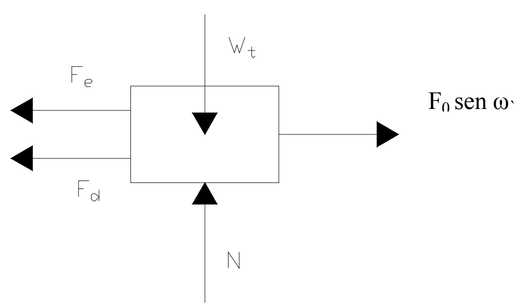
$$K_e = \frac{w_P}{\delta_S} = \frac{222}{0.05} = 4440 \text{ N/m}$$

2).- Modelo discretizado, cuando el motor está funcionando (ver figura P5-39a):



P5-39a

a).- D.C.L. (ver figura P5-39b):



P5-39b

b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m\,\ddot{X}$$

$$-K_e X - C\,\dot{X} + F_0 sen\omega t = m\,\ddot{X}$$

$$\ddot{X} + \frac{C}{m_t}\dot{X} + \frac{K_e}{m_t}X = \frac{F_0}{m_t}sen\omega_* t$$

Donde:

$$m_t = \frac{244}{9.81} = 24.873 \text{ kg}, \quad \omega_* = 28 \text{ rad/seg} \text{ y } F_0 = m\,a_n = \frac{1}{9.81}*0.15*28^2 = 11.988 \text{ N}$$

$$\ddot{X} + \frac{275}{24.873}\dot{X} + \frac{4440}{24.873}X = \frac{11.988}{24.873}sen\omega_* t$$

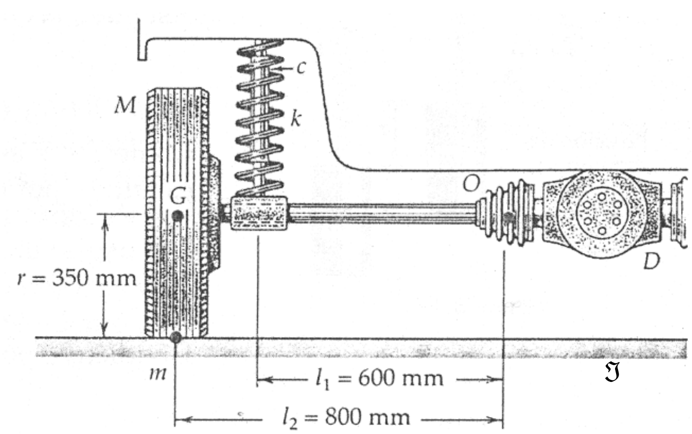
$$\ddot{X} + 11.056\,\dot{X} + 178.507\,X = 0.482\,sen\,28\,t \quad \rightarrow \quad \omega_n = 13.36 \text{ rad/seg}$$

Luego:

$$X_0 = \frac{F_0/m_t}{\sqrt{\left(\omega_n^2 - \omega_*^2\right)^2 + \left(\dfrac{C\,\omega_*}{m_t}\right)^2}} = \frac{0.482}{\sqrt{\left(13.36^2 - 28^2\right)^2 + \left(11.056*28\right)^2}} = 7.0876x10^{-4} \text{ m}$$

$$X_0 = 0.709 \text{ mm}$$

5-40.- En la figura se ilustra los elementos que componen la suspensión trasera tipo "eje oscilante" de los automóviles. El diferencial D está unido rígidamente al chasis del vehículo. Los semiejes están articulados en sus extremos interiores (punto O del semieje representado) y están unidos rígidamente a las ruedas. Otros componentes de la suspensión, que no se representan, limitan el movimiento de la rueda al plano de la figura. El conjunto de rueda y neumático tiene una masa M = 45 kg y su momento de inercia respecto a un eje diametral que pase por el centro de masa G es 1.4 kg m^2. La masa del semieje es despreciable.



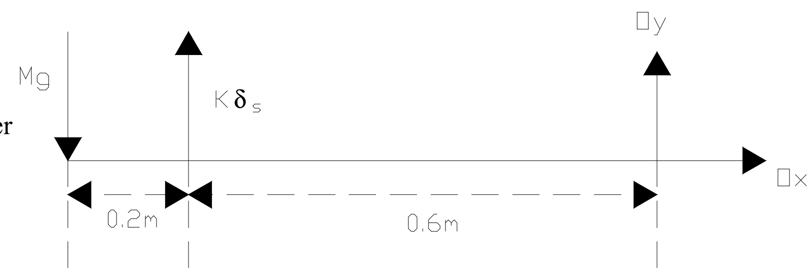
P5-40

La constante del resorte y el coeficiente de amortiguamiento son K = 8.75 KN/m y C = 2 600 N seg/m respectivamente. Si se presenta un desequilibrio estático en la cubierta de la rueda, como el que supone la masa adicional concentrada m = 0,25 kg que se indica, hallar la velocidad angular ω_n cuyo efecto sería excitar el sistema de suspensión a su frecuencia natural no amortiguada. ¿Cuál sería la correspondiente celeridad v del vehículo? Hallar el índice de amortiguamiento η. Suponer pequeñas oscilaciones y despreciar los efectos giroscópicos y las vibraciones del chasis. Para eludir las complicaciones asociadas con la fuerza normal variable que la calzada ejerce sobre la rueda, se tratará al vehículo como si estuviera despegado del suelo con la rueda suspendida libremente en el aire.

Solución

1).- Discretizando al sistema:

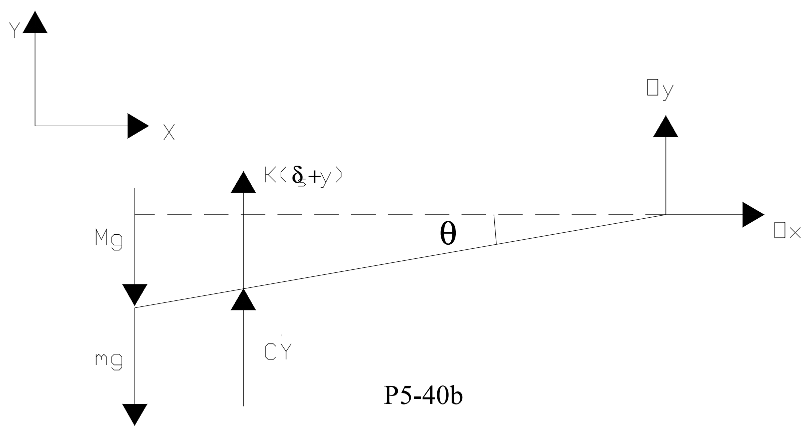
a).- Sistema en equilibrio (ver figura P5-40a):



P5-40a

$$\sum M_0 = 0 \quad \rightarrow \; -K\;\delta_S(0.6) + M\;g(0.8) = 0 \quad \rightarrow \quad 0.6\;K\;\delta_S = 0.8\;Mg \qquad (1)$$

b).- Sistema con movimiento alrededor del punto fijo "O" (ver figura P5-40b):



P5-40b

c).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_0 = I_0\ddot{\theta}$$

$$mg * 0.8 - K\;(\delta_S + Y) * (0.6) - C\;\dot{Y}\;(0.6) + Mg * 0.8 = I_0\ddot{\theta} \qquad (2)$$

(1) en (2):

$$I_0\ddot{\theta} + 0.6\;C\;\dot{Y} + 0.6\;K\;Y = 1.962$$

Si:

$\dot{Y} = 0.6\,\dot{\theta}$ y $Y = 0.6\,\theta$

$$\left(I_G + M\ L^2\right)\ddot{\theta} + 0.6^2 C\,\dot{\theta} + 0.6^2 K\ \theta = 1.962$$

$$\left(1.4 + 45 * 0.8^2\right)\ddot{\theta} + 0.36 * 2\ 600\ \dot{\theta} + 0.36 * 8\ 750\ \theta = 1.962$$

$\ddot{\theta} + 30.99\ \dot{\theta} + 104.3\ \theta = 1.962$ (Mov. forzado amortiguado)

Donde:

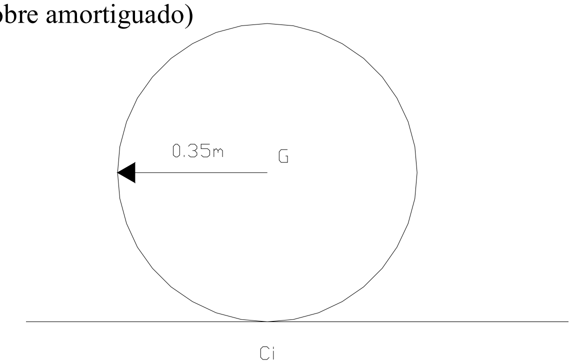
$\omega_n = \sqrt{104.3} = 10.21$ rad/seg

$\eta = \dfrac{C_{ef}}{2\ m_{ef}\,\omega_n} = \dfrac{30.99}{2*1*10.21} = 1.5176$ (Mov. sobre amortiguado)

2).- Cálculo de la velocidad del vehículo (ver figura P5-40c):

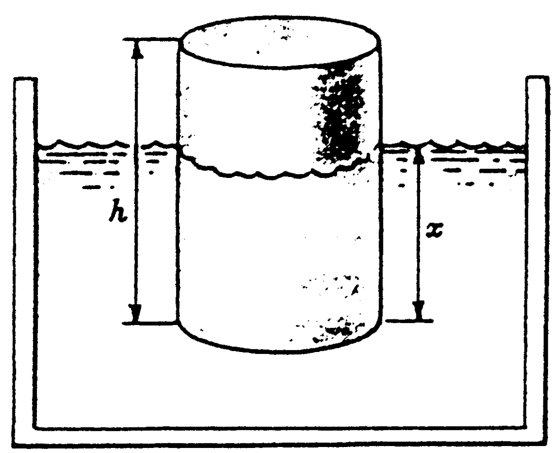
$V_G = \omega_n r = 10.21 * 0.35 = 3.5735$ m/seg

$V_G = V = 3.5735 * \dfrac{3600}{1000} = 12.865$ km/hr



P5-40c

5-41.- Un cilindro de madera de radio *r* y peso especifico *s*, está sumergido parcialmente en un baño de agua destilada de peso especifico igual a 64.4 lb/pie^3, como se muestra en la figura. Si el cilindro se hunde ligeramente y luego se deja en libertad, encuentre la frecuencia circular natural de oscilación del cilindro si éste permanece vertical todo el tiempo ¿Cuál será la frecuencia circular natural si se utiliza agua salada de peso específico 1.2 veces del agua destilada?



P5-41

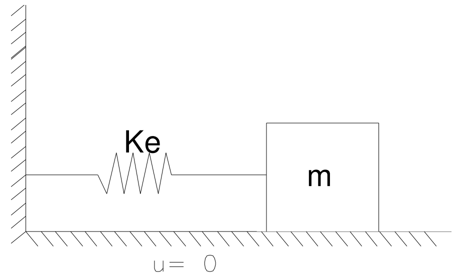
Solución

1).- Por el principio de Arquímedes:

Si, X (en pies) es el desplazamiento del cilindro, entonces el peso del agua desplazado es $w_A = \pi\, r^2 X\,(64.4)$, que viene a ser la fuerza restauradora (empuje) y la masa del cilindro es $m_C = \dfrac{\pi\, r^2 h\, s}{g}$.

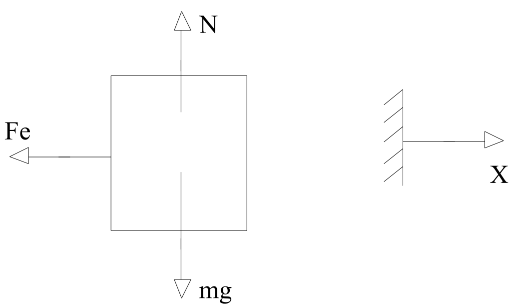
2).- Modelo discretizado (ver figura P5-41a), donde:

$$Fe = E = w_A = \overbrace{64.4\,\pi\, r^2}^{Ke} X$$



P5-41a

3).- D.C.L. y relaciones cinéticas (ver figura P5-41a):



P5-41b

$$m_C \ddot{X} + Ke\; X = 0$$

$$\frac{\pi\, r^2 h\, s}{g}\,\ddot{X} + 64.4\,\pi\, r^2\;X = 0$$

$$\ddot{X} + \frac{64.4\; g}{h\; s}\;X = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{64.4\; g}{h\; s}} = \frac{45.53}{\sqrt{h\; s}} \quad \text{rad/seg}$$

4).- Para el agua salada.-

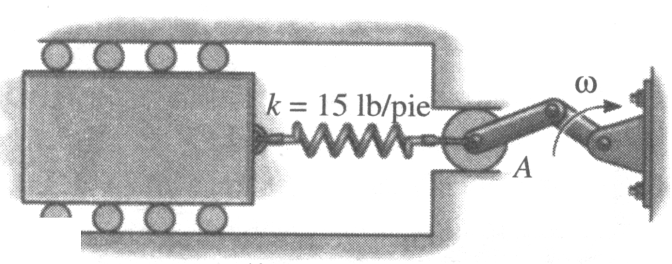
La fuerza restauradora es: $1.2\,(64.4\,\pi\, r^2\;X)$

Luego:

$$\frac{\pi\, r^2\; s}{g}\,\ddot{X} + 1.2\,(64.4\,\pi\, r^2\;X) = 0$$

$$\omega_N = \sqrt{\frac{77.28\; g}{h\; s}} = \frac{49.88}{\sqrt{h\; s}} \quad \text{rad/seg}$$

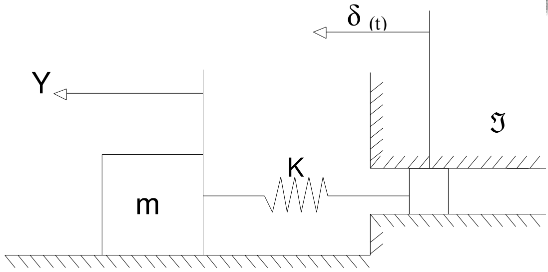
5-42.- El bloque de 80 libras está unido a un resorte, cuyo extremo experimenta un desplazamiento periódico de apoyo $\delta_A = (0.5 \text{ sen } 8\ t)$ pies, donde t se expresa en segundos. Determine la amplitud del movimiento del estado estacionario



P5-42

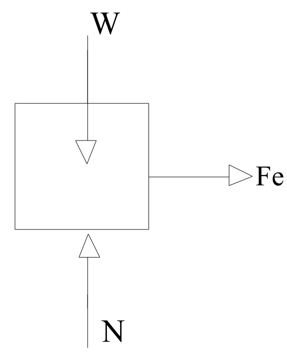
Solución

1).- Modelo discretizado (ver figura P5-42a):



P5-42a

2).- Para el Bloque en movimiento (ver figura P5-42b):



P5-42b

a).- D.C.L.:

$$Fe = K\ (Y - \delta_{(t)})$$

b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_Y = m\ddot{Y} \quad \rightarrow \ -Fe = m\ \ddot{Y} \quad \rightarrow \ -K\left(Y - \delta_{(t)}\right) = m\ddot{Y}$$

$$\ddot{Y} + \frac{K}{m}\ Y = \frac{K}{m}\delta_{(t)} \quad \rightarrow \quad \ddot{Y} + \frac{15 * 32.2}{80}\ Y = \frac{15}{80/32.2} * 0.5\ sen 8\ t$$

$$\ddot{Y} + 6.038\ Y = \frac{7.5}{2.484} sen\ 8\ t$$

Donde:

$$\omega_n = \sqrt{6.038} = 2.457 \quad \text{rad/seg}$$

$$\mu = \frac{\omega_*}{\omega_n} = \frac{8}{2.457} = 3.256$$

$$Y_0 = \frac{F_0 / K}{1-\mu^2} = \frac{7.5/15}{1-3.256} = -0.052 \text{ pies}$$

$$Y_0 = 0.624 \text{ plg}$$

5-43.- Un bloque B de 1,5 kg está unido mediante una cuerda a un bloque A de 2 kg, que cuelga de un muelle de constante de 3000N/m. Sabiendo que se corta la cuerda estando el sistema en reposo. Hallar: a) La frecuencia, la amplitud y la velocidad máxima del movimiento siguiente y b) La velocidad del bloque A, 0.3 seg después de cortarse la cuerda.

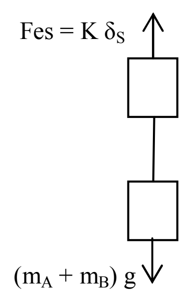
P5-43

Solución

1).- D.S.F. del sistema en equilibrio estático y relaciones cinéticas (ver figura P5-43a):

$$\sum F_V = 0 \quad \rightarrow \quad K\ \delta_S = m_A g + m_B g$$

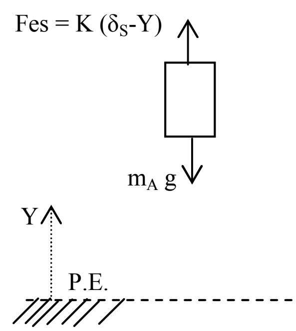
$$m_B g = K\ \delta_S - m_A g$$



P5-43a

2).- D.C.L, cuando el cuerpo A está en movimiento (Ver figura p5-43b):

$$Fe = K\ (\delta_S - Y)$$



P5-43b

3).- Relaciones cinéticas:

a).-

$$\sum F_Y = m\ \ddot{Y} \quad \rightarrow \quad K\ (\delta_S - Y) - m_A g = m_A \ddot{Y}$$

$$\overbrace{(K\ \delta_S - m_A g)}^{m_B g} - K\ Y = m_A \ddot{Y}$$

$$\ddot{Y} + \frac{K}{m_A} Y = \frac{m_B}{m_A} g \quad \rightarrow \quad \ddot{Y} * 1500\ Y = 7.358$$

Donde:

$$\omega_n = \sqrt{1500} = 38.73 \text{ rad/seg} \quad \rightarrow \quad \omega_n = 6.16 \text{ R.P.M.}$$

b).- Solución de la ecuación diferencial:

$$Y_{(t)} = Y_C + Y_P$$

$$Y_C = c\ sen\ (\omega_n + \phi)$$

$$Y_P = A_0 \quad , \quad \dot{Y}_0 = \ddot{Y}_0 = 0 \quad \rightarrow \quad 1500\ A_0 = 7.3575 \quad \rightarrow \quad A_0 = 4.905x10^{-3}$$

Luego:

$$Y_{(t)} = c\ sen\ (\omega_n + t) + 4.905x10^{-3} \qquad (1)$$

$$\dot{Y}_{(t)} = c\ \omega_n\ \cos\ (\omega_n t + \phi) \qquad (2)$$

Para: $t = 0$, $Y = 0$ y $\dot{Y} = 0$ en (1) y (2):

$$0 = c\ sen\phi + 4.905x10^{-3} \quad \rightarrow \quad c\ sen\phi = -4.905x10^{-3}$$

$$0 = c\ \omega_n \cos\phi \quad \rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$c = -4.905x10^{-3} \text{ m} \quad \rightarrow \quad c = 4.9 \text{ mm (amplitud)}$$

$$Y_{(t)} = 4.905x10^{-3}\left[-sen\left(38.73\ t + \frac{\pi}{2}\right) + 1\right] \text{ m}$$

c).- Para la velocidad máxima $\cos\ (\omega_n t + \phi) = 1$:

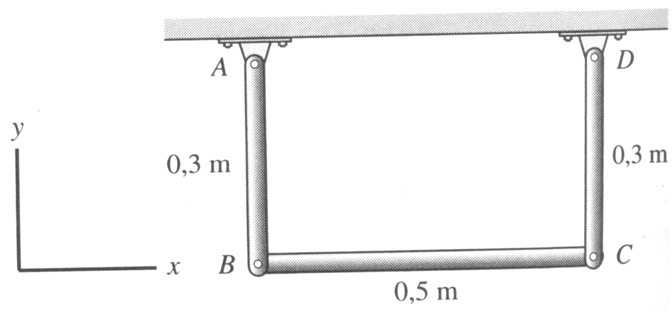
$$\dot{Y}_{\max} = -4.905x10^{-3} * 38.73 = -0.1899 \quad \rightarrow \dot{Y}_{\max} \cong 0.19 \text{ m/seg}$$

d).- Cálculo de la velocidad De A después de 0.3 seg de cortarse la cuerda:

$$\dot{Y}_{0.3} = -4.905x10^{-3} * 38.73 \cos\left[\left(38.73 * 0.3 + \frac{\pi}{2}\right) * \frac{180}{\pi}\right]$$

$\dot{Y}_{0.3} = 0.154 \downarrow$ m/seg

5-44.- Un ensamblaje de tres barras ABCD, recibe una ligera perturbación de forma que oscile en el plano YX. ¿Cuál será la frecuencia de oscilación, si la barra tiene una masa de 5 g/mm?

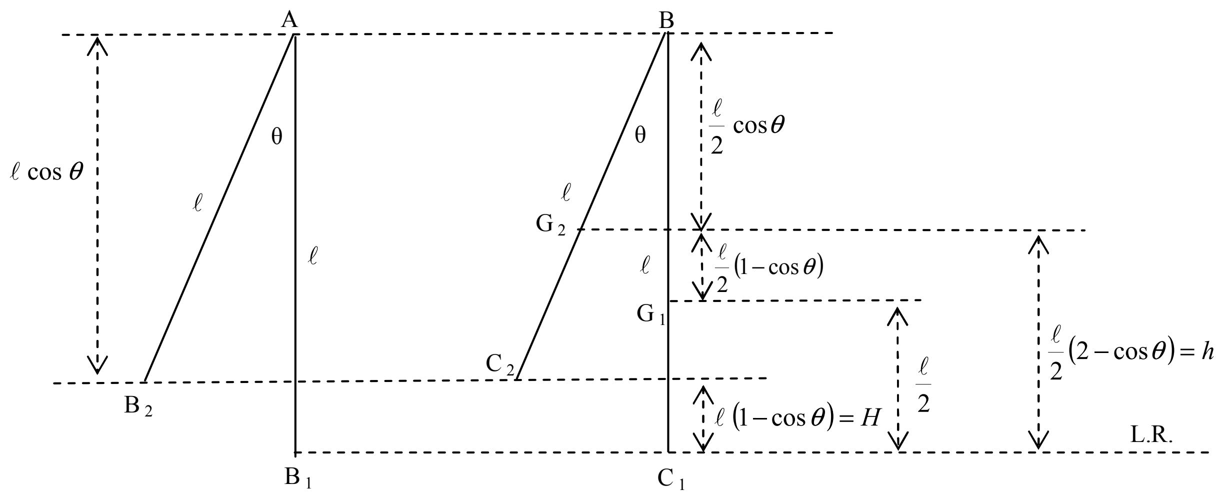


P5-44

Solución

Las únicas fuerzas que producen trabajo son los pesos, por lo que la energía mecánica se conserva.

1).- Diagrama para un instante cualquiera, respecto a la posición de equilibrio; si BC tiene un movimiento de traslación, AB y DC tienen movimiento de rotación alrededor de sus ejes fijos correspondientes.



P5-44a

2).- Por la conservación de la energía mecánica.- Cálculo de la energía mecánica para un instante cualquiera:

Si $\rho = 5$ gr/mm o $\rho = 5$ kg/m

$$U_{g\,\theta} = 2\, m_{AB} g\, h + m_{BC} g\, H = 2 * 5\, \ell * \frac{\ell}{2}(2-\cos\theta)\, g + 5\, \ell_{BC} * \ell\,(1-\cos\theta)\, g$$

$$U_{g\,\theta} = 5*0.3^2\,(2-\cos\theta)\,g + 5*0.5*0.3(1-\cos\theta)\,g = 16.1865 - 11.772\,\cos\theta$$

$$Ek_\theta = 2\left(\frac{1}{2}*\frac{1}{3}\,m_{AB}\ell^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}m_{BC}\left(\ell\,\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{3}*5*0.3^3\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}*5*0.5*0.3^2\,\dot{\theta}^2$$

$$Ek_\theta = 0.1575\,\dot{\theta}^2$$

Luego:

$$EM_\theta = 0.1575\,\dot{\theta}^2 + 16.1865 - 11.772\,\cos\theta \qquad (1)$$

Derivando (1) respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt}\left(Ek_\theta + U_{g\,\theta}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad 0.1575*2\,\dot{\theta}\,\ddot{\theta} + 11.772\,sen\,\theta\,\dot{\theta} = 0$$

Para ángulos pequeños $sen\,\theta \cong 0$:

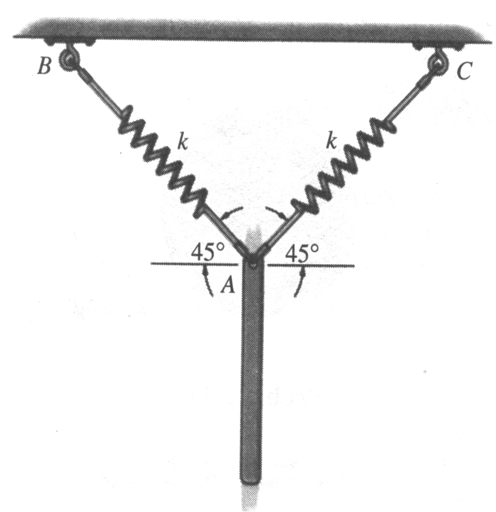
$$\ddot{\theta} + 37.37\,\dot{\theta} = 0 \quad \text{(MAS)}$$

Donde:

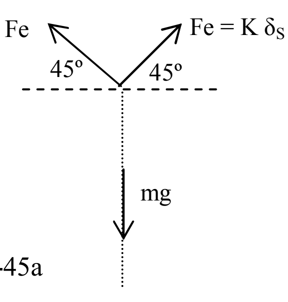
$$\omega_n = \sqrt{37.37} = 6.113 \text{ rad/seg}$$

$$f_n = 0.973 \text{ Hz}$$

5-45.- La barra tiene una masa de 8 kg y está suspendida por dos resortes de tal manera que cuando se encuentra en equilibrio, éstos forman un ángulo de 45º con respecto a la horizontal como se ilustra. Determine el periodo natural de vibración si la barra se estira abajo una pequeña distancia y se suelta. Cada resorte tiene una rigidez de K = 40 n/m.



P5-45



P5-45a

Solución

1).- Cuando la barra se encuentra en equilibrio.-

a).- D.C.L. (ver figura P5-45a):

b).- Relaciones cinéticas:

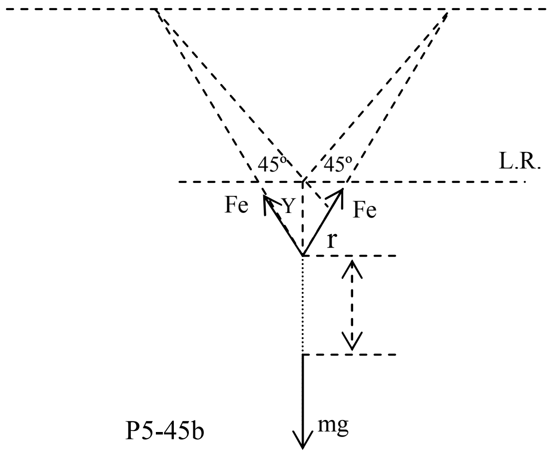
$$\sum F_Y = 0 \ \rightarrow \ 2\ Fe\ sen45^{o} - mg = 0$$

$$2\ K\ \delta_S * \frac{1}{\sqrt{2}} - mg = 0$$

$$\sqrt{2}\ K\ \delta_S - mg = 0 \qquad (1)$$

2).- Cuando la barra está en movimiento:

a).- D.C.L. (ver figura P5-45b)



P5-45b

En la figura P5-45b:

$$sen45^{o} = \frac{r}{Y} \quad \rightarrow \quad r = \frac{\sqrt{2}}{2}\ Y \qquad (2)$$

$$\dot{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \dot{Y} \qquad (3)$$

2).- Por conservación de la energía mecánica:

$$\frac{d}{dt}\left(Ek + U_g + U_e\right) = 0 \qquad (4)$$

Donde, derivamos y remplazamos (2) y (3):

$$Ek = \frac{1}{2} m\ \dot{Y}^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dEk}{dt} = m\ \dot{Y}\ \ddot{Y}$$

$$U_g = .mg\left(Y + \ell/2\right) \quad \rightarrow \quad \frac{d\ U_g}{dt} = -mg\ \dot{Y}$$

$$U_e = \frac{1}{2} K\ \left(\delta_s + r\right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dU_e}{dt} = K\ \left(\delta_S + r\right) \dot{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ K\ \left(\delta_S + r\right) \dot{Y}$$

Luego, en (4):

$$m\,\dot{Y}\,\ddot{Y} - mg\,\dot{Y} + 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\,K\,(\delta_S + r)\right]\dot{Y} = 0 \qquad (5)$$

Reemplazando (1) en (5):

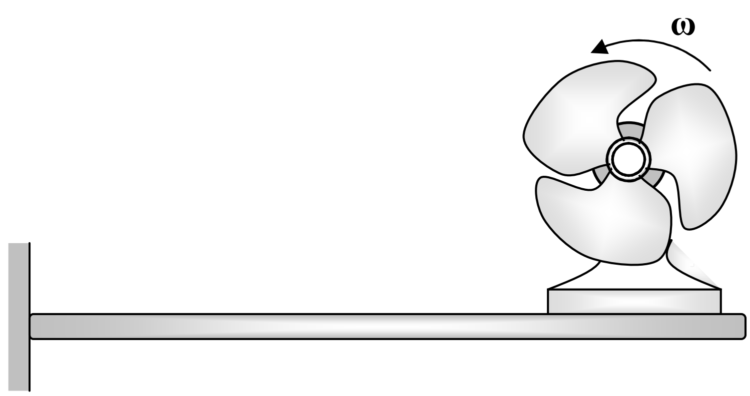
$$\overbrace{\sqrt{2}\,K\,\delta_S - mg}^{0} + m\,\ddot{Y} + \sqrt{2}\,k\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,Y\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{Y} + \frac{K}{m}\,Y = 0 \quad \text{(MAS)}$$

Donde:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{40}{8}} = 2.236 \ \text{ rad/seg} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\,\pi}{2.236} = 2.8094 \ \text{ seg}$$

$$T = 2.81 \ \text{ seg}$$

5-46.- El ventilador tiene una masa de 25 kg y está unido al extremo de una viga horizontal cuya masa es despreciable. L hoja del ventilador está montada excéntricamente sobre la flecha de tal manera que es equivalente a una masa no balanceada de 3.5 kg localizada a 100 mm del eje de rotación. Si la deflexión estática de la viga es de 50 mm como resultado del peso del ventilador ¿Cuál será la amplitud de la vibración del estado estacionario del ventilador, si la velocidad angular del ventilador es de 18 rad/seg?



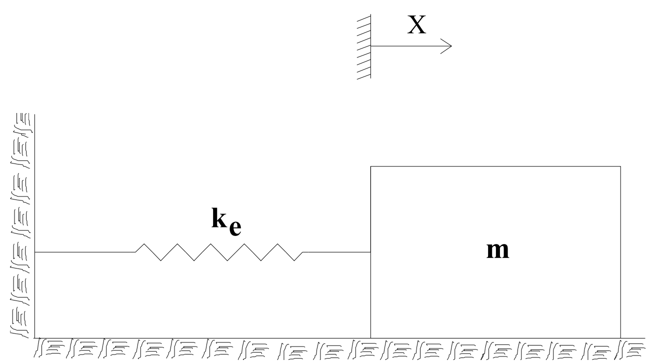
P5-46

Solución

1).- Cálculo del K_e (Sistema estático):

$$P = K_e \delta_S$$

$$K_e = \frac{P}{\delta_S} = \frac{3.5 * 9.81}{0.05} = 4095 \ \text{ n/m}$$

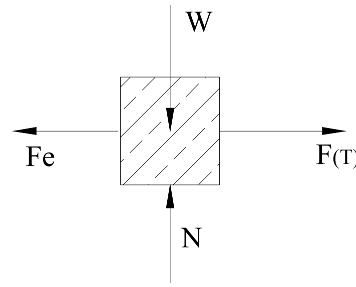


P5-46a

2).- El modelo discretizado es (ver figura P5-46a):

3).- Relaciones cinéticas:

a).- D.C.L. (ver figura P5-46b):



P5-46b

b).- Cálculo del F_0:

$$F_0 = m_C a_n = m_C \omega^2 r = 2.5 * 18^2 * 0.3 = 113.4 \quad \text{N}$$

b).- Por la segunda ley de Newton:

$$\sum F_X = m\,\ddot{X} \quad \rightarrow \quad F_{(t)} - F_e = m\,\ddot{X} \quad \rightarrow \quad F_0 \; sen\; \omega_* - F_e = m\,\ddot{X}$$

Despejando y reemplazando valores:

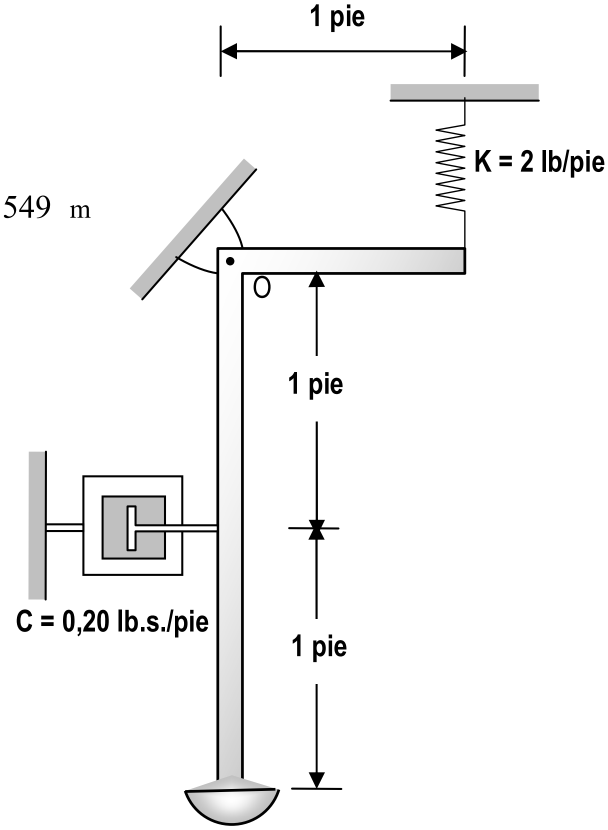
$$\ddot{X} + \frac{4015}{25} X = \frac{113.4}{25} sen\, 18\, t$$

Luego:

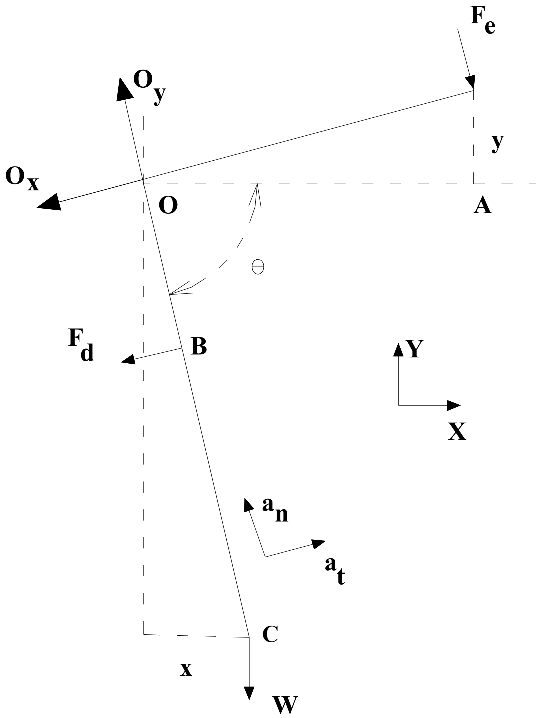
$$X_0 = \frac{F_0/m}{\frac{K_e}{m} - \omega_*^2} = \frac{113.4/25}{\frac{4905}{25} - 18^2} = -0.03549 \quad \text{m}$$

$$X_0 = 35.5 \quad \text{mm}$$

5-47.- El mecanismo consta de una barra doblada, que tiene una masa despreciable y un peso unido de 5 lb. Determine el coeficiente de amortiguamiento para pequeñas vibraciones en torno de la posición de equilibrio. Desprecie el tamaño del peso.



P5-47



P5-47a

Solución

Cuando el sistema está en reposo, no hay deformación del resorte.

1).- D.C.L. Cuando el sistema está en movimiento (ver figura p5-47a):

$$Y = 1 * sen\,\theta = sen\,\theta$$

$$X = 1 * sen\,\theta \;\rightarrow\; \dot{X} = \cos\theta\,\dot{\theta}$$

Para θ pequeños:

$$Y = \theta \;\;,\;\; X = \theta \;\; y \;\; \dot{X} = \dot{\theta}$$

2).- relaciones cinéticas:

$$\sum M_0 = \dot{H}_{0Z}$$

Donde:

$$\dot{\overline{H}}_0 = \ddot{r}_{OC} x\; m\; \overline{a} \quad\rightarrow\quad H_{OZ} = d\; m\; a_t = d\; m\left(d\;\ddot{\theta}\right) = m\; d^2\ddot{\theta}$$

Luego:

$$-w\left(2\;sen\;\theta\right) - C\;\dot{X}\;\left(1*\cos\theta\right) - K\;Y\;\left(1*\cos\theta\right) = \frac{w}{g} * 2^2 * \ddot{\theta}$$

Despejando y reemplazando valores:

$$\ddot{\theta}+\frac{0.2*32.2}{20}\dot{\theta}+19.32\,\theta=0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta}+0.322\,\dot{\theta}+19.32\,\theta=0$$

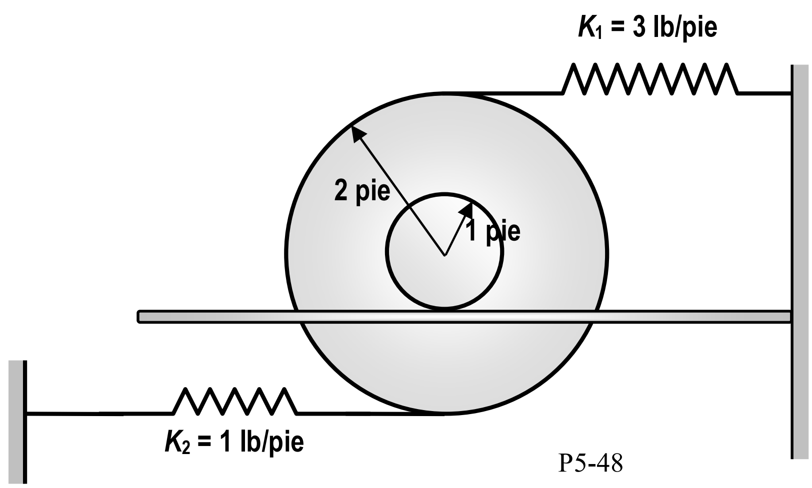
Donde:

$$\omega_n=\sqrt{19.32}=4.395 \text{ rad/seg}$$

$$C_{C\,ef}=2\sqrt{K_{ef}\,m_{ef}}=2\sqrt{19.32*1}=8.79 \text{ N seg/m y } C_{ef}=0.332 \text{ N seg/m}$$

$$\eta=\frac{C_{ef}}{C_{C\,ef}}=\frac{0.322}{8.79}=0.0367$$

5-48.- El carrete de 50 lb está unido a dos resortes. Si el carrete se desplaza una pequeña cantidad y se suelta, determine el periodo natural de vibración. El radio de giro del carrete es K_G = 1.5 pies. El carrete rueda sin deslizar.



P5-48

Solución

1).- Cuando el carrete se encuentre en equilibrio:

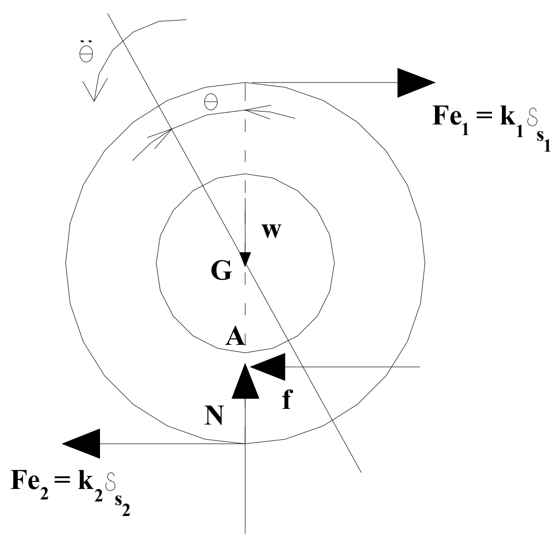
a).- D.C.L. (ver figura P5-48a):

b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_A=0$$

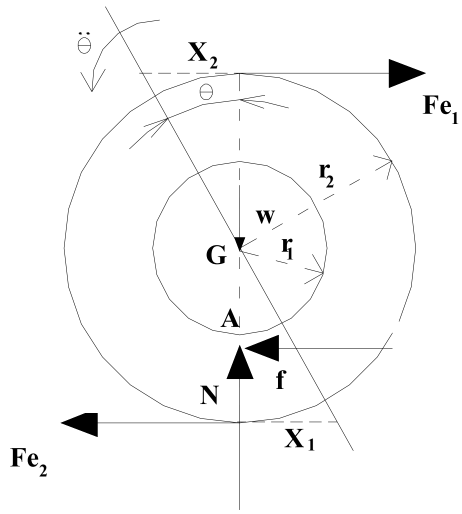
$$K_1\delta_{S\,1}(r_1+r_2)+K_2\delta_{S\,2}(r_2-r_1)=0$$

2).- Cuando el carrete está en movimiento:



P5-48a

a).- D.C.L. (ver figura P5-48b):



P548b

$$X_1 = (r_1 + r_2)\,\theta = 3\,\theta$$

$$X_2 = (r_2 - r_1)\,\theta = \theta$$

b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_A = I_A \ddot{\theta}$$

$$-(r_2 + r_1)\,F_{e1} - (r_2 - r_1)\,F_{e2} = I_A \ddot{\theta}$$

$$-(r_2 + r_1) * K_1(\delta_{S1} + X_1) - (r_2 - r_1) * K_2(\delta_{S2} + X_2) = I_A \ddot{\theta}$$

$$\overbrace{-K_1\delta_{S1}(r_2 + r_1) - K_2\delta_{S2}(r_2 - r_1)}^{0} - K_1 X_1 (r_2 + r_1) - K_2 X_2 (r_2 - r_1) = (m\,K_G^2 + m\,r_1^2)\,\ddot{\theta}$$

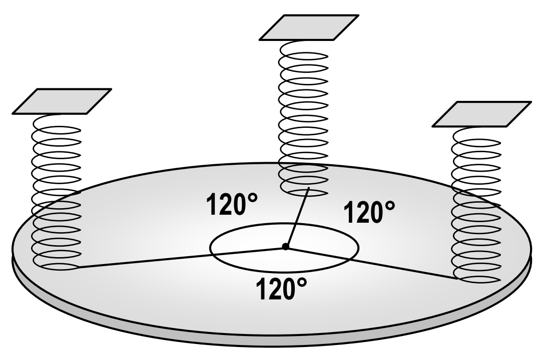
Reemplazando valores y despejando:

$$\left(\frac{50}{32.2} * 1.5^2 + \frac{50}{32.2} * 1^2\right)\ddot{\theta} + 3*3*3\,\theta + 1*1*\theta = 0 \quad \rightarrow \quad 5.047\,\ddot{\theta} + 28\,\theta = 0$$

Donde:

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{m_{ef}}{K_{ef}}} = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{5.047}{28}} = 2.67 \quad \text{seg}$$

5-49.- Un disco circular de 4 kg está unido a tres resortes, cada cual tiene una rigidez K = 180 N/m. Si el disco está inmersa en un fluido y recibe una velocidad descendente de 0.3 m/seg en la posición de equilibrio, determine la ecuación que describe el movimiento. Suponga que el desplazamiento positivo se mide hacia abajo y que la resistencia del fluido que actúa sobre el disco proporciona una fuerza de amortiguamiento que tiene una magnitud $F = (60\,|V|)$ N, donde V se expresa en m/seg.

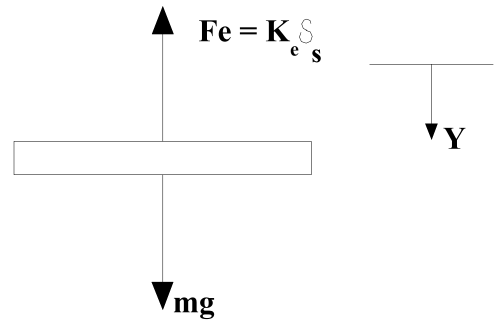


P5-49

Solución

1).- Cuando el disco se encuentra en equilibrio.-

a).- D.C.L. (ver figura P5-49a):



P5-49a

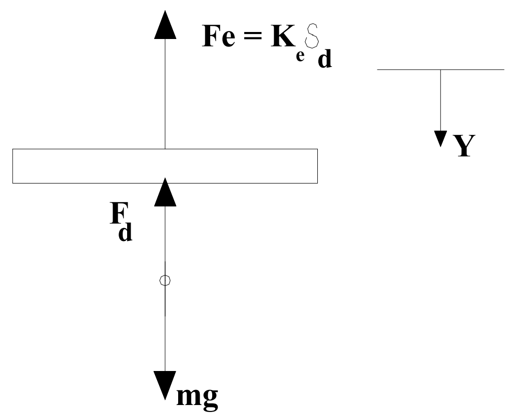
2).- relaciones cinéticas:

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad -F_e + mg = 0$$

$$mg - K_e \delta_S = 0 \qquad (1)$$

3).- Cuando el disco se encuentra en movimiento:

a).- D.C.L. (ver figura P5-49b):



P5-49b

b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_Y = m\,\ddot{Y} \quad \rightarrow \quad -F_e - F_d + mg = m\,\ddot{Y}$$

$$-K_e(\delta_s + Y) - 60\,\dot{Y} + mg = m\,\ddot{Y}$$

Reemplazando (1), se tiene:

$$\ddot{Y} + 15\,\dot{Y} + 135\,Y = 0$$

Donde:

$$\omega_n = \sqrt{135} = 11.619 \ \text{ rad/seg}$$

$$\eta = \frac{C}{C_C} = \frac{15}{2\,\omega_n} = \frac{15}{2*11.619} = 0.645 \ \text{ (define un movimiento subamortiguado)}$$

$$\omega' = \omega_n\sqrt{1-\eta^2} = 11.619\sqrt{1-0.645} = 8.879 \ \text{ rad/seg}$$

Solución de la ecuación diferencial:

$$Y = c'\,e^{-\eta\,\omega_n t}\ sen\,(\omega' t + \phi) \qquad (1)$$

Derivándole:

$$\dot{Y} = c'\, e^{-\eta\, \omega_n t} \left(-\eta\ \omega_n\right) sen\left(\omega' t + \phi\right) + c'\, e^{-\eta\, \omega_n t}\, \omega' \cos\left(\omega' t + \phi\right) \qquad (2)$$

Para; $t = 0$, $Y = 0$ y $\ddot{Y} = 0.3$ m/seg, reemplazando en (1) y (2):

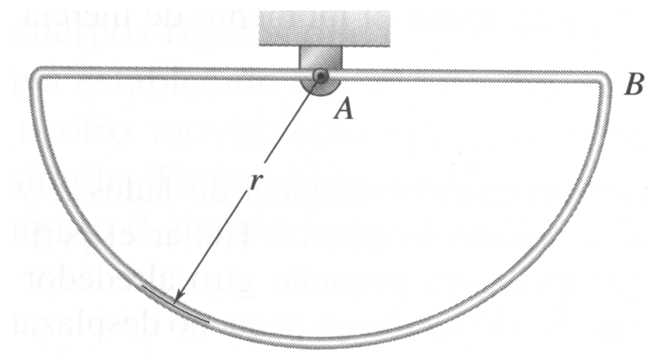
$$0 = c'\, sen\, \phi \quad \rightarrow \quad \phi = 0º$$

$$0.3 = c' {*} 8.879 \quad \rightarrow \quad c' = \frac{0.3}{8.879} = 0.034 \ \text{rad/seg}$$

Luego:

$$Y_{(t)} = 0.034\, e^{-7.49\, t}\, sen\left(8.879\, t\right)$$

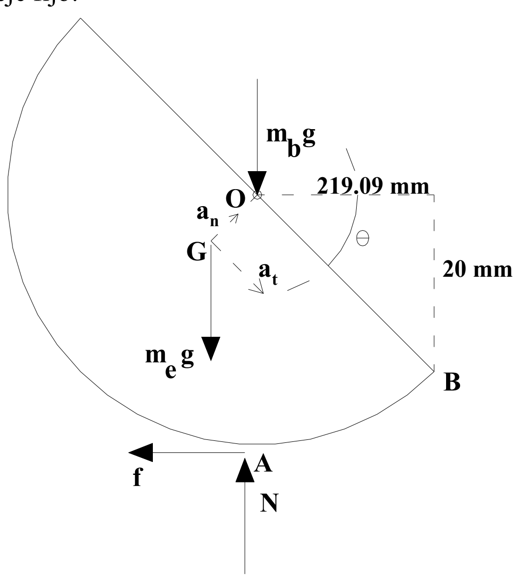
5-50.- Un alambre homogéneo doblado como se muestra está sujeto a un pasador en A. Sabiendo que r = 220 mm y que el punto B recibe un desplazamiento descendente de 20 mm y se suelta. Hallar la velocidad 8 seg después.



P5-50

Solución

El sistema tiene un movimiento alrededor de un eje fijo.



P5-50a

1).- D.C.L. en un instante que no es de equilibrio (ver figura P5-50a):

$$\ell_b = 0.44 \ \text{m}$$

$$\ell_c = \pi * 0.22 = 0.691 \ \text{m}$$

Donde:

$$a_t = r_G\ \ddot{\theta}$$

$$r_G = \frac{2\, r}{\pi} = 0.14 \ \ m$$

2).- relaciones cinéticas:

$$\sum M_A = \sum I_{G\,i}\alpha_i + \sum m_i a_{G\,i} d_i$$

$$-m_c g\ r_G \overbrace{sen\ \theta}^{\theta} = \left(I_{G\,b} + I_{G\,c}\right)\ddot{\theta} + m_c \ddot{\theta}\ r_G * r_G \overbrace{\cos\theta}^{1}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{m_c g\ r_G}{I_{G\,b} + I_{G\,c} + m_c r_G^2}\ \theta = 0 \qquad (1)$$

Donde:

$$I_{G\,b} = \frac{1}{12}\ m_b \ell_B \ \text{ y } \ \rho = \frac{m_T}{\ell_T} = \frac{m_b}{\ell_b} = \frac{m_c}{\ell_c} \quad \rightarrow \quad m_b = \frac{\ell_b}{\ell_c} m_c$$

$$I_{G\,b} = \frac{1}{12} * \frac{m_c}{\ell_c} \ell_b^3 = \frac{1}{12} * \frac{0.44^3}{0.691} m_c = 0.0103\ m_c \qquad (2)$$

$$I_{G\,c} = I_O - m_c r_G^2 = m\ r^2 - m_c r_G^2 = m_c\left(0.22^2 - 0.14^2\right) = 0.0288\ m_c \qquad (3)$$

(2) y (3) en (1):

$$\ddot{\theta} + \frac{m_c * 9.81 * 0.14}{m_c\left(0.0103 + 0.288 + 0.14^2\right)}\ \theta = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + 23.396\ \theta = 0 \ \ \text{(MAS)}$$

Luego:

$$\omega_n = \sqrt{23.396} = 4.832 \ \text{ rad/seg}$$

3).- Solución de la ecuación diferencial:

$$\theta_{(t)} = c\ sen\ (\omega_n t + \phi) \qquad (4)$$

$$\dot{\theta}_{(t)} = c\ \omega_n \cos\ (\omega_n t + \phi) \qquad (5)$$

En (4) y (5), para las condiciones iniciales en t = 0:

$$tg\theta = \frac{20}{219.09} \quad \rightarrow \quad \theta = 5.22^{\text{o}} \quad \rightarrow \quad \theta = 0.091 \ \text{ rad y } \ \dot{\theta} = 0$$

En (5):

$$0 = c\ \omega_n \cos\phi \quad \rightarrow \quad \cos\phi = 0 \quad \rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

En (4):

$$0.091 = c\ sen\ \phi \quad \rightarrow \quad c = 0.091 \ \text{ m}$$

En (5) reemplazando estos valores y para t = 8 seg:

$$\dot{\theta}_{(8)} = 0.091 * 4.837 * \cos\left(4.837 * 8 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\dot{\theta}_{(8)} = 0.374 \ \text{ rad/seg}$$

Luego:

$$V_{G\,(8)} = \dot{\theta}_{(8)} * 0.14 = 0.374 * 0.14 = 0.0524 \ \text{ m/seg}$$

$$V_{B\,(8)} = 0.374 * 220 = 82.28 \ \text{ mm/seg}$$