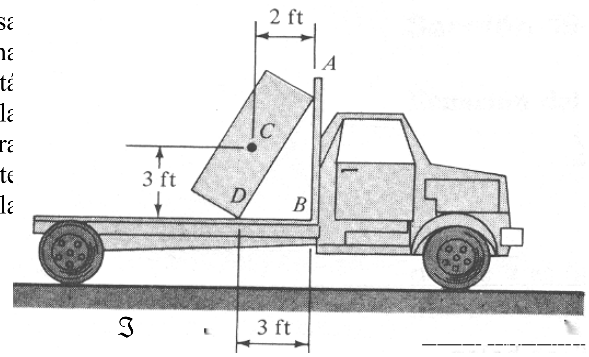
PROBLEMAS SOBRE CINETICA DE CUERPOS RIGIDOS EN MOVIMIENTO PLANO

4-1.- Una caja de 400 lb cuyo centro de masa está en C, se encuentra apoyada sobre una superficie sin fricción AB. El extremo D está sobre una superficie rugosa calcule: a) la máxima aceleración permisible del camión para evitar que la caja gire y b) el mínimo coeficiente de fricción para evitar que en la condición de la parte a) el extremo D deslice.



P4-1

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P4-1a):

2).- Relaciones cinéticas (cuerpo rígido en movimiento de traslación):

a).- Si:

$$\sum \bar{M}_D = \bar{\rho}_{DC} x\ ma\ \bar{i} = (\bar{i} + 3\ \bar{j}) x\ ma\ \bar{i}$$

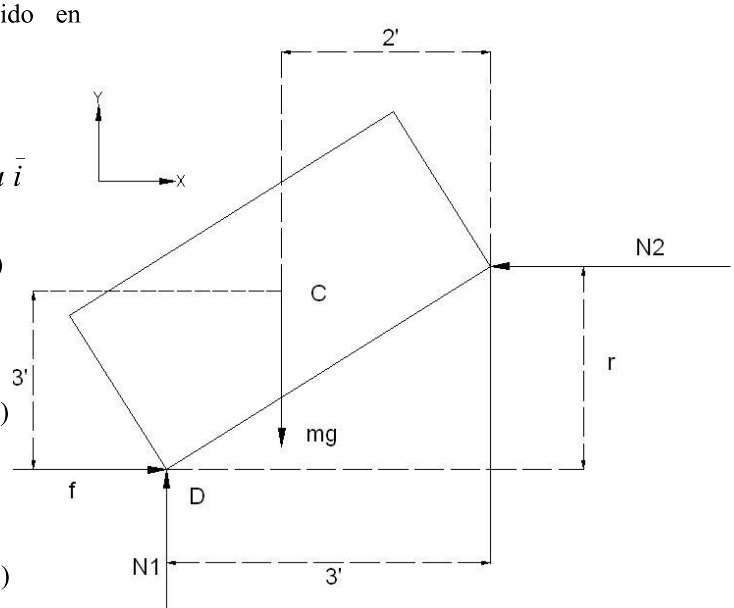
$$\sum \bar{M}_D = -3ma\ \bar{k} \qquad (1)$$

También:

$$\sum M_D \bar{k} = -mg * 1\ \bar{k} + N_2 r\ \bar{k} \qquad (2)$$

(1) = (2):

$$a = \frac{g}{3} - \frac{N_2 r}{3m} \qquad (3)$$



P4-1a

Cuando el giro es inminente $N_2 = 0$, luego la aceleración es máximo, en (3):

$$a_{max} = 10.73 \text{ pie/seg}^2$$

b).- Si:

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 - mg = 0 \quad N_1 = 400 \text{ lb}$$

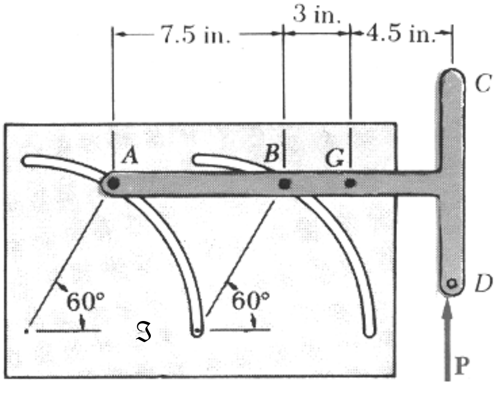
c).- Si:

$$\sum F_X = ma \quad \rightarrow \quad f - N_2 = ma\,, \ \text{(si, } N_2 = 0\text{)}$$

$$f = \mu\, N_1 = ma \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{400}{32.2 * 400} * 10.73$$

$$\mu = 0.333$$

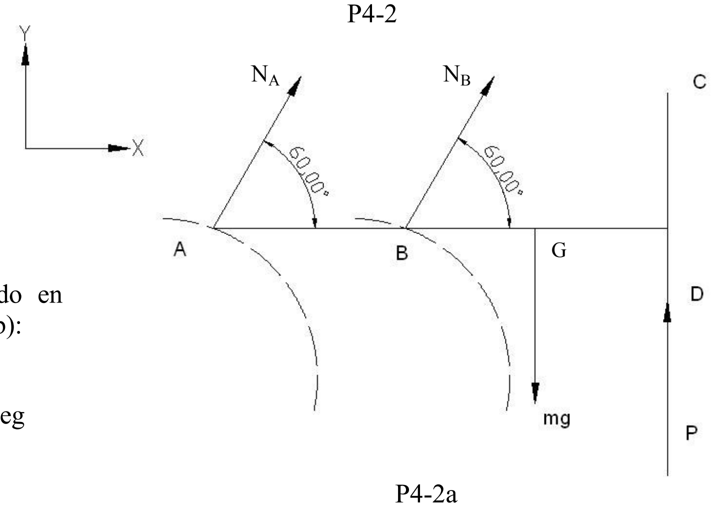
4-2.- La barra ABCD con forma de T es guiada por dos pasadores, que resbalan libremente en ranuras curvas con radio de 7.5 plg, la barra pesa 6 lb y su centro de masa se localiza en el punto G. Si en la posición que se indica la componente vertical de la velocidad de D es de 4 pies/seg hacia arriba y la componente vertical de la aceleración de D es cero, determínese el modulo de la fuerza P.



P4-2

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P4-2a):



P4-2a

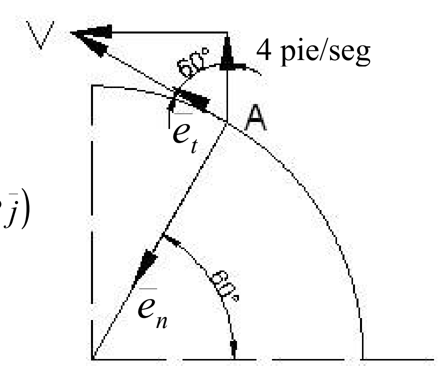
2).- Relaciones cinemáticas (cuerpo rígido en movimiento de traslación) (ver figura P4-2b):

$$\cos 60° = \frac{V_{VD}}{V} \quad \rightarrow \quad V = \frac{4}{0.5} = 8 \ \text{ pie/seg}$$

$$a_n = \frac{V^2}{7.5/12} = 102.4 \ \text{ pie/seg}$$

$$\bar{a} = \ddot{X}\,\bar{i} + \overset{0}{\ddot{Y}}\,\bar{j}$$

$$\bar{a} = a_t\left(-sen60°\bar{i} + \cos 60°\,\bar{j}\right) + a_n\left(-\cos 60°\bar{i} - sen60°\,\bar{j}\right)$$



P4-2b

Igualando componentes y operando:

$$0 = 0.5\, a_t - 88.68 \quad \rightarrow \quad a_t = 177.36 \ \text{ pie/seg}^2$$

$$\ddot{X} = -0.866\ a_t - 51.2 = -204.8 \quad \text{pie/seg}^2$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m\ddot{X}$$

$$0.5(N_A + N_B) = -\frac{6}{32.2} * 204.8$$

$$N_A + N_B = -76.32 \quad \text{lb} \qquad (1)$$

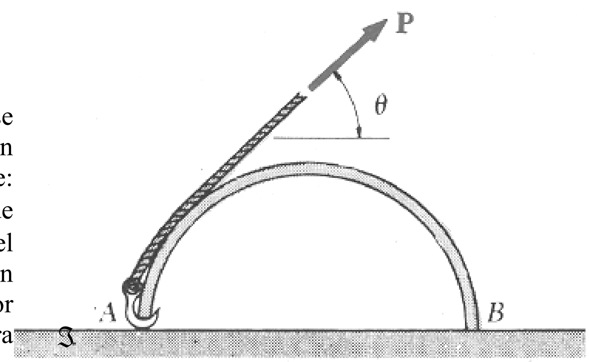
$$\sum F_Y = 0 \ \rightarrow \ 0.866(N_A + N_B) + P - w = 0$$

Reemplazando (1) y los valores correspondientes:

$$P = 6 + 76.32 * 0.866$$

$$P = 72.09 \quad \text{lb}$$

4-3.- Media sección de tubo de peso w = 200 lb se tira como se indica. Si los coeficientes de fricción estático y cinético en A y B, son respectivamente: $\mu_s = 0.5$ y $\mu_k = 0.4$, determínese: a) los valores de θ y P para los cuales es inminente tanto el deslizamiento como la volcadura, b) la aceleración del tubo si se incrementa levemente P y c) el valor de la componente normal de la reacción en A, para b).



P4-3

Solución

1).- Para el caso en que el movimiento es inminente (efectos de traslación y rotación son nulos):

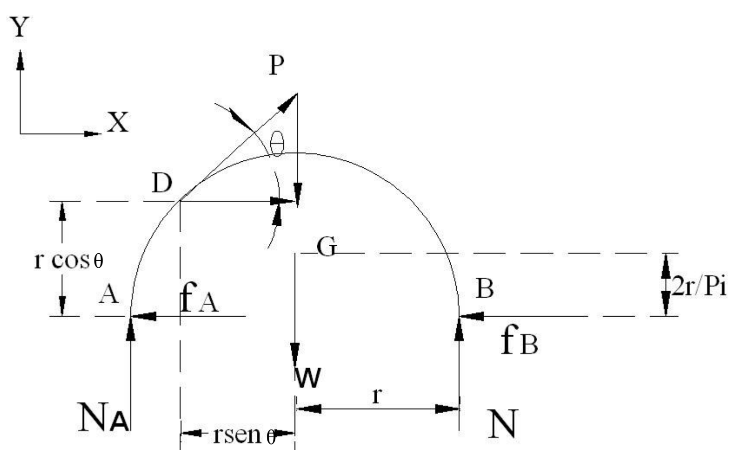
a).- D.C.L. (ver figura P4-3a):

Para el movimiento inminente:

$$N_A = f_A = 0 \ \text{ y } \ f_B = \mu_s N$$

b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = 0$$



P4-3a

$$P\cos\theta - \mu_s N = 0 \quad \rightarrow \quad P\cos\theta = \mu_s N \qquad (1)$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$Psen\theta + N - w = 0 \quad \rightarrow \quad Psen\theta = w - N \qquad (2)$$

$$\sum M_B = 0$$

$$wr - Psen\theta\ r(1+sen\theta) - P\cos\theta\ r\cos\theta = 0 \quad \rightarrow \quad w - Psen\theta - P\left(sen^2\theta + \cos^2\theta\right) = 0$$

De (1) y (2):

$$w - w + N - \frac{\mu_s N}{\cos\theta} = 0 \quad \rightarrow \quad \cos\theta = \mu_s = 0.5$$

Luego:

$$\theta = 60°$$

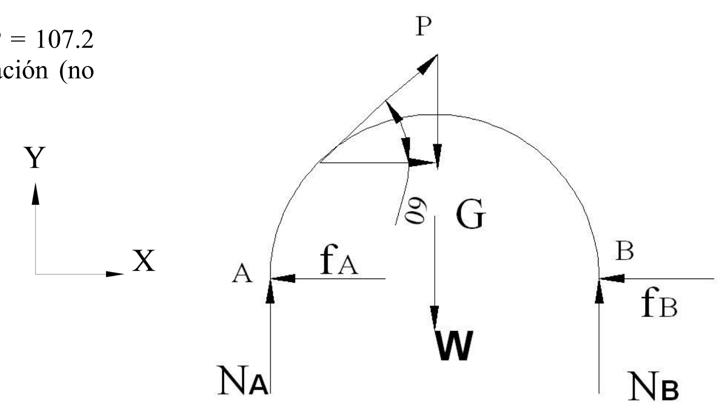
En (2) reemplazando (1):

$$Psen\theta = w - \frac{P\cos\theta}{\mu_s} \quad \rightarrow \quad P\mu_s sen\theta + P\cos\theta = \mu_s w \quad \rightarrow \quad P = \frac{\mu_s w}{\left(\mu_s sen\theta + \cos\theta\right)} = \frac{100}{0.933}$$

$$P = 107.2 \ \text{lb}$$

2).- Para el caso en donde θ = 60°, P = 107.2 lb y habrá solo movimiento de traslación (no hay incremento de θ):

a).- D.C.L. (ver figura P4-3b):



P4-3b

b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m\ddot{X}$$

$$P\cos\theta - \mu_K N_A - \mu_K N_B = m\ddot{X}$$

$$-0.4\left(N_A + N_B\right) = m\ddot{X} - 53.6 \qquad (1)$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad N_A + N_B - w + Psen\theta = 0 \quad \rightarrow \quad -\left(w - P\ sen\ \theta\right) = -\left(N_A + N_B\right)$$

$$N_A + N_B = 107.162 \qquad (2)$$

$$\sum \overline{M}_B = \bar{r}_{BG} \ x \ m\ddot{X} \ \bar{i}$$

$$-2N_A r + wr - Psen\theta \ r \ (1 + sen\theta) - P\cos\theta \ r\cos\theta = -\frac{2r}{\pi} m\ddot{X}$$

$$-2N_A + (w - Psen\theta) - P(\cos^2\theta + sen^2\theta) = -\frac{2}{\pi} m\ddot{X}$$

$$N_B - N_A = 107.2 - 3.954\ddot{X} \qquad (3)$$

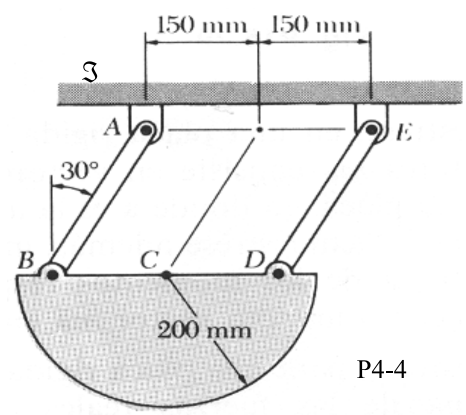
(2) en (1):

$$-0.4 * 107.162 = \frac{200}{32.2}\ddot{X} - 53.6 \quad \rightarrow \quad \ddot{X} = 1.728 \ \text{pie/seg}^2$$

(2) – (3):

$$\begin{aligned} N_A + N_B &= 107.162 \\ N_A - N_B &= -(107.2 - 6.83) \\ \hline N_A &= 3.4 \ \text{lb} \end{aligned}$$

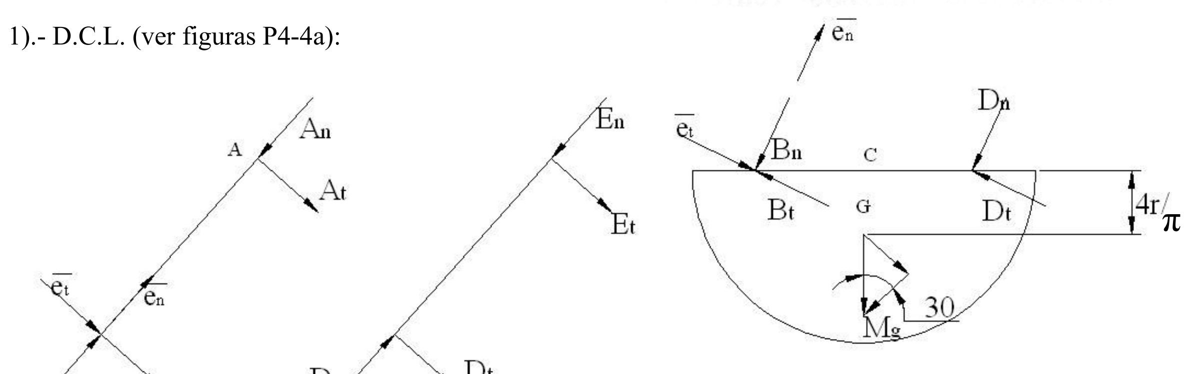
4-4.- Una placa semicircular uniforme de 8 kg de masa se sostiene mediante dos eslabones AB y DE, de longitud de 250 mm cada uno y se mueve bajo su propio peso. Despreciando la masa de los eslabones y sabiendo que la posición mostrada la velocidad de la placa es de 1.2 m/seg, determínese la fuerza en cada eslabón.



P4-4

Solución

1).- D.C.L. (ver figuras P4-4a):



P4-4a

(a) (b) (c)

2).- Relaciones cinéticas (el cuerpo placa tiene movimiento de traslación y los eslabones son de masa despreciable):

a).- En (a) y (b):

$$\sum M_A = 0 \quad \rightarrow \quad \ell B_t = 0 \quad \rightarrow \quad B_t = 0$$

$$\sum M_E = 0 \quad \rightarrow \quad \ell D_t = 0 \quad \rightarrow \quad D_t = 0$$

b).- En (c):

$$\sum F_n = m\frac{V^2}{\rho_c}$$

$$-B_n - D_n - 8*9.81\cos 30° = 8*\frac{1.2^2}{0.25}$$

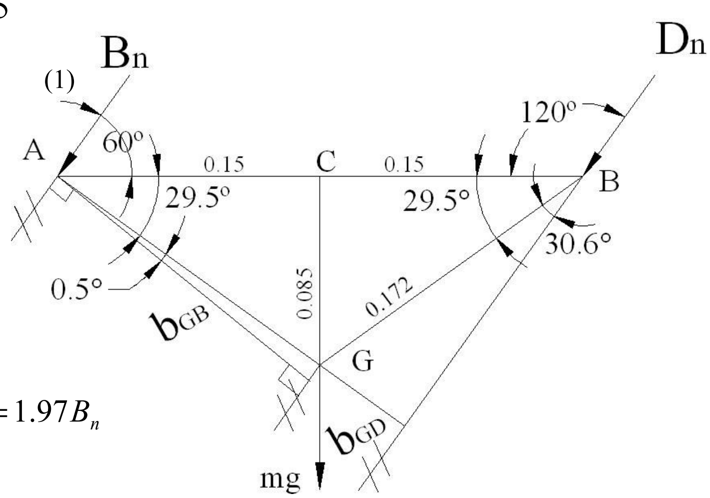
$$B_n + D_n = -114.046 \quad (1)$$

$$\sum M_G = 0$$

Si los brazos de palanca con respecto al centro de masa G son (ver figura P4-4b):

$$b_{GB} \cong 0.172 \text{ m y } b_{GD} = 0.0873 \text{ m}$$

$$0.172\, B_n - 0.0873 D_n = 0 \quad \rightarrow \quad D_n = 1.97 B_n$$



P4-04b

En (1):

$$2.97 B_n = -114.046 \quad \rightarrow \quad B_n = -38.4 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad D_n = -75.65 \text{ N}$$

Luego:

$R_B = 38.4$ N ↙ 30° y $R_D = 75.65$ N ↙ 30° (ambas con una línea vertical a su derecha)

c).- En (a) y (b):

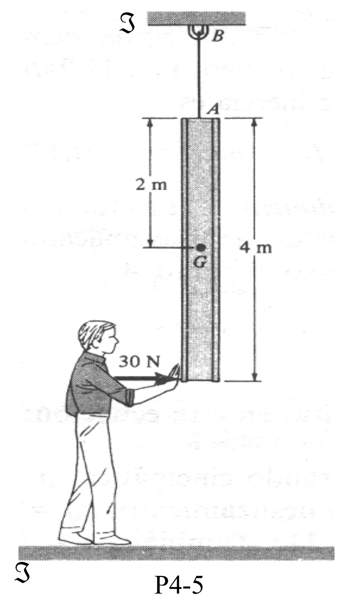
$$\sum F_{n\,(a)} = 0 \quad \rightarrow \quad A_n = B_n\,, \quad \sum F_{n\,(b)} = 0 \;\rightarrow\; E_n = D_n$$

$$\sum F_{t\,(a)} = 0 \quad \rightarrow \quad A_t = B_t = 0\,, \quad \sum F_{t\,(b)} = 0 \;\rightarrow\; E_t = D_t = 0$$

Luego:

$R_A = 38.4$ N ↗ 30° y $R_E = 75.65$ N ↗ 30°
(Ambas con una línea vertical a su derecha)

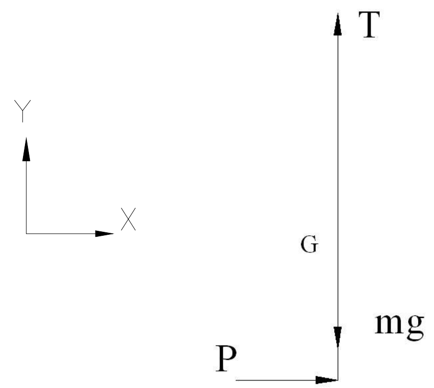
4-5.- La vigueta delgada de 200 kg está suspendida de un cable en su extremo como se indica. Si el hombre empuja sobre su otro extremo con una fuerza horizontal P = 30 N, determine la aceleración inicial de su centro de masa G, la aceleración angular de la vigueta y la tensión en el cable AB.



P4-5

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P4-5a):



P4-5a

2).- Relaciones cinéticas (el cuerpo parte del reposo, su centro instantánea de aceleración nula es B y solo tendrá aceleración tangencial, que es horizontal):

$$\sum F_X = m\, a_G \quad \rightarrow \quad 30 = 200\, a_G$$

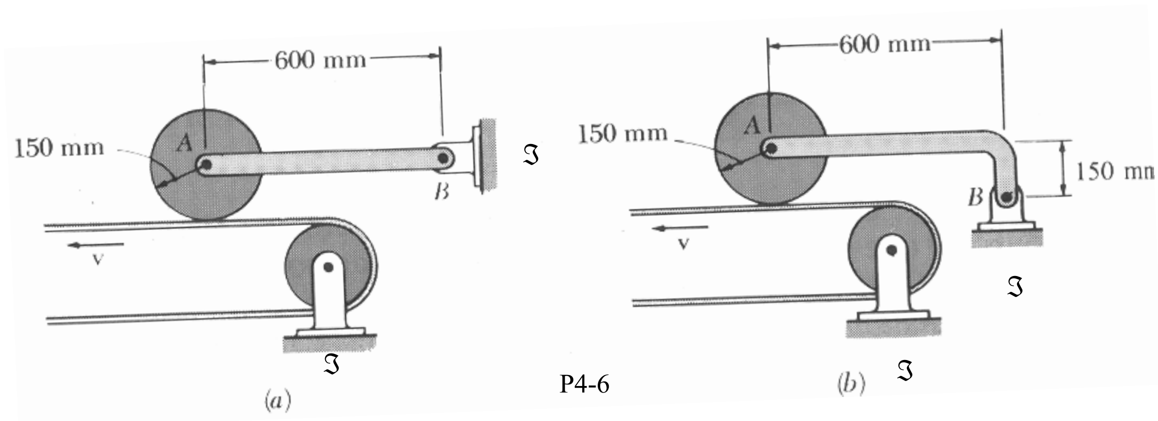
$$a_G = 0.15 \text{ m/seg}^2$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad T = mg \quad \rightarrow \quad T = 1962 \text{ N}$$

$$\sum M_G = I_G \alpha \quad \rightarrow \quad 30 * 2 = \frac{1}{12} * 200 * 4^2 \alpha$$

$$\alpha = 0.225 \text{ rad/seg}^2$$

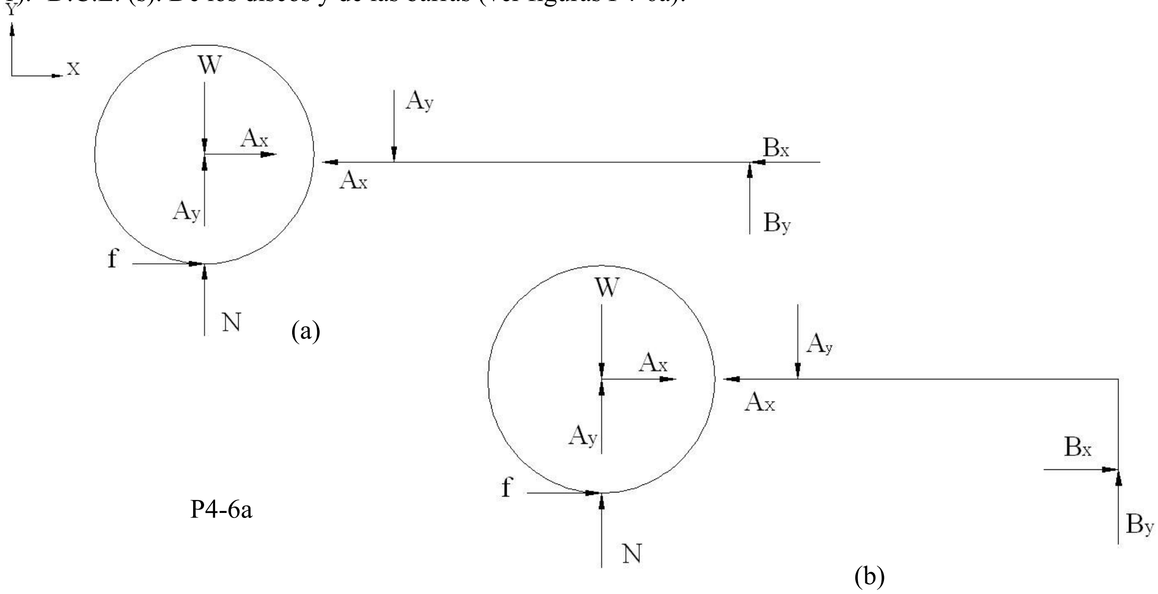
4-6.- El disco de 6 kg se encuentra en reposo cuando es puesto en contacto con una banda transportadora que se mueve con una velocidad constante. El eslabón AB que une el centro del disco con el soporte B es de peso despreciable. Si sabemos que el coeficiente de rozamiento cinético entre el disco y la banda es de 0.30, obténgase para cada una de las distribuciones indicadas en las figuras P4-06, la aceleración angular del disco mientras éste desliza.



P4-6

Solución

1).- D.C.L. (s). De los discos y de las barras (ver figuras P4-6a):



P4-6a

Los dos discos tienen movimientos alrededor de un eje fijo, que pasa por A

2).- Relaciones cinéticas en el primer caso:

$$\sum M_B = 0 \;\rightarrow\; A_Y \ell = 0 \;\rightarrow\; A_Y = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \;\rightarrow\; N = w$$

Si:

$f = \mu_K N = 0.3mg$ (hay resbalamiento)

$$\sum M_A = I_A\alpha \quad \rightarrow \quad f\,r = \frac{1}{2}mr^2\alpha \quad \rightarrow \quad 0.3mg = \frac{1}{2}mr\alpha$$

$$\alpha = \frac{0.6*9.81}{0.15} = 39.24 \ \circlearrowleft \ \text{rad/seg}^2$$

3).- Relaciones cinéticas para el segundo caso:

$$\sum M_B = 0 \quad \rightarrow \quad 0.6A_Y + 0.15A_X = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = -4A_Y \qquad (1)$$

$$\sum F_X = 0 \quad \rightarrow \quad f + A_X = 0 \quad \rightarrow \quad f = 4A_Y \qquad (2)$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad N - w + A_Y = 0 \quad \rightarrow \quad N = w - A_Y \qquad (3)$$

Si: $f = 0.3N$, (3) en (2)

$$0.3w - 0.3A_Y = 4A_Y \quad \rightarrow \quad A_Y = 4.1 \ \text{Newton}$$

Luego:

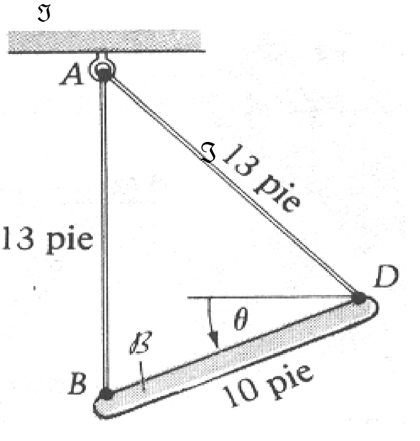
$$f = 16.4 \ \text{Newton}$$

$$\sum M_A = I_A\alpha \quad \rightarrow \quad f\,r = \frac{1}{2}mr^2\alpha$$

$$16.4 = \frac{1}{2}*6*0.15\alpha$$

$$\alpha = 36.44 \ \circlearrowleft \ \text{rad/seg}^2$$

4-7.- Una barra delgada $\Re$ de 64.4 lb de peso está unida por cables sin masas a un pivote fijo A, como se muestra en la figura. El sistema oscila alrededor de A como si fuera un péndulo. En θ = 0°, la velocidad angular es de 2 rad/seg en sentido antihorario, cuando el cable AD se rompe. Encuentre la tensión en el cable AB en esté instante.



P4-7

Solución

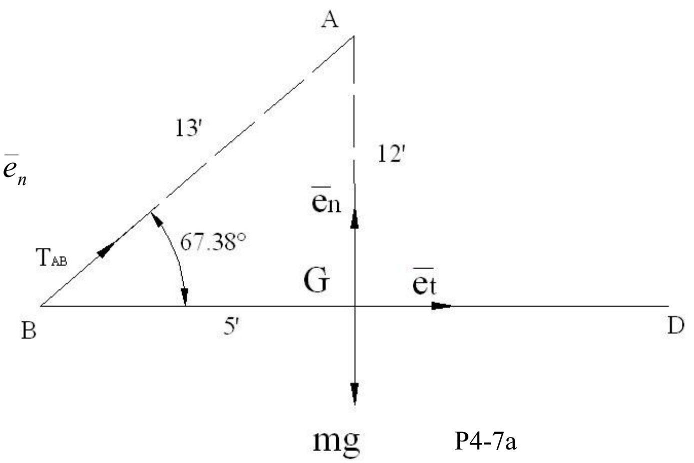
1).- D.C.L., para el instante que se rompe el cable AD (ver figura P4-7a):

2).- Relaciones cinemáticas:

$$\bar{a}_G = a_t \bar{e}_t + a_n \bar{e}_n$$

$$\bar{a}_G = a_t \bar{e}_t + \omega^2 r_{AG}\ \bar{e}_n = a_t \bar{e}_t + 4*12\ \bar{e}_n$$

$$\bar{a}_G = a_t \bar{e}_t + 48\ \bar{e}_n \quad \text{(pie/seg}^2\text{)}$$



P4-7a

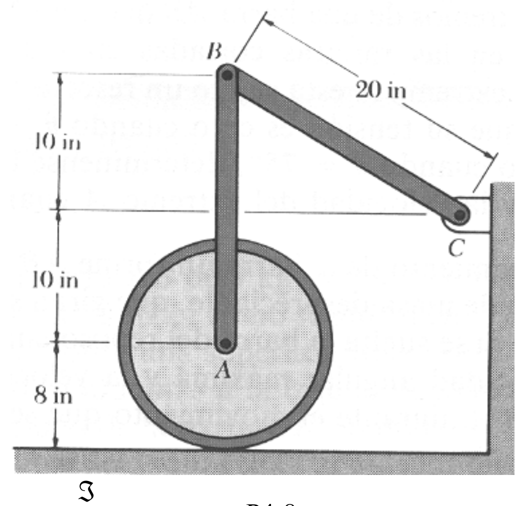
3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_n = m\ a_n$$

$$T_{AB}\ sen\ 67.38° - mg = ma_n$$

$$T_{AB} = \frac{m\ (g+48)}{sen\ 67.38°} = 173.77 \quad \text{lb}$$

4-8.- La rueda A pesa 15 lb, tiene un radio central de giro de 6 plg y rueda sobre la superficie horizontal. Cada una de las barras uniformes AB y BC tienen 20 plg de longitud y pesan 8 lb cada uno. Si el punto A se mueve ligeramente hacia a la izquierda y se suelta, obténgase la velocidad de dicho punto cuando la barra BC pasa por la posición horizontal.

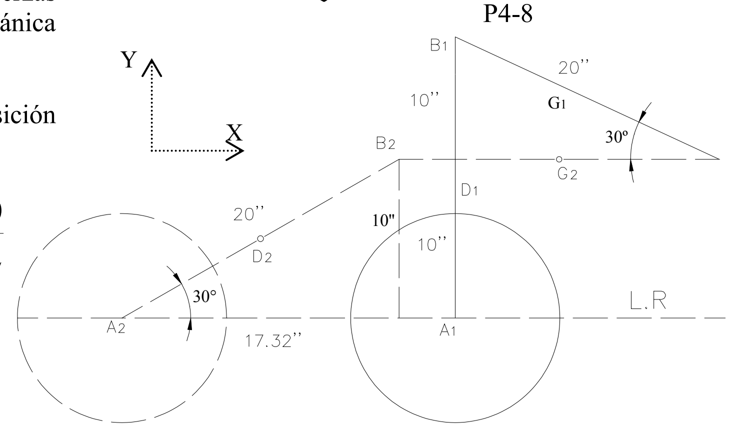


P4-8

Solución

Las únicas fuerzas que producen trabajo son los pesos y estos son fuerzas conservativas, luego la energía mecánica se conserva.

1).- Cálculo de las energías en la posición inicial y final (ver figura P3-8a):



P4-8a

$$U_1 = \frac{8\ (10+10\ sen30°)}{12} + 8*\frac{10}{12}$$

$$U_1 = 16.67 \quad \text{lb-pie}$$

$$E_{K1} = 0$$

$U_2 = 8 * \frac{10}{12} + 8 * \frac{10}{12} sen30° = 10$ lb-pie

$$E_{K2} = \frac{1}{2} m_D V_{A2}^2 + \frac{1}{2} I_A \left(\frac{V_{A2}}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} m_b V_{D2}^2 + \frac{1}{2} I_G \omega_{A2D2}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_{B2C}^2 \qquad (1)$$

2).- Relaciones cinemáticas:

$$\bar{V}_{B2} = \bar{V}_{A2} + \omega_{A2B2} \bar{k} \ x \ \bar{r}_{A2B2}$$

$$-V_{B2} \bar{j} = -V_{A2} \bar{i} + \omega_{A2B2} \bar{k} \ x \ (17.32 \ \bar{i} + 10 \ \bar{j})$$

Igualando componentes y operando:

$$0 = -V_{A2} - 10\omega_{A2B2} \quad \rightarrow \quad \omega_{A2B2} = -\frac{V_{A2}}{10}$$

$$-V_{B2} = 17.32 \ \omega_{A2B2} \quad \rightarrow \quad V_{B2} = 1.732 \ V_{A2}$$

$$\bar{V}_{D2} = -V_{A2} \bar{i} - \frac{V_{A2}}{10} \bar{k} \ x \ (8.66 \ \bar{i} + 5 \bar{j}) = -0.5 \ V_{A2} \bar{i} - 0.866 \ V_{A2} \bar{j}$$

$$\left| \bar{V}_{D2} \right|^2 = V_{A2}^2$$

$$\omega_{B2C} = \frac{V_{B2}}{r_{CB2}} = \frac{1.732 \ V_{A2}}{20} = 0.0866 \ V_{A2}$$

3).- Por conservación de la energía mecánica:

En (1):

$$E_{K2} = \frac{1}{2} \left(m_D V_{A2}^2 + m_D 6^2 * \frac{V_{A2}^2}{64} + m_b V_{A2}^2 + \frac{1}{12} m_b 20^2 * \frac{V_{A2}^2}{100} + \frac{1}{3} m_b 20^2 * 0.0866^2 V_{A2}^2 \right)$$

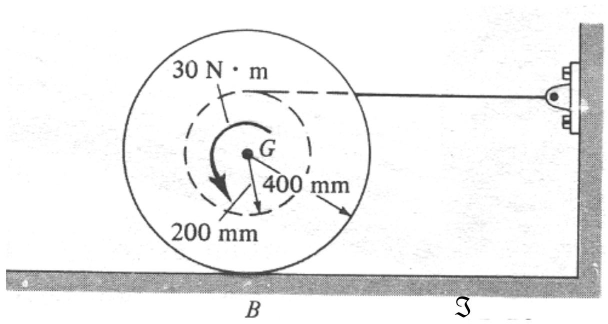
$$E_{K2} = 0.03 \ V_{A2}^2 + 1.167 \ V_{A2}^2 = 1.197 \ V_{A2}^2$$

Si: $E_{M1} = E_{M2}$

$$16.67 = 10 + 1.197\, V_{A2}^2$$

$$\therefore \quad V_{A2} = 2.36 \text{ pie/seg} \quad (\leftarrow)$$

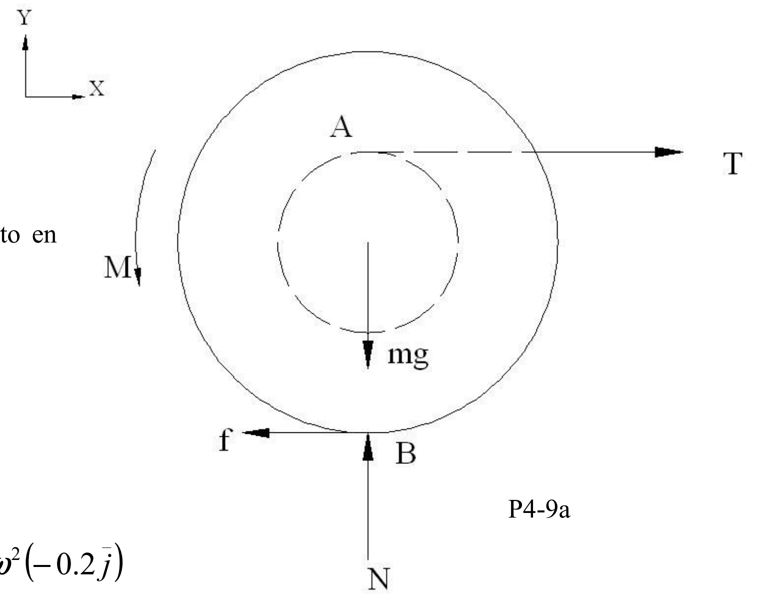
4-9.- El carrete y el alambre enredado alrededor de su eje tienen una masa de 20 kg y un radio de giro centroidal K_G = 250 mm. Si el coeficiente de fricción en el suelo es μ_B = 0.1. Determine la aceleración angular del carrete cuando se aplica un par de M = 30 N-m.



P4-9

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P4-9a):



P4-9a

2).- Relaciones cinemáticas:

El movimiento se da con resbalamiento en B, y no así en A, luego:

$$\bar{V}_A = \bar{0} \quad \text{y} \quad a_{At} = 0$$

Por lo que:

$$\bar{a}_G = \bar{a}_A + \alpha\,\bar{k}\; x\; \bar{r}_{AG} - \omega^2 \bar{r}_{AG}$$

$$\bar{a}_G = -0.2\omega^2 \bar{j} + \alpha\,\bar{k}\; x\left(-0.2\bar{j}\right) - \omega^2\left(-0.2\bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_G = 0.2\alpha\,\bar{i} \qquad (1)$$

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_Y = m\ddot{Y}_G = 0 \quad \rightarrow \quad N = mg = 20 * 9.81 = 196.2 \text{ Newton}$$

Si:

$$f = \mu\, N = 0.1 * 196.2 = 19.62 \text{ Newton}$$

$$\sum F_X = m\ddot{X}_G = 4\alpha$$

$$-19.62 + T = 4\alpha \quad \rightarrow \quad T = 19.62 + 4\alpha \qquad (2)$$

$$\sum M_G = I_G \alpha$$

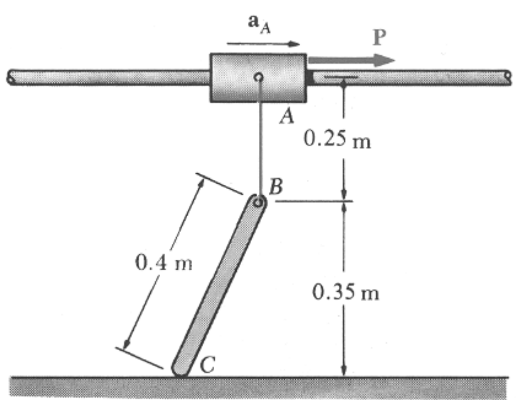
$$30 - 0.2\,T - 0.4 * 19.62 = 20 * 0.25^2\,\alpha \qquad (3)$$

(2) en (3) :

$$18.232 - 0.8\,\alpha = 1.25\,\alpha$$

$$\alpha = 8.894 \quad \text{rad/seg}^2$$

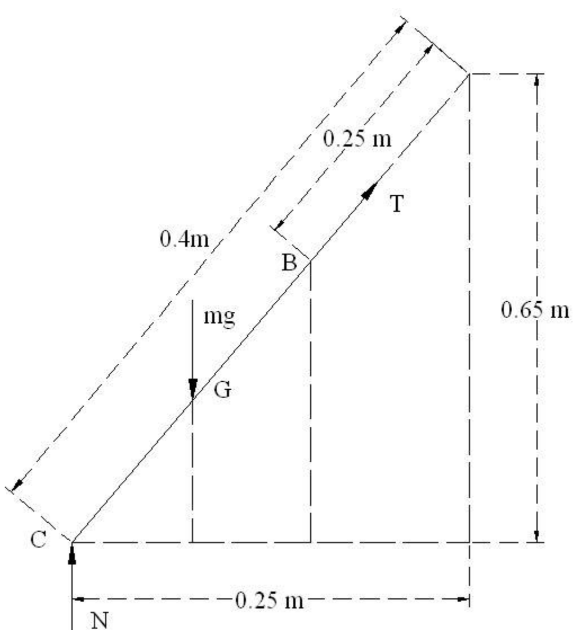
4-10.- Una barra BC uniforme de 4 kg de masa, está unida a un collarín en A por medio de la cuerda AB de 0.25 m. Despreciando la masa del collarín, masa de la cuerda, y las fricciones; determínese: a) la aceleración constante $\bar{a}_A$ mínima a la cual la cuerda y la barra forman una línea recta y b) la tensión correspondiente en la cuerda.



P4-10 ℑ

Solución

1).- D.C.L., cuando la barra y la cuerda forman una línea (ver figura P4-10a):



P4-10a

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_C \bar{k} = I_C \alpha\,\bar{k} + \bar{\rho}_{CG} x \bar{a}_C$$

$$-mg\frac{0.4}{2} * \frac{0.25}{0.65}\bar{k} = I_C \alpha\,\bar{k} + \left(0.077\,\bar{i} + 0.1846\,\bar{j}\right) x\; m\bar{a}_C \qquad (1)$$

Para que $\bar{a}_A$ sea mínima la barra debe tener un movimiento de traslación, luego:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A = a_A \bar{i} \quad y \quad \bar{\alpha} = \bar{0}$$

En (1):

$$-0.077\ mg = -0.1846m\ a_A \quad \rightarrow \quad 0.077 * 0.981 = 0.1846\ a_A$$

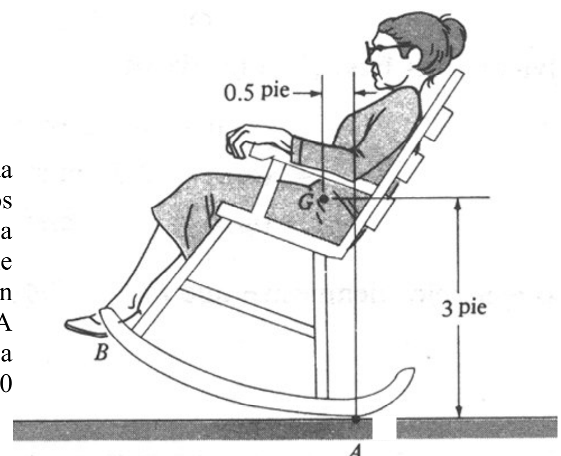
$$a_A = 4.092 \ \text{ m/seg}^2$$

$$\sum F_X = ma_A \quad \rightarrow \quad \frac{0.25}{0.65}T = 4 * 4.092$$

$$0.385T = 16.368$$

$$T = 42.51 \ \text{ Newton}$$

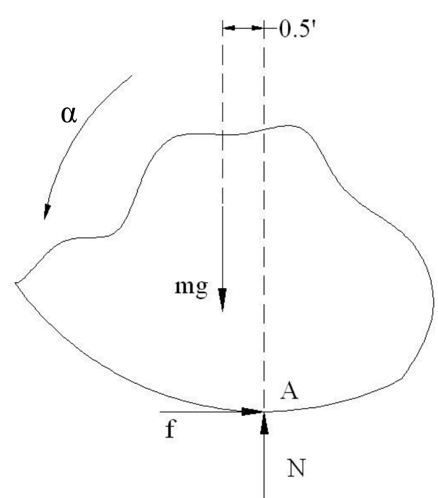
4-11.- Una mujer está sentada en una posición rígida sobre una mecedora conservando sus pies sobre los travesaños del fondo en B. En el instante indicado ella ha llegado a una posición extrema hacia atrás y tiene una velocidad angular cero. Determine su aceleración angular hacia atrás y la fuerza de fricción en A necesario para impedir que la mecedora se deslice. La mujer y la mecedora tienen un peso combinado de 180 lb y un radio de giro de K_G = 2.2 pies.



P4-11

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P4-11a):



P4-11a

2).- Relaciones cinemáticas: La aceleración del centro instantáneo de velocidad nula (en todos los casos), depende solo de las velocidades angulares, por lo que, en el instante pedido $V_A = a_A = 0$, luego:

$$\bar{a}_G = \overbrace{\bar{a}_A}^{0} + \alpha\ \bar{k} x\ \bar{r}_{AG}$$

$$\bar{a}_G = \alpha\ \bar{k}\ x\left(-0.5\ \bar{i} + 3\ \bar{j}\right) = -\alpha\left(3\ \bar{i} + 0.5\ \bar{j}\right) \quad (1)$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_A \bar{k} = I_{ZZ}^A \alpha\ \bar{k} + \bar{\rho}_{AG} x\ m\overbrace{a_A}^{0}$$

$$0.5\cancel{m}g = \cancel{m}\left(K_G^2 + d^2\right)\alpha = \left(2.2^2 + 0.5^2 + 3^2\right)\alpha = 14.09\ \alpha$$

$$\alpha = 1.14 \quad \text{rad/seg}^2$$

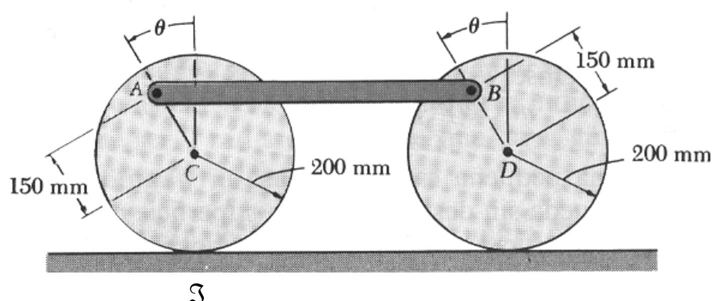
$$\sum F_X = m\ddot{X}_G \quad \rightarrow \quad f = m\ddot{X}_G \qquad (2)$$

(1) en (2) :

$$f = \frac{180}{32.2}(-3*1.14) = -19.12 \quad \text{lb}$$

$$f = 19.12 \quad \text{lb } (\leftarrow)$$

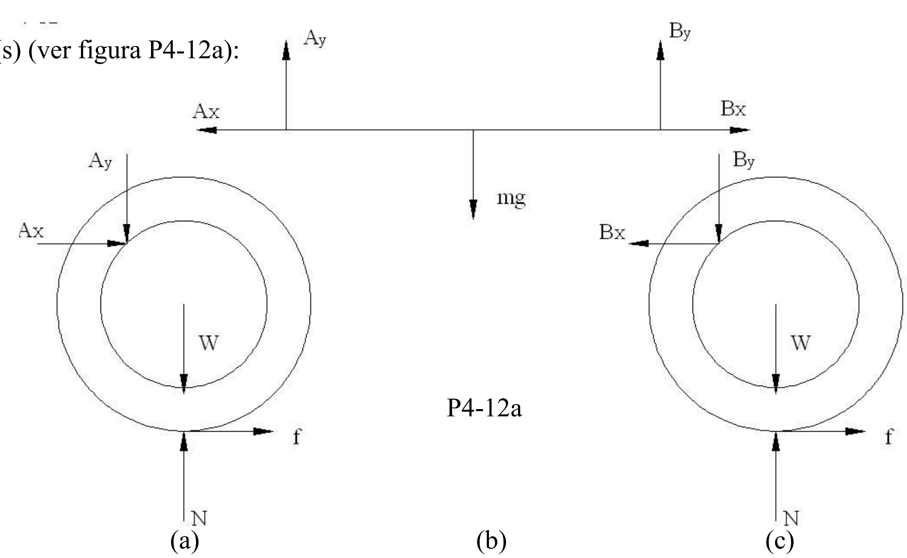
4-12.- Una barra AB de 9 kg está unida por pasadores sin fricción a dos discos uniformes de 6 kg como se indica. El conjunto rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal. Si el conjunto se suelta del reposo cuando θ = 60°, determínese: a) la velocidad angular de los discos cuando θ = 180° y b) la fuerza ejercida por la superficie sobre cada disco en ese instante.



P4-12

Solución

1).- D.C.L.(s) (ver figura P4-12a):

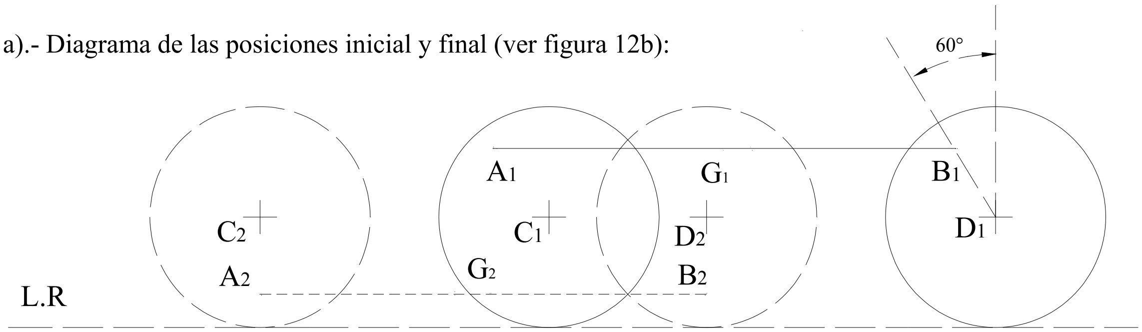


P4-12a

2).- Las únicas fuerzas en el sistema que producen trabajo son conservativas, por que hay conservación de la energía mecánica, además la barra tiene siempre movimiento de traslación:

$$E_{M1} = E_{M2}$$

a).- Diagrama de las posiciones inicial y final (ver figura 12b):



P4-12b

b).- Por conservación de la energía mecánica:

$$U_1 = 2m_D g * 0.2 + m_b g\,(0.2 + 0.15\cos 60°) \quad \rightarrow \quad U_1 = 0.4m_D g + 24.28$$

$$E_{K1} = 0$$

$$U_2 = 0.4m_D g + m_b g(0.2 - 0.15) \quad \rightarrow \quad U_2 = 0.4m_D g + 4.415$$

$$E_{K2} = 2 * \frac{1}{2} m_D V_C^2 + 2 * \frac{1}{2}\omega_D^2 I_C + \frac{1}{2} m_b V_{A2}^2$$

$$E_{K2} = (0.2\omega)^2 6 + \frac{6 * 0.2^2}{2}\omega^2 + \frac{1}{2} * 9\,(0.05\omega)^2 \quad \rightarrow \quad E_{K2} = 0.37\omega^2$$

Luego:

$$0.4m_D g + 24.28 = 0.4m_D g + 4.415 + 037\omega^2 \quad \rightarrow \quad \omega = 7.327 \quad \text{rad/seg}$$

3).- Cálculo de la fuerza (normal) ejercida por la superficie del piso en el instante pedido:

a).- Relaciones cinemáticas, parar la barra AB (en movimiento de traslación), en cualquiera de los discos:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_D + \alpha\,\bar{k}\ x\ \bar{r}_{DA} - \omega^2 \bar{r}_{DA} \quad \rightarrow \quad \bar{a}_A = 0.2\omega^2\,\bar{j} + \alpha\,\bar{k}\ x\ 0.05\bar{j} - 0.05\omega^2\,\bar{j}$$

$$\bar{a}_A = -0.05\alpha\,\bar{i} + 8.05\,\bar{j}$$

b).- Para el sistema:

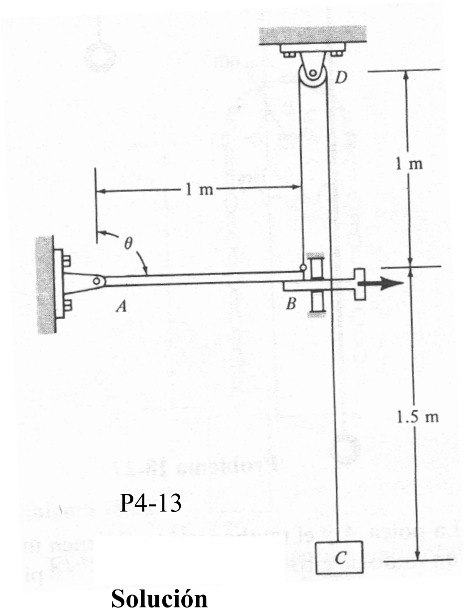
$$\sum F_Y = m_D \overbrace{\ddot{Y}_C}^{0} + m_D \overbrace{\ddot{Y}_D}^{0} + m_b \ddot{Y}_G$$

$$2N - 2w_D - w_b = m_b \ddot{Y}_G$$

$$2N = 206.01 + 9 * 8.05$$

$N = 139.23$ Newton

4-13.- La barra uniforme AB tiene una masa de 20 kg y está articulada en A. Si se quita el apoyo en B (θ = 90°), determine la velocidad del bloque C de 5 kg, en el instante en que la barra gira hacia abajo a θ = 150°. Desprecie la masa y el tamaño de la polea en D.

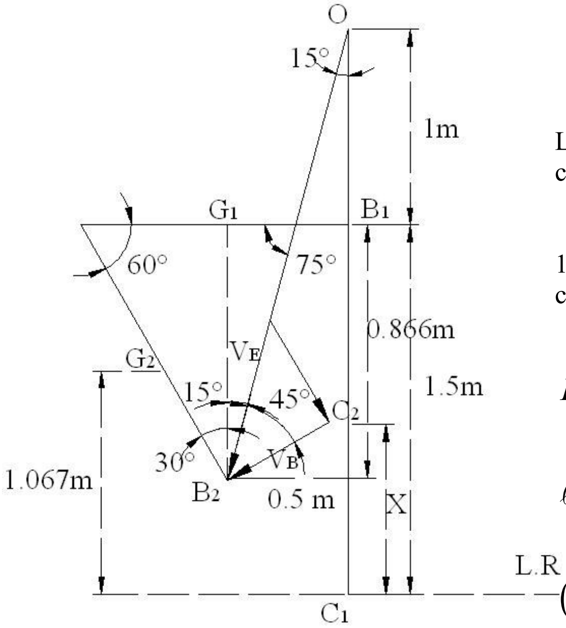


P4-13

Solución

Las únicas fuerzas que producen trabajo son conservativas, la energía mecánica se conserva.

1).- Diagrama de las posiciones inicial y final, y cálculos elementales:



P4-13a

$$L = 1 + 1 + 1.5 = 3.5 \text{ m}$$

$$\ell^2 = 1.866^2 + 0.5^2 \quad \to \quad \ell = 1.932 \text{ m}$$

$$(1.5 - X) + 1 + 1.932 = 3.5 \quad \to \quad X = 0.932 \text{ m}$$

2).- Por conservación de la energía mecánica:

$$E_{M1} = E_{M2}$$

$U_1 = 1.5 * 20 * 9.81 = 294.3$ Joule

$$E_{K1} = 0$$

$$U_2 = 1.067*20*9.81 + 0.932*5*9.81 \quad \rightarrow \quad U_2 = 255.06 \text{ Joule}$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2} I_A \omega^2 + \frac{1}{2} m_C V_{C2}^2 \quad \rightarrow \quad E_{K2} = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * 20 * 1^2 \left(\frac{\sqrt{2}\, V_C}{2*1} \right)^2 + \frac{1}{2} * 5\, V_C^2$$

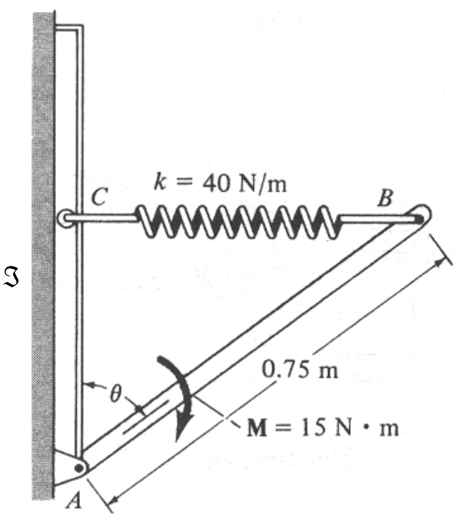
$$E_{K2} = 4.167\, V_C^2 \text{ Joule}$$

Luego:

$$294.3 = 255.06 + 4.167\, V_C^2$$

$$V_C = 3.07 \text{ m/seg}$$

4-14.- La barra AB de 10 kg está articulada en A y sujeta a la acción de un par M = 15 N-m. Si la barra se suelta desde el reposo cuando el resorte tiene su longitud libre, en θ = 30°, determine la velocidad angular de la barra en el instante en que θ = 60°, conforme gira la barra el resorte siempre se conserva horizontal, debido al apoyo del rodillo C.

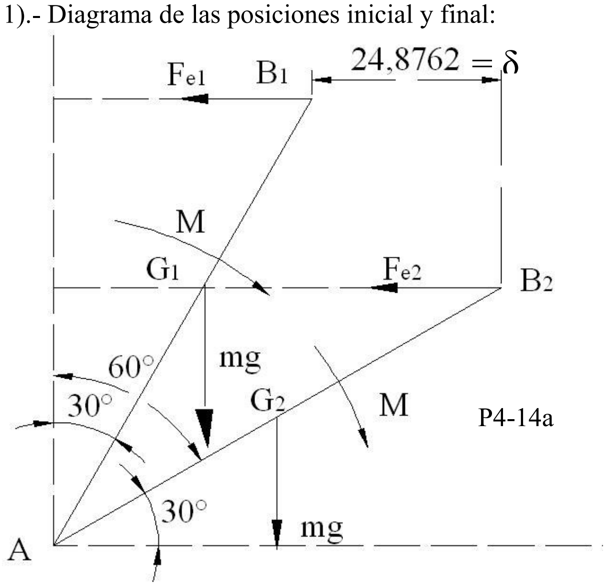


P4-14

Solución

Por el principio de trabajo y energía cinética.

1).- Diagrama de las posiciones inicial y final:



P4-14a

2).- Trabajo y energía cinética de (1) a (2):

$$W_{1-2} = \Delta E_K$$

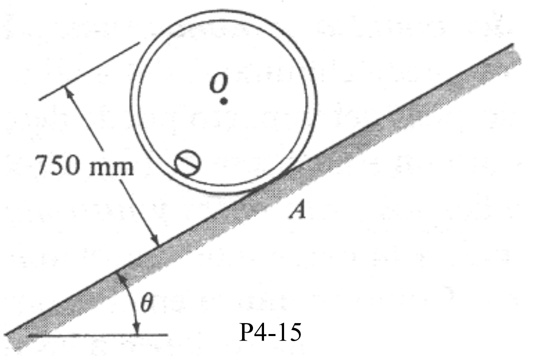
$$W_{1-2g} + W_{1-2M} + W_{1-2e} = E_{K2} - \overbrace{E_{K1}}^{0}$$

$$mg\frac{\ell}{2}\left(sen60° - sen30°\right) + M\left(\theta_2 - \theta_1\right) - \frac{1}{2}K\delta^2 = \frac{1}{2}I_A\omega^2$$

$$98.1 * \frac{0.75}{2}\left(0.8666 - 0.5\right) + 15\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} * 40 * 0.2745^2 = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} 10 * 0.75^2\,\omega^2$$

$\omega = 4.59$ rad/seg

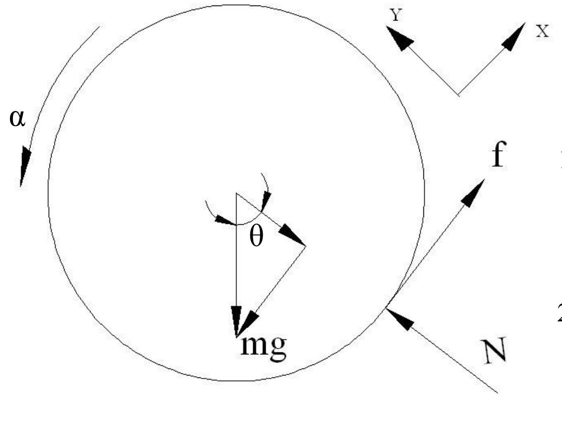
4-15.- El tambor de 50 kg, que tiene un radio de giro de K_0 = 180 mm, rueda a lo largo de un plano inclinado para el cual el coeficiente de fricción es μ = 0.2. Si el tambor se suelta desde el reposo, determinar el ángulo θ del plano inclinado de manera que ruede sin deslizar en A.



P4-15

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P4-15a):



P4-15a

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_A \bar{k} = I_A \alpha\, \bar{k} + \bar{\rho}_{AG} x m \overbrace{\bar{a}_A}^{0}$$

$$mg\ sen\theta\ r = m\left(K_O^2 + r^2\right)\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{g\ sen\theta\ r}{K_O^2 + r^2} \tag{1}$$

$$\sum F_X = m\ddot{X}_G \quad \rightarrow \quad f - mg\ sen\theta = -m\alpha\, r$$

$$f = m\left(g\ sen\theta - \frac{g\ sen\theta\ r^2}{K_O^2 + r^2}\right) \tag{2}$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad N = mg\ \cos\theta \tag{3}$$

3).- La condición extrema (la rueda está a punto de deslizar), se da cuando:

$$f = \mu N \tag{4}$$

Reemplazando (2) y (3) en (4):

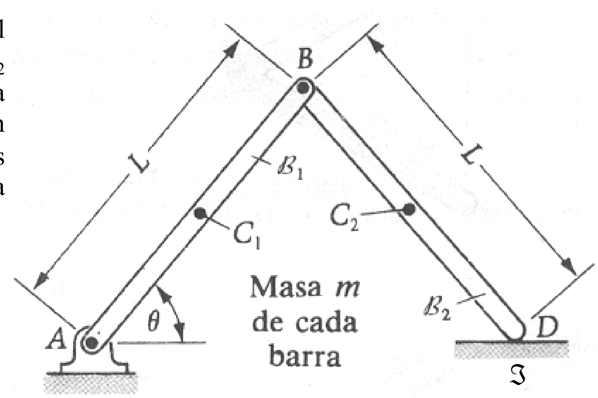
$$mg\ sen\theta\left(\frac{K_O^2}{K_O^2 + r^2}\right) = mg\ \cos\theta\ \mu$$

$$tg\theta = \frac{\left(K_O^2 + r^2\right)}{K_O^2}\mu = \frac{0.18^2 + 0.375^2}{0.18^2} * 0.2 = 1.068$$

Luego:

$$\theta = 46.88° \cong 46.9°$$

4-16.- La barra $\Re_1$ está articulada sin fricción en el soporte A, así como en el punto B al cuerpo $\Re_2$ (ver figura). El extremo C resbala sobre una superficie lisa horizontal. Si C parte del reposo en $\theta = \theta_0$. Determine las velocidades angulares de las barras justo antes de que ambas alcancen la posición horizontal. Si la masa de cada barra es *m*.

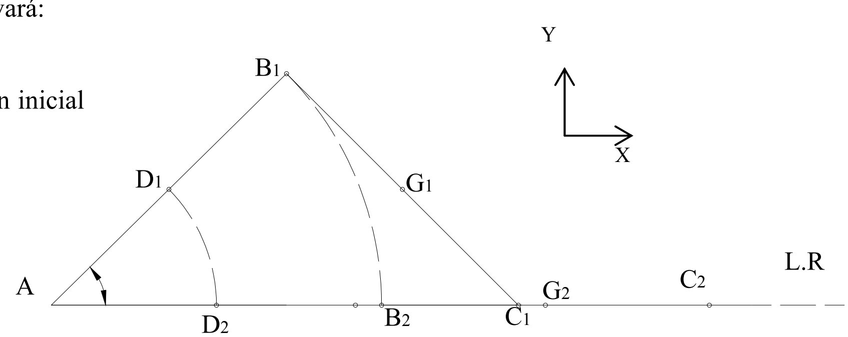


P4-16

Solución

Las únicas fuerzas que producen trabajo en el sistema son los pesos y estos son conservativos, luego la energía mecánica se conservará:

1).- Diagrama de la posición inicial y final (ver figura P4-16a):



P4-16a

2).- Relaciones cinemáticas:

a).- Velocidad de C en (2):

$$\overline{V}_C = V_C\overline{i} = \overline{V}_B + \omega_2\overline{k}\ x\ L\ \overline{i} = -\omega_1\overline{k}\ x\ L\ \overline{i} + \omega_2\overline{k}\ x\ L\ \overline{i} = -(\omega_1 - \omega_2)L\ \overline{j}$$

Igualando componentes:

$$0 = \omega_1 - \omega_2 \quad \rightarrow \quad \omega_1 = \omega_2$$

b).- Velocidad de G en (2):

$$\overline{V}_{G2} = \overline{V}_B + \omega_2\overline{k}\ x\ \overline{r}_{BG2} = -\omega_1 L\ \overline{j} + \omega_2\overline{k}\ x\ \frac{L}{2}\ \overline{i} = -L\left(\omega_1 - \frac{\omega_2}{2}\right)\overline{j}$$

$$\overline{V}_{G2} = -L\left(\omega_1 - \frac{\omega_1}{2}\right)\overline{j} = -\frac{L}{2}\omega_1\ \overline{j}$$

3).- Por conservación de la energía mecánica:

$$U_1 = 2mg\frac{L}{2}sen\theta_O = mg\ L\ sen\theta_O \quad \text{y} \quad E_{K1} = 0$$

$$U_2 = 0 \quad \text{y} \quad E_{K2} = \frac{1}{2}I_A\omega_1^2 + \frac{1}{2}mV_{G2}^2 + \frac{1}{2}I_{G2}\omega_2^2$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2}*\frac{1}{3}mL^2\omega_1^2 + \frac{1}{2}m\frac{L^2}{4}\omega_1^2 + \frac{1}{2}*\frac{1}{12}mL^2\omega_1^2 = \frac{1}{3}mL^2\omega_1^2$$

Luego:

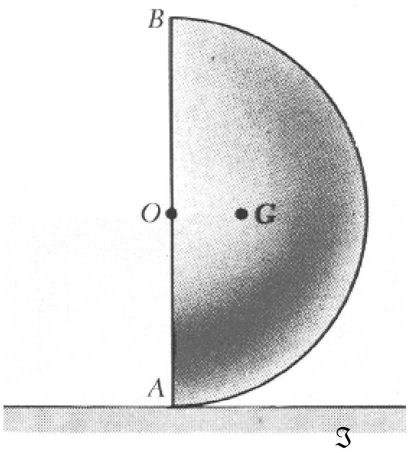
$$E_{M1} = E_{M2}$$

$$Lmg\ sen\theta_O = \frac{1}{3}mL^2\omega_1^2 \quad \rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{3g\ sen\theta_O}{L}}$$

$$\overline{\omega}_{\Re 1} = -\sqrt{\frac{3g\ sen\theta_O}{L}}\ \overline{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\overline{\omega}_{\Re 2} = \sqrt{\frac{3g\ sen\theta_O}{L}}\ \overline{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

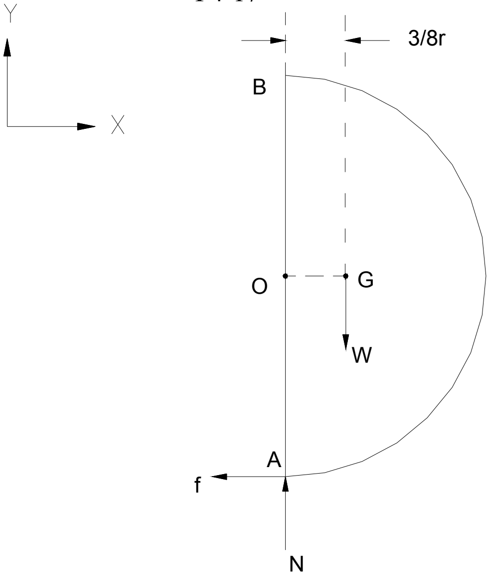
4-17.- Una semiesfera de peso W y radio r se suelta desde el reposo en el posición indicada. Determínese a) el mínimo valor de μ_s para el cual la semiesfera empieza a rodar sin deslizamiento y b) la aceleración del punto B.



P4-17

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P4-17a):



P4-17a

2).- Relaciones cinemáticas, para un movimiento de rodadura:

$$\bar{a}_G = \bar{a}_O + \bar{\alpha}\ x\ \bar{r}_{OG} = \alpha\, r\, \bar{i} - \alpha\, \bar{k}\ x\ \frac{3}{8} r\, \bar{i}$$

$$\bar{a}_G = \alpha\, r\, \bar{i} - \frac{3}{8}\alpha\, r\ \bar{j} \quad \text{(Unid. de aceleración)}$$

$$\bar{a}_A = \omega^2 r\ \bar{j} = \bar{0}$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m a_{GX} \quad \rightarrow \quad -f = m\alpha\, r \qquad (1)$$

$$\sum F_Y = m a_{GY} \quad \rightarrow \quad N = w - \frac{3}{8} m\alpha\, r \qquad (2)$$

$$\sum M_A = I_A \alpha + m r \overbrace{a_A}^{0}$$

$$\sum M_A = -\frac{3}{8} r\ w = -\frac{w}{g} r^2 \left(\frac{2}{5} + 1\right)\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{15}{56}\frac{g}{r} \qquad (3)$$

(3) en (1) y (2) :

$$f = -\frac{w}{g} * \frac{15g}{56r} * r = -\frac{15}{56} w \quad (\rightarrow)$$

$$N = w\left(1 - \frac{3}{8} * \frac{1}{g} * \frac{15\,g}{56\,r} * r\right) = 0.9\,w$$

4).- Para rodamientos, se debe cumplir:

$$f \le \mu_S N \quad \rightarrow \quad \frac{15}{56} w \le 0.9 w \mu_S \quad \rightarrow \quad \mu_S = 0.298 \quad \text{(valor limite)}$$

5).- Cálculo de la aceleración de B:

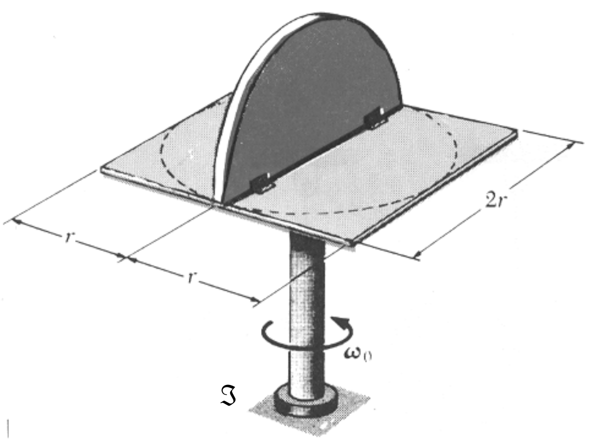
Si:

$$\bar{a}_O = \frac{15}{56} g\,\bar{i}$$

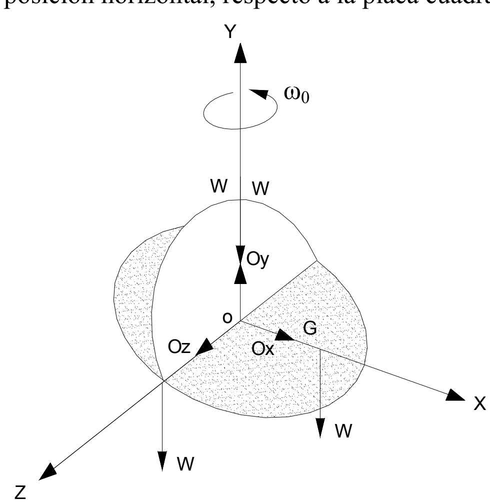
$$\bar{a}_B = \bar{a}_O - \alpha\,\bar{k}\ x\ r\ \bar{j} = \frac{15}{56} g\,\bar{i} + \frac{15}{56} g\,\bar{i} = \frac{30}{56} g\,\bar{i}$$

$$\bar{a}_B = 0.536\,g\,\bar{i} \quad \text{(Unidades de aceleración)}$$

4-18.- Dos paneles semicirculares de radio"r" cada uno, se une mediante bisagras a la placa cuadrada como aquí se muestra. La placa y los paneles son del mismo material y espesor. Si se sabe que cuando los paneles están en posición vertical el conjunto gira con velocidad angular ω_o, determínese la velocidad angular final del conjunto después que los paneles alcanzan el reposo en una posición horizontal, respecto a la placa cuadrada.



P4-18



P4-18a

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P4-18a):

2).- Como $\sum \bar{M}_O = \bar{0}$, la cantidad de movimiento angular se conserva:

a).- Cálculo de la cantidad de movimiento angular, para el instante inicial del sistema:

$$\overline{H}_{01P} = 2\int_{\wp}\left(X\,\bar{i}+Y\,\bar{j}+Z\,\bar{k}\right)x\left[\omega_O\,\bar{j}x\left(X\,\bar{i}+Y\,\bar{j}+Z\,\bar{k}\right)\right]dm$$

$$\overline{H}_{01P} = 2\omega_O\int_{\wp}\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ X & Y & Z\\ Z & 0 & -X\end{vmatrix}dm$$

$$\overline{H}_{01P} = 2\omega_O\left[\bar{i}\int_{\wp}-XY\,dm+\bar{j}\int_{\wp}\left(Z^2+X^2\right)dm+\bar{k}\int_{\wp}-YZ\,dm\right]$$

$$\overline{H}_{01P} = 2\omega_O\overbrace{I_{XY}^{O}}^{0}\,\bar{i}+2\omega_O I_{YY}^{O}\,\bar{j}+2\omega_O\overbrace{I_{ZY}^{O}}^{0}\,\bar{k} = 2\omega_O I_{YY}^{O} = \frac{1}{2}mr^2\omega_O\,\bar{j} \qquad (1)$$

$$\overline{H}_{01Pl} = I_{YY}\omega_O\,\bar{j} = \frac{1}{12}m_{Pl}\left(4r^2+4r^2\right)\omega_O\,\bar{j} = \frac{2}{3}m_{Pl}r^2\omega_O\,\bar{j} \qquad (2)$$

b).- Cálculo de la cantidad de movimiento angular, para el instante final en el sistema:

$$\overline{H}_{02P} = \overbrace{I_{XY}^{O}}^{0}\omega\,\bar{i}+\overbrace{I_{ZY}^{O}}^{0}\omega\,\bar{k}+I_{YY}^{O}\omega\,\bar{j}+\overbrace{I_{XY}^{O}}^{0}\omega\,\bar{i}+\overbrace{I_{ZY}^{O}}^{0}+I_{YY}^{O}\omega\,\bar{j}$$

$$\overline{H}_{02P} = 2m\frac{r^2}{2}\omega\,\bar{j} = mr^2\omega\,\bar{j} \qquad (3)$$

$$\overline{H}_{02Pl} = \frac{2}{3}m_{Pl}r^2\omega\,\bar{j} \qquad (4)$$

Si: (ρ es la masa por unidad de área)

$$\overline{H}_{01} = \overline{H}_{02}$$

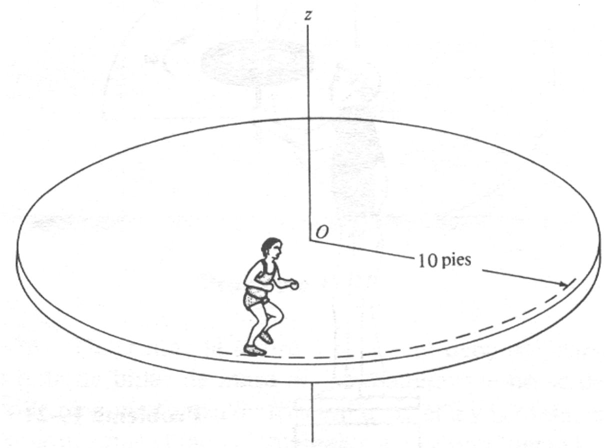
$$\frac{1}{2}mr^2\omega_O+\frac{2}{3}m_{Pl}r^2\omega_O = mr^2\omega+\frac{2}{3}m_{Pl}r^2\omega$$

$$\omega_O\left(\frac{1}{2}*\frac{\rho}{2}\pi\,r^2r^2+\frac{2}{3}\rho*4r^2r^2\right) = \omega\left(\frac{\rho}{2}\pi\,r^2r^2+\frac{2}{3}\rho*4r^2r^2\right)$$

$$\omega_O\left(\frac{3\pi+32}{12}\right) = \omega\left(\frac{3\pi+16}{6}\right)$$

$\omega = 0.815\omega_O$ (Unidades de velocidad angular)

4-19.- Una plataforma horizontal tiene un peso de 300 lb y un radio de giro con respecto al eje Z, que pasa por su centro O de K_Z = 8 pies. La plataforma está libre para girar alrededor del eje Z e inicialmente en reposo. Un hombre, que tiene un peso de 150 lb, empieza a correr a lo largo del borde en una trayectoria circular de 10 pies de radio. Si él tiene una rapidez de 4 pie/seg y mantiene está rapidez relativa a la plataforma, calcule la velocidad angular de la plataforma.

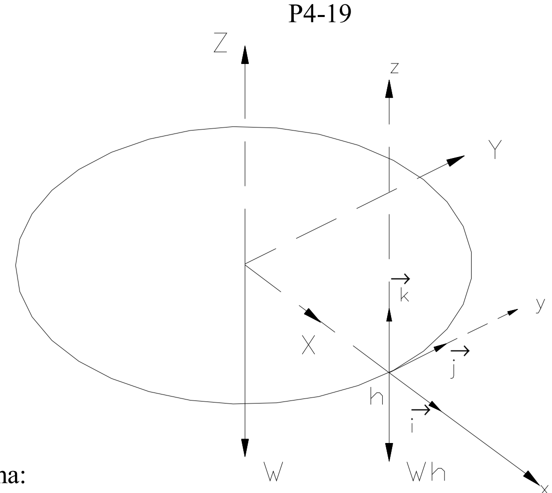


P4-19

Solución

Como no hay fuerzas externas, que producen momentos con respecto al eje Z, luego se conserva la cantidad de movimiento angular con respecto a ese eje.

1).- Relaciones cinemáticas.- Cálculo de la velocidad del hombre con respecto al marco móvil, para un tiempo cualquiera:



P4-19a

a).- Movimiento del marco móvil plataforma:

$$\overline{\omega} = \omega \,\overline{k}$$

b).- Movimiento del hombre respecto a la plataforma:

$$\overline{\rho} = r\,\overline{i} \quad , \quad \dot{\overline{\rho}} = V_{h/P}\,\overline{j}$$

c).- Movimiento del hombre respecto al marco inercial tierra:

$$\overline{V} = \overline{\omega}\ x\ \overline{\rho} + \dot{\overline{\rho}} = \omega\,\overline{k}\ x\ r\,\overline{i} + V_{h/P}\,\overline{j} = \left(\omega\,r + V_{h/P}\right)\overline{j}$$

2).- Por conservación del momentum angular:

$$H_{O\,i\,Z} = 0$$

$$H_{O\,f\,Z} = H_{OZ\,Pl} + H_{OZ\,h}$$

$$H_{OZ\,h} = m_h\left(X\dot{Y} - Y\dot{X}\right) = m_h rV$$

$$H_{OZ\,Pl} = I_0\omega$$

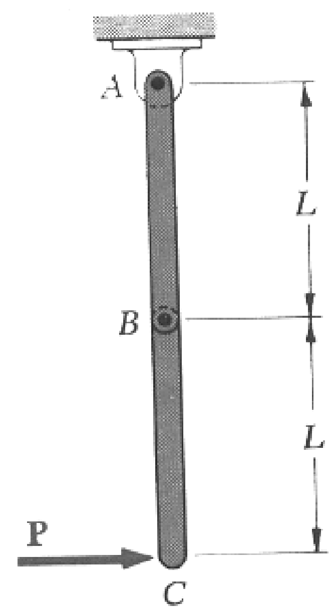
Luego:

$$I_O\omega + m_h\; r\left(\omega\, r + V_{h/P}\right) = 0$$

$$\frac{300}{32.2} * 8^2\,\omega + \frac{150}{32.2} * 10\,(10\omega + 4) = 0$$

$$\overline{\omega} = -0.175\,\overline{k} \quad \text{rad/seg}$$

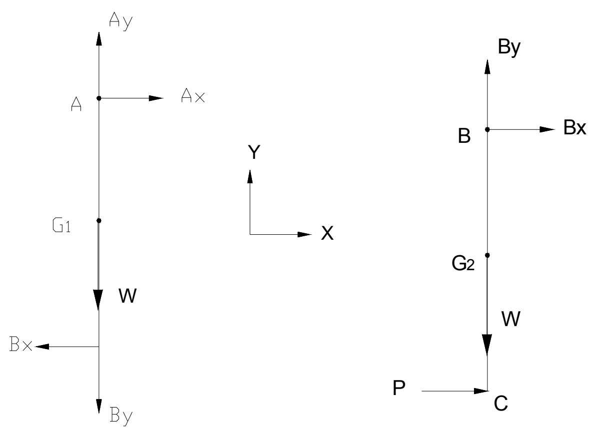
4-20.- Cada una de las barra AB y BC tiene una longitud L = 15 plg y pesan 4 lb cada uno. Si se aplica una fuerza horizontal P de modulo 3.5 lb como se muestra en la figura. Determínese la aceleración angular de cada barra.



P4-20

Solución

1).- D.C.L.(s) (ver figuras P4-20a):



(a) (b)

P4-20a

2).- Relaciones cinemáticas:

$$\overline{a}_{G1} = \ddot{X}_{G1}\overline{i} + \ddot{Y}_{G1}\overline{j} = \alpha_1\overline{k}\;x\;\overline{r}_{AG1} = \alpha_1\overline{k}\;x\;\frac{15}{24}\left(-\overline{j}\right)$$

$\ddot{X}_{G1} = \frac{7.5}{12}\alpha_1$ (pie/seg^2)

$\ddot{Y}_{G1} = 0$

$$\bar{a}_{G2} = \ddot{X}_{G2}\bar{i} + \ddot{Y}_{G2}\bar{j} = \bar{a}_B + \alpha_2\bar{k}\ x\ \bar{r}_{BG2} = \alpha_1\bar{k}\ x\ \frac{15}{12}\left(-\bar{j}\right) + \alpha_2\bar{k}\ x\ \frac{15}{24}\left(-\bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_{G2} = \frac{15}{12}\alpha_1\ \bar{i} + \frac{7.5}{12}\alpha_2\ \bar{i}$$

$$\ddot{X}_{G2} = \frac{15}{12}\alpha_1 + \frac{7.5}{12}\alpha_2$$

$$\ddot{Y}_{G2} = 0$$

3).- Relaciones cinéticas:

En (a):

$$\sum F_X = m\ddot{X}_{G1} \quad \rightarrow \quad A_X - B_X = m\left(\frac{7.5}{12}\alpha_1\right) \qquad (1)$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad A_Y - B_Y - w = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_A = -\frac{15}{12}B_X = m\frac{15^2}{3*12^2}\alpha_1 \quad \rightarrow \quad B_X = -\frac{15}{3*12}m\alpha_1 \qquad (3)$$

En (b):

$$\sum F_X = m\ddot{X}_{G2} \quad \rightarrow \quad B_X + P = m\left(\frac{15}{12}\alpha_1 + \frac{7.5}{12}\alpha_2\right) \qquad (4)$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad B_Y = w \qquad (5)$$

$$\sum M_{G2} = -\frac{15}{12*2}B_X + \frac{15}{2*12}P = m\frac{15^2}{12*12^2}\alpha_2$$

$$P - B_X = \frac{15}{6*12}m\alpha_2 \qquad (6)$$

Reemplazando (3) en (4) y (6):

$$3.5 = \frac{4*15}{12*32.2}\left(\frac{\alpha_1}{3} + \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right) \quad \rightarrow \quad 22.54 = \frac{4}{3}\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} \qquad (7)$$

$$3.5 = \frac{4}{32.2} * \frac{15}{36}\left(-\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right) \quad \rightarrow \quad 67.62 = -\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} \qquad (8)$$

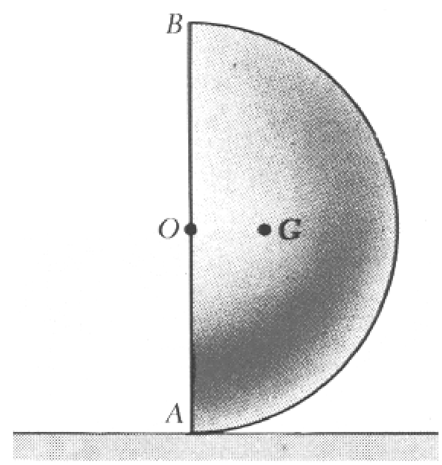
(8) - (7):

$$-45.08 = \frac{7}{3}\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 19.32 \ \text{rad/seg}^2 \ (\circlearrowright)$$

En (8):

$$67.62 = 19.32 + \frac{\alpha_2}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 96.6 \ \text{rad/seg}^2 \ (\circlearrowleft)$$

4-21.- Un semiesfera de masa *m* y radio r se suelta del reposo en la posición indicada en la figura. Suponiendo que la semiesfera rueda sin deslizar, determínese a) su velocidad angular después de girar 90° y b) la reacción normal de la superficie en el mismo instante

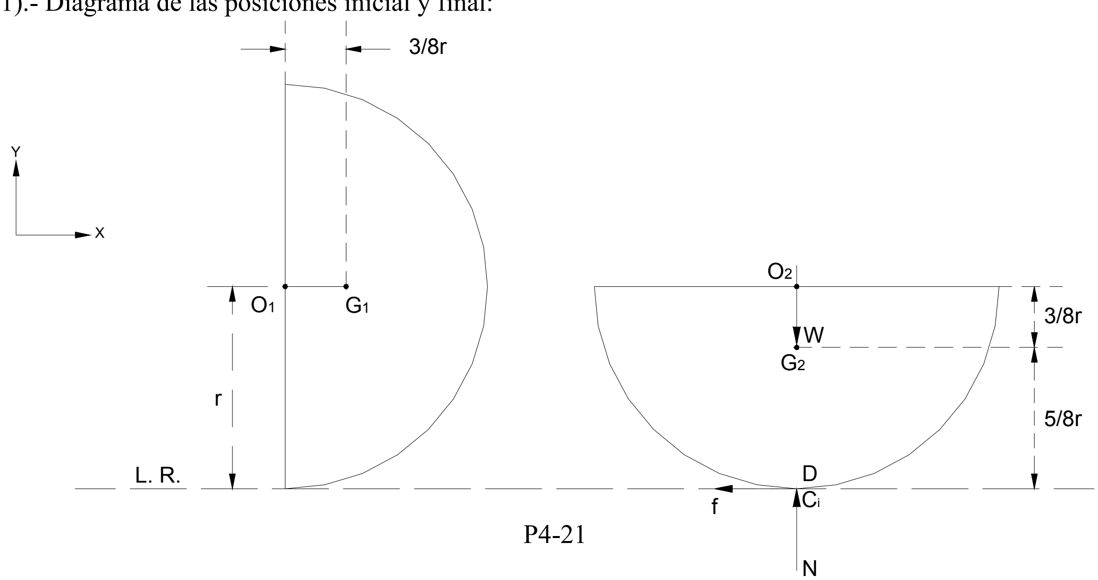


P4-21

Solución

La única fuerza que produce trabajo es el peso, luego la energía mecánica se conserva:

1).- Diagrama de las posiciones inicial y final:



P4-21

2).- Por conservación de la energía mecánica:

$$U_1 = mg\ r$$

$$E_{K1} = 0$$

$$U_2 = mg\left(\frac{5}{8}r\right)$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2} I_{C\,i}\omega_2^2 \quad \rightarrow \quad E_{K2} = \frac{1}{2}\left[I_O - m\left(\frac{3}{8}r\right)^2 + m\left(\frac{5}{8}r\right)^2\right]\omega_2^2$$

$$E_{K2} = \frac{m}{2} r^2 (0.65)\omega_2^2$$

Si: $E_{M1} = E_{M2}$

$$mg\ r = 0.325 m r^2 \omega_2^2 + \frac{5}{8} mg\ r$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1.154\ g}{r}}$$ (Unidades de velocidad angular)

3).- Cálculo de la reacción normal de la superficie:

Si:

$$\sum F_Y = m\ddot{Y}_{G2} \qquad (1)$$

También

$$\bar{a}_{G2} = \bar{a}_D - \alpha\ \bar{k}\ x\ \bar{r}_{DG2} - \omega_2^2\ \bar{r}_{DG2} = \omega_2^2 r\ \bar{j} - \alpha\ \bar{k}\ x\left(\frac{5}{8}r\ \bar{j}\right) - \omega_2^2\left(\frac{5}{8}r\ \bar{j}\right)$$

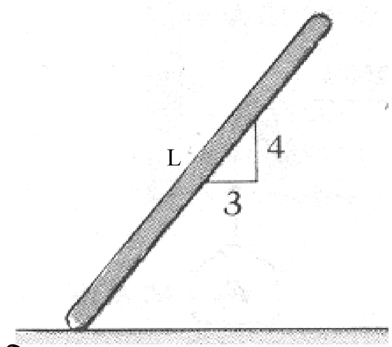
$$\bar{a}_{G2} = \frac{5}{8}\alpha\ r\ \bar{i} + \omega_2^2\left(r - \frac{5}{8}r\right)\bar{j} = \frac{5}{8}\alpha\ r\ \bar{i} + 0.433\ g\ \bar{j}$$

En (1):

$$N - w = 0.433 mg \quad \Rightarrow \quad N = mg(1 + 0.433)$$

$N = 1.433\ mg$ (Unidades de fuerza)

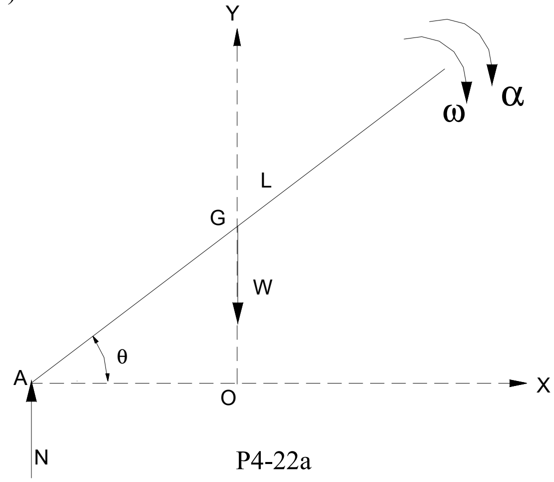
4-22.- La barra uniforme en la figura (masa = 5 Slug, longitud L = 10 pies) se libera desde el reposo en la posición mostrada. Despreciando la fricción, encuentre la fuerza que el piso ejerce sobre el extremo inferior de la barra, cuando el extremo superior está a 6 pies arriba del suelo. *Sugerencia: Use primero un diagrama del cuerpo libre y las ecuaciones de movimiento, para deducir la trayectoria del centro de masa.*



ℑ P4-22

Solución

1).- D.C.L. (para un instante cualquiera) (ver figura P4-22a):



P4-22a

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m\ddot{X}_G \quad \rightarrow \quad 0 = m\ddot{X}_G \quad \Rightarrow \quad \dot{X}_G \rightarrow \ cte$$

y si $\dot{X}_G = 0 \ \Rightarrow \ X_G \ \rightarrow \ cte$

Luego si $X_G = 0$, la trayectoria se encontrara en el eje "Y".

$$\sum F_Y = m\ddot{Y}_G \quad \rightarrow \quad N - w = m\ddot{Y}_G \qquad (1)$$

$$\sum M_G = I_G\alpha \quad \rightarrow \quad -N\frac{L}{2}\cos\theta = -I_G\alpha = \frac{1}{12}m\,L^2\alpha$$

$$\alpha = \frac{6N\cos\theta}{m\,\ell} = \frac{6N\cos\theta}{5*10} = 0.12N\cos\theta \qquad (2)$$

3).- Relaciones cinemáticas (para un instante cualquiera):

$$\bar{V}_G = \bar{V}_A - \omega\,\bar{k}\ x\ \bar{r}_{AG} = -V_A\,\bar{i} - \omega\,\bar{k}\ x\ 5\left(\cos\theta\,\bar{i} + sen\theta\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_G = \overbrace{\left(-V_A + 5\omega\,sen\theta\right)}^{0}\bar{i} - 5\omega\cos\theta\,\bar{j} \qquad (3)$$

$$\bar{a}_G = \bar{a}_A - \alpha\,\bar{k}\ x\ \bar{r}_{AG} - \omega^2\bar{r}_{AG}$$

$$\bar{a}_G = -a_A \bar{i} - \alpha\,\bar{k}\ x\ 5\left(\cos\theta\,\bar{i} + sen\theta\,\bar{j}\right) - 5\omega^2\left(\cos\theta\,\bar{i} + sen\theta\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_G = \overbrace{\left(-a_A + 5\alpha\ sen\theta - 5\omega^2\cos\theta\right)}^{0}\bar{i} - \left(5\alpha\cos\theta + 5\omega^2 sen\theta\right)\bar{j} \qquad (4)$$

4).- Como la única fuerza que produce trabajo es el peso, la energía mecánica se conserva:

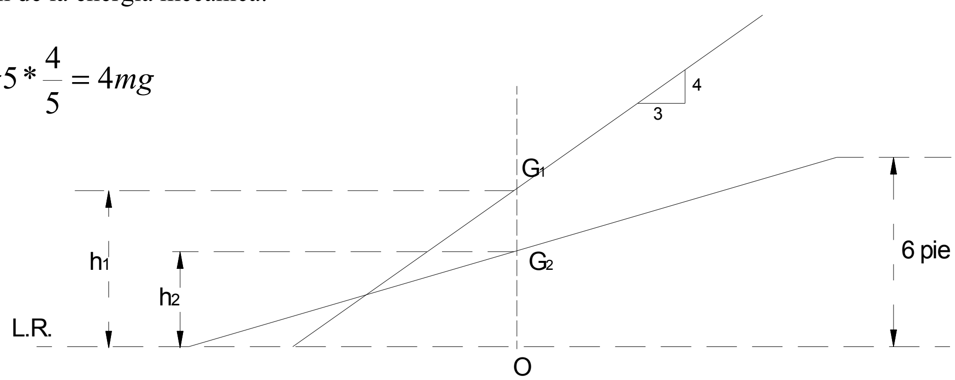
a).- Diagrama de las posiciones inicial y final (ver figura P4.22b):

b).- Por conservación de la energía mecánica:

$$U_1 = mg\ h_1 = mg5*\frac{4}{5} = 4mg$$

$$E_{K1} = 0$$

$$U_2 = mg\ h_2$$



$$U_2 = mg5*\frac{6}{10} = 3mg$$

P4-22b

$$E_{K2} = \frac{1}{2}mV_{G2}^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_2^2 = \frac{1}{2}m\left(5\omega_2 * \frac{8}{10}\right)^2 + \frac{1}{24}m\,100\omega_2^2 = 60.835\omega_2^2$$

Si: $E_{M1} = E_{M2}$

$$4mg = 3mg + 60.835\omega_2^2 \quad \rightarrow \quad 5*32.2 = 60.835\omega_2^2$$

$$\therefore \quad \omega_2 = 1.63 \ \text{ rad/seg}$$

Luego:

$$\ddot{Y}_G = -\left(5\alpha * \frac{8}{10} + 5*1.63^2 * \frac{6}{10}\right) = -(4\alpha + 7.97) \qquad (5)$$

En (5) , (2) :

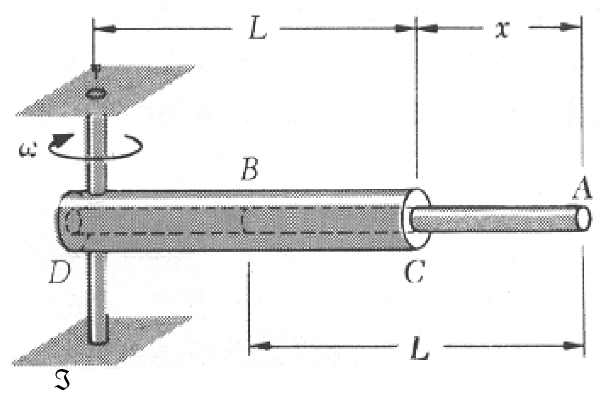
$$\ddot{Y}_G = -(0.48 * 0.8N + 7.97) = -(0.384\ N + 7.97) \qquad (6)$$

(6) en (1):

$$N = 5 * 32.2 - 5(0.384N + 7.97)$$

$$N = 41.49 \cong 41.5 \ \text{ lb}$$

4-23.- La barra AB de masa *m* desliza libremente dentro del tubo CD, también de masa *m*. La velocidad angular del conjunto era ω_1 cuando la barra estaba totalmente dentro del tubo (X =0). Despreciando el efecto de rozamiento determínese la velocidad angular del conjunto cuando X = ($^2/_3$) L.

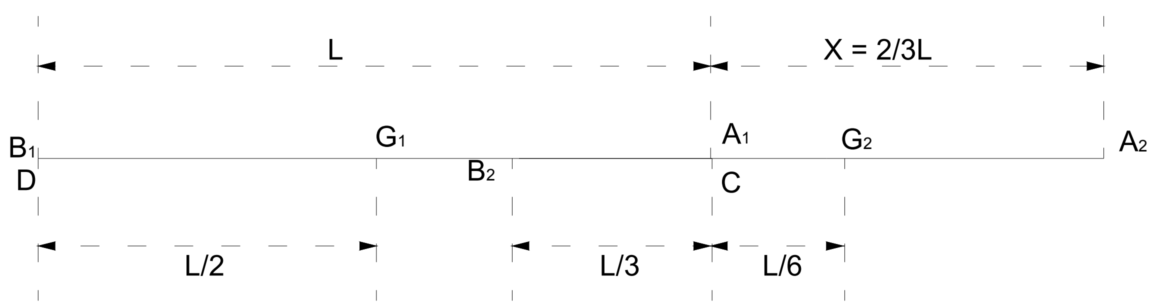


P4-23

Solución

Las fuerzas externas en el sistema no producen momento con respecto al eje vertical, la cantidad de movimiento angular se conserva con respecto al eje mencionado.

1).- Diagrama de los estados inicial y final (ver figura P4-23a):



P4-23a

2).- Por la conservación del momentum angular:

$$\left(\sum H_{OZ\,i}\right)_i = \left(\sum H_{OZ\,i}\right)_f \quad \rightarrow \quad \left(\sum H_{OZ\,i}\right)_i = 2I_O\omega_1 = \frac{2}{3}mL^2\omega_1 \qquad (1)$$

$$\left(\sum H_{OZ\,i}\right)_f = I_{OC}\,\omega + I_{O\,b}\,\omega = \frac{1}{3}mL^2\omega + \left[\frac{1}{12}mL^2 + \left(L + \frac{L}{6}\right)^2 m\right]\omega$$

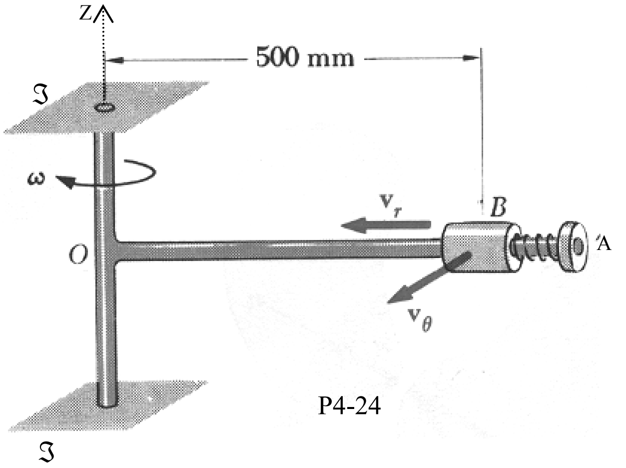
$$\left(\sum H_{OZ\,i}\right)_f = \frac{16}{9} L^2 m\omega \qquad (2)$$

(1) = (2):

$$\frac{2}{3} mL^2\omega_1 = \frac{16}{9} L^2 m\omega \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{3}{8}\omega_1$$

$\omega = 0.375\ \omega_1$ rad/seg

4-24.- El collarín B tiene una masa de 3 kg y se puede deslizar libremente sobre la barra OA que puede girar libremente en un plano horizontal. El conjunto está girando con una velocidad angular ω = 1.8 rad/seg, cuando se suelta un resorte localizado entre A y B proyectando el collarín a lo largo de la barra con una velocidad relativa inicial de V_r = 1.5 m/seg. Si el momento de inercia de la barra y resorte respecto a O es 0.35 kg m^2, determínese: a) la distancia mínima entre el collarín y el punto O en el movimiento subsiguiente (V_r =0) y b) la velocidad angular del conjunto correspondiente al instante en que el collarín se encuentre a esa mínima distancia.



P4-24

Solución

Como no hay fuerzas que produzcan momento con respecto al eje vertical, el momentum angular se conservará; además no hay fuerzas que produzcan trabajo, luego la energía cinética se conserva.

1).- Por conservación de la cantidad de movimiento angular:

$$\left(\sum H_{OZ\,i}\right)_i = \left(\sum H_{OZ\,i}\right)_f$$

$$\left(\sum H_{OZ\,i}\right)_i = 0.35\omega_1 + 3 * 0.5^2\ \omega_1 = 1.98 \text{ kg-m}^2\text{/seg} \qquad (1)$$

$$\left(\sum H_{OZ\,i}\right)_f = 0.35\omega_2 + 3\rho_2^2\omega_2 \qquad (2)$$

(2) = (1):

$$0.35\omega_2 + 3\rho_2^2\omega_2 = 1.98 \qquad (3)$$

2).- Por conservación de la energía cinética:

$$\frac{1}{2}*0.35*1.8^2+\frac{1}{2}*3\left(V_{r1}^2+\rho_1^2\omega_1^2\right)=\frac{1}{2}*0.35\omega_2^2+\frac{1}{2}*3\left(\rho_2\omega_2\right)^2$$

$$5.157=0.175\omega_2^2+3\rho_2^2\omega_2\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$$

$$3\rho_2^2\omega_2=\frac{10.314}{\omega_2}-0.35\omega_2 \qquad (4)$$

(4) en (3):

$$0.35\omega_2+\frac{10.314}{\omega_2}-0.35\omega_2=1.98$$

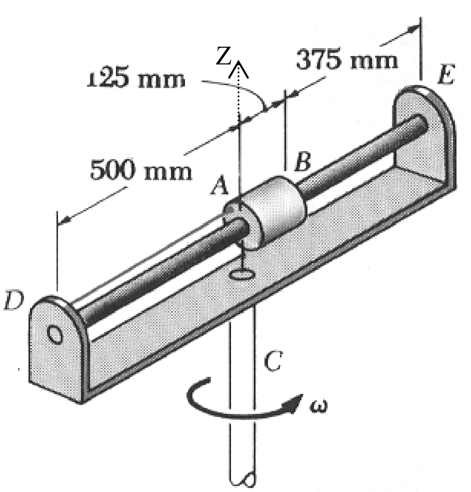
$$\omega_2=\frac{10.314}{1.98}=5.2091\cong 5.21 \text{ rad/seg}$$

En (3):

$$0.35*5.2091+3\rho_2^2*5.2091=1.98 \quad \rightarrow \quad \rho_2=0.1002 \text{ m}$$

$$\rho_2=100.2 \text{ mm}$$

4-25.- Un tubo AB de 1.6 kg puede deslizar libremente sobre la barra DE, que puede girar libremente en un plano horizontal. Inicialmente, el conjunto gira con una velocidad angular ω = 5 rad/seg y el tubo se mantiene en su posición mediante una cuerda. El momento de inercia de masa de la barra y la ménsula respecto al eje de rotación vertical es de 0.30 kg-m^2 y el momento central de inercia del tubo respecto al eje vertical de rotación es 0.0025 kg-m^2. Si súbitamente se rompe la cuerda. Determínese: a) la velocidad angular del conjunto después que el tubo se mueve hasta el extremo E y b) la perdida de energía durante el choque plástico en E.



P4-25

Solución

Como el momento con respecto al eje vertical es nulo la cantidad de movimiento angular se conserva.

1).- Por conservación del momentum angular:

$$\left(\sum H_{OZ\,i}\right)_i = \left(\sum H_{OZ\,i}\right)_f$$

$$\left(\sum H_{OZ\,i}\right)_i = I^0_{ZZ}\omega_1 + \left[I^0_{ZZ\,T} + m(0.0625)^2\right]\omega_1 = 5\left(0.3 + 0.0025 + 6.25x10^{-3}\right)$$

$$\left(\sum H_{OZ\,i}\right)_i = 1.544 \text{ kg-m}^2\text{/seg} \qquad (1)$$

$$\left(\sum H_{OZ\,i}\right)_f = 0.3\omega_2 + \left[0.0025 + 1.6(0.4375)^2\right]\omega_2 = 0.609\,\omega_2 \qquad (2)$$

(2) = (1):

$$\omega_2 = \frac{1.544}{0.609} = 2.535 \cong 2.54 \text{ rad/seg}$$

2).- Cálculo de la energía cinética perdida:

a).- Cálculo de la energía cinética del tubo, antes del choque, por conservación de la energía cinética, ya que no hay fuerzas que produzcan trabajo:

$$E_{K1B} + E_{K1T} = E_{K2B} + E_{K2T} \quad \rightarrow \quad E_{K2T} = E_{K1B} + E_{K1T} - E_{K2B}$$

$$E_{K2T} = \frac{1}{2} I_{OB}\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right) + \frac{1}{2}\left[I_{OT} + m(0.0625)^2\right]\omega_1^2$$

$$E_{K2T} = 2.895 \text{ Joule}$$

b).- Cálculo de la energía cinética del tubo después del choque:

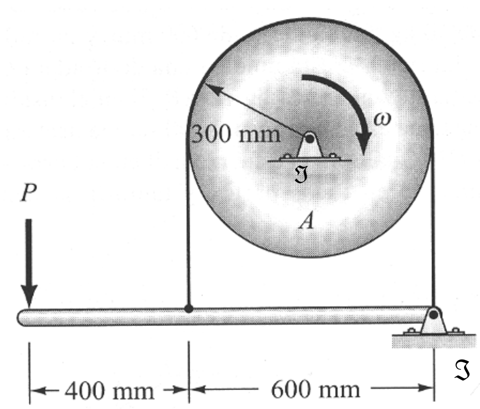
$$E_{K2TB} = \frac{1}{2}\left[0.0025 + 1.6(0.4375)^2\right] * 2.535^2 = 0.992 \text{ Joule}$$

Luego:

$$E_P = E_{K2T} - E_{K2TB} = 2.895 - 0.992 = 1.903$$

$$E_P \cong 1.9 \text{ Joule}$$

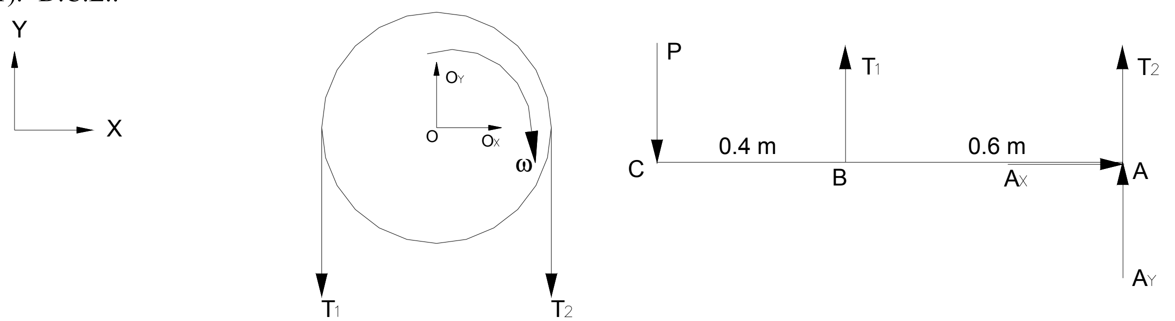
4-26.- Una polea y sus accesorios en rotación tienen una masa de 1000 kg y un radio de giro de 0.25 m. Se aplica un simple freno de mano tal como se muestra utilizando una fuerza P. Si el coeficiente cinético entre la cinta y la polea es de 0.2 ¿ Cuanto debe valer P para cambiar ω de 1750 RPM a 300 RPM en 60 seg?. Si la relación de tensiones en un freno de mano de este tipo es: $\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu_K \beta}$ donde: $T_1 > T_2$ y β es el ángulo de agarre de la cinta (freno).



P4-26

Solución

1).- D.C.L.:



(a) P4-26a (b)

2).- Relaciones cinéticas:

a).- Por consideraciones del problema:

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{0.2\,\pi} = 1.874 \quad \rightarrow \quad T_1 = 1.874\, T_2 \tag{1}$$

b).- Para (b):

$$\sum M_A = 0 \quad \rightarrow \quad 1.0\, P - 0.6\, T_1 = 0 \quad \rightarrow \quad T_1 = 1.67\, P \tag{2}$$

(2) en (1):

$$T_2 = 0.891\, P \tag{3}$$

c).- Para (a):

$$\sum M_0 = I_0\alpha \quad \rightarrow \quad 0.3\,T_1 - 0.3\,T_2 = 1000 * 0.25^2\,\alpha \qquad (4)$$

Reemplazando (2) y (3) en (4):

$$0.3(1.67\,P - 0.891\,P) = 62.5\,\alpha \quad \rightarrow \quad P = 267.44\,\alpha \qquad (5)$$

3).- Relaciones cinemáticas:

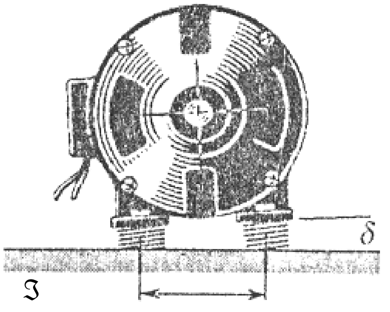
Si:

$$\omega_f = \omega_0 - \alpha\,t \quad \rightarrow \quad 300 * \frac{\pi}{30} = 1750 * \frac{\pi}{30} - \alpha * 60$$

$$\alpha = \frac{\pi}{30 * 60}(1750 - 300) = 2.53 \ \text{ rad/seg}^2$$

Luego en (5):

$$P = 267.44 * 2.53 = 676.62 \ \text{ N}$$

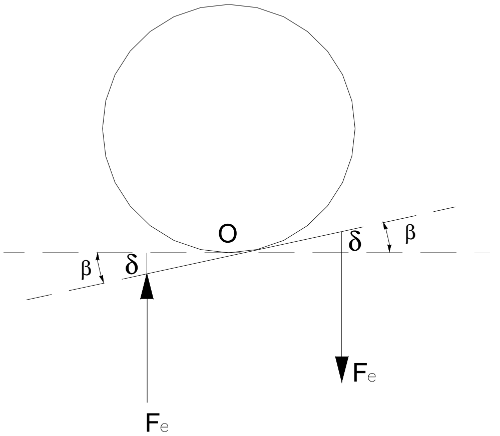


P4-27

4-27.- El motor eléctrico de la figura entrega una potencia de 4 KW a 1725 RPM a la bomba que acciona. Calcular el ángulo de inclinación β del motor bajo carga, si la constante de cada uno de sus cuatro soportes elásticos es de 15 KN/m. ¿En qué sentido gira el motor?

Solución

1).- D.C.L. del motor (ver figura P4-27a):



P4-27a

2).- Cálculo de la deformación de los resortes.

a).- Si:

$$P = M\,\omega$$

$$M = \frac{P}{\omega} = \frac{4000}{1725 * \frac{\pi}{30}} = 22.14 \ \text{ N-m} \qquad (1)$$

b).- Del D.C.L.:

$$M = 0.1\,F_e + 0.1\,F_e = 0.2\,F_e = 0.2 * 2\,K\,\delta \quad \rightarrow \quad M = 6000\,\delta \qquad (2)$$

(1)= (2):

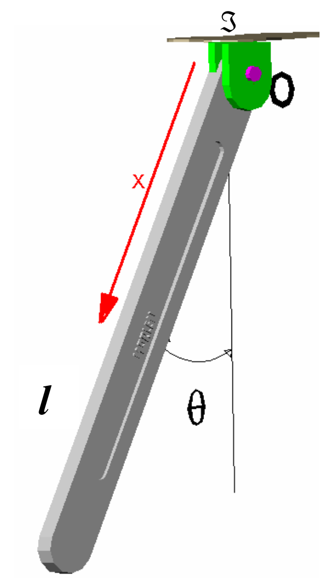
$$22.14 = 6000\,\delta \quad \rightarrow \quad \delta = 3.69x10^{-3}\ \text{m} \quad \rightarrow \quad \delta = 3.69\ \text{mm}$$

3).- Cálculo del ángulo de inclinación β:

$$\beta = tg^{-1}\left(\frac{3.69}{100}\right) = 2.113°$$

Gira en sentido horario

4-28.- La barra esbelta uniforme de masa *m* y de longitud ℓ está articulada a un eje horizontal que pasa por O y oscila en el plano vertical a modo de péndulo compuesto. Si se suelta en reposo desde la posición horizontal con θ = 90°, escribir expresiones de la tracción T, la fuerza cortante V y el momento flector M en la barra en función de X para una posición dada de θ. Se desprecia todo los rozamientos.

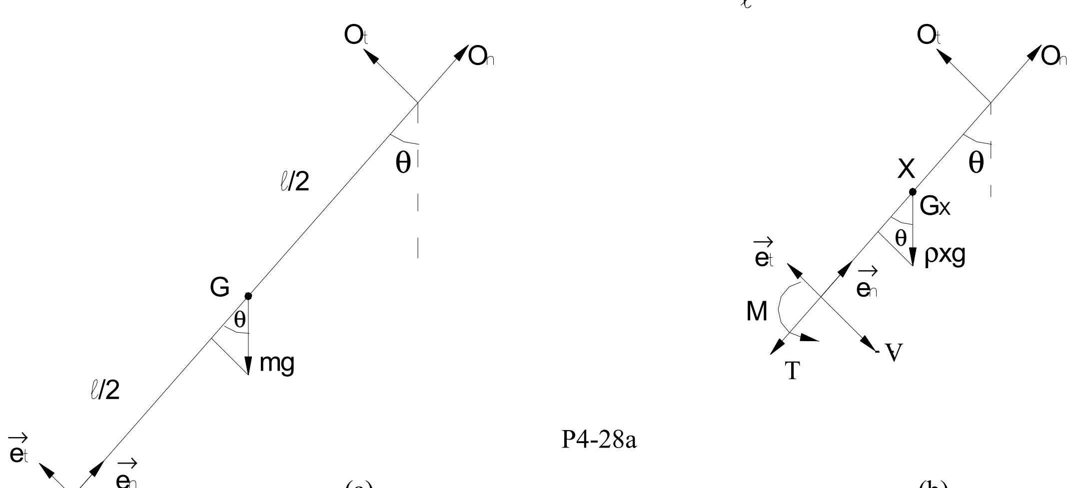


P4-28

Solución

Como la única fuerza que produce trabajo es el peso la energía mecánica se conserva.

1).- D.C.L. de la barra y de la barra cortada para un ángulo θ (si, $\rho = \frac{m}{\ell}$):

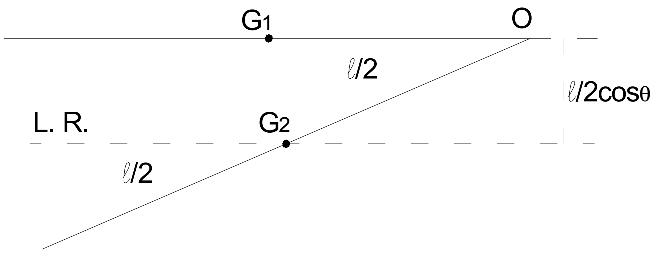


P4-28a

(a) (b)

2).- Cálculo de la velocidad angular, por conservación de la energía mecánica:

a).- Diagrama de las posiciones inicial y final:



P4-28b

b).- Por conservación de la energía mecánica:

$$U_1 = mg\frac{\ell}{2}\cos\theta$$

$$E_{K1} = 0$$

$$U_2 = 0$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2} I_0\omega^2 = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} m\ell^2\omega^2$$

$$E_{M1} = E_{M2}$$

$$mg\frac{\ell}{2}\cos\theta = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} m\ell^2\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}\cos\theta}$$ (Unidades de velocidad angular)

3).- Cálculo de la aceleración angular, tomando momentos respecto a “O” en (a):

$$\sum M_0 = I_0\alpha \quad \rightarrow \quad -mg\frac{\ell}{2}sen\theta = \frac{1}{3}m\ell^2\alpha$$

$$\alpha = -\frac{3g}{2\ell}sen\theta$$ (Unid. de aceleración angular)

Luego:

$$\bar{a}_G = -\frac{3g}{2\ell}sen\theta * \frac{\ell}{2}\bar{e}_t + \frac{3g}{\ell}\cos\theta * \frac{\ell}{2}\bar{e}_n$$

$$\bar{a}_G = -\frac{3}{4}gsen\theta\,\bar{e}_t + \frac{3}{2}g\cos\theta\,\bar{e}_n$$ (Unid. de aceleración)

4).- Relaciones cinéticas para (a):

$$\sum F_n = ma_n \quad \rightarrow \quad O_n - mg\cos\theta = m\left(\frac{3}{2}g\cos\theta\right)$$

$$O_n = \frac{5}{2}mg\cos\theta$$ (Unid. de Fuerza)

$$\sum F_t = ma_t \quad \rightarrow \quad O_t - mgsen\theta = m\left(-\frac{3}{4}gsen\theta\right)$$

$$O_t = \frac{1}{4}mgsen\theta$$ (Unid. de fuerza)

5).- Relaciones cinéticas, para (b):

Si:

$$\bar{a}_{GX} = -\frac{3g}{2\ell}sen\theta * \frac{X}{2}\,\bar{e}_t + \frac{3g}{\ell}\cos\theta * \frac{X}{2}\,\bar{e}_n$$

a).- $\sum F_n = ma_{GX\,n}$

$$-\frac{m}{\ell}X\ g\cos\theta + O_n - T = \frac{m}{\ell}X\left(\frac{3g}{\ell}\cos\theta\ \frac{X}{2}\right)$$

$$T = mg\cos\theta\left(\frac{5}{2} - \frac{X}{\ell} - \frac{3X^2}{2\,\ell^2}\right)$$

$$T = mg\cos\theta\left(\frac{5\ell^2 - 2\ell X - 3X^2}{2\ell^2}\right)$$ (Unid. de fuerza)

b).- $\sum F_t = ma_{GX\,t}$

$$-\frac{m}{\ell}Xgsen\theta - V + O_t = m\left(-\frac{3g}{2\ell}sen\theta\ \frac{X}{2}\right)$$

$$V = mg\ sen\theta\left(\frac{1}{4} - \frac{X}{\ell} + \frac{3X^2}{4\ell^2}\right) = mgsen\theta\left(\frac{\ell^2 - 4\ell\ X + 3X^2}{4\ell^2}\right)$$

$$V = mg\ sen\theta\ \frac{(\ell - X)(\ell - 3X)}{4\ell^2} \quad \text{(Unid. de fuerza)}$$

c).- $\sum M_0 = I_0\alpha$

$$M - \frac{m}{\ell}Xg\frac{X}{2}sen\theta - mgsen\theta\frac{(\ell - X)(\ell - 3X)}{4\ell^2}X = \frac{m}{3\ell}XX^2\left(-\frac{3g}{2\ell}sen\theta\right)$$

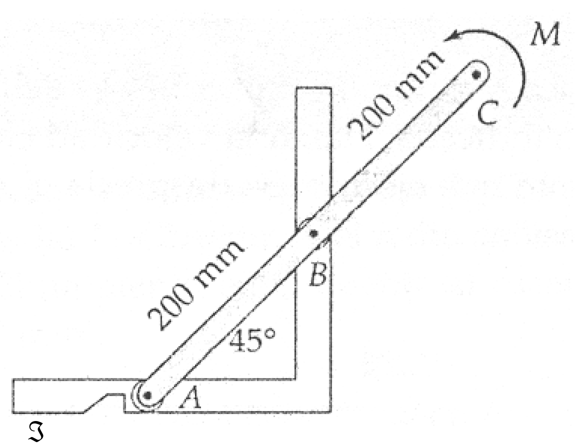
$$M = mgsen\theta\left(\frac{X^2}{2\ell} + \frac{(\ell - X)(\ell - 3X)\ X}{4\ell^2} - \frac{X^3}{2\ell^2}\right)$$

$$M = mgsen\theta\left(\frac{2\ell X^2 + X\ell^2 - 4\ \ell X^2 + 3X^3 - 2X^3}{4\ell^2}\right)$$

$$M = mgsen\theta\left[\frac{(\ell^2 - 2\ell X + X^2)X}{4\ell^2}\right]$$

$$M = mgsen\theta\frac{(\ell - X)^2}{4\ell^2}X \quad \text{(Unid. de Momentos)}$$

4-29.- La barra uniforme ABC de 3 kg está inicialmente en reposo con su extremo A contra el tope de la guía horizontal. Al aplicarse un par de momento constante M = 8 N-m al extremo C, la barra gira haciendo que el extremo A choque con el lado de la guía vertical a la velocidad de 3m/seg. Calcular la pérdida de energía ΔQ a causa del rozamiento en guías y rodillos. Puede despreciarse las masas de los rodillos.



P4-29

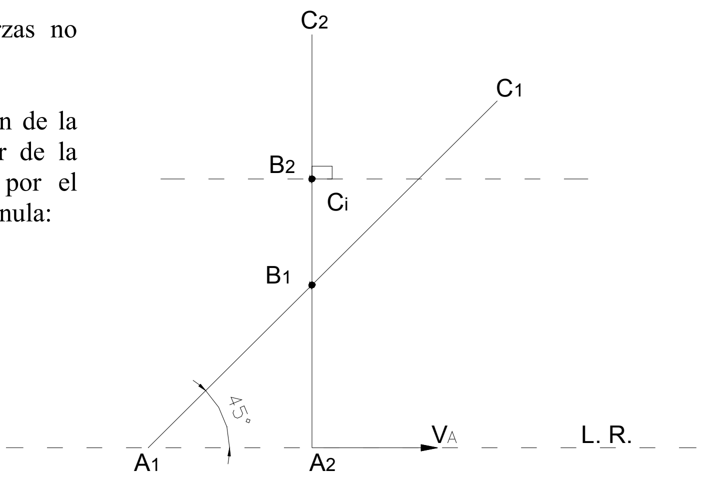
Solución

Nos piden el trabajo hecho por las fuerzas no conservativas.

1).- Relaciones cinemáticas.- Determinación de la velocidad de B y de la velocidad angular de la barra, para el instante final de interés; por el método de centros instantáneo de velocidad nula:

$$V_B = 0$$

$$\omega = \frac{3}{0.2} = 15$$



P4-29a

2).- Cálculo de la energía perdida:

Si:

$$\frac{dE_K}{dt} = \sum \overline{F_i} \cdot \overline{V_i} + \left(\sum \overline{C_i}\right) \cdot \omega\, \overline{k} = \sum \left(\overline{F}_{C\,i} + \overline{F}_{NC\,i}\right) \cdot \overline{V_i} + \left(\sum \overline{C_i}\right) \cdot \omega\, \overline{k}$$

$$\Delta E_K = W_{1-2FC} + W_{1-2FNC} + M \int_1^2 d\theta$$

$$W_{1-2FC} = \Delta E_K - W_{1-2FNC} - M \int_1^2 d\theta = E_{M2} - E_{M1} - M(\theta_2 - \theta_1) \qquad (1)$$

Cálculo de las energías y trabajo correspondientes:

$$U_1 = 0.1\sqrt{2} * 3 * 9.81 = 4.162 \text{ Joule}$$

$$E_{K1} = 0$$

$$U_2 = 0.2 * 3 * 9.81 = 5.886 \text{ Joule}$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2} m \overbrace{V_B^2}^{0} + \frac{1}{2} I_B \omega^2 \quad \rightarrow \quad E_{K2} = \frac{1}{2} * \frac{1}{12} * 3 * 0.4^2 * 15^2 = 4.5 \text{ Joule}$$

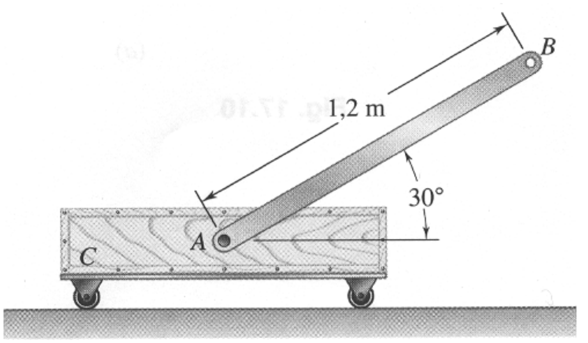
$$M(\theta_2 - \theta_1) = 8\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\pi \text{ Joule}$$

En (1):

$$W_{1-2FNC} = (4.5 + 5.886) - 4.162 - 2\pi$$

$$W_{1-2FNC} = \Delta Q = 0.0592 \text{ Joule}$$

4-30.- La barra AB tiene una masa de 3 kg y está unida a un carro C de 5 kg. Sabiendo que el sistema se suelta en reposo en la posición representada y despreciando el rozamiento, hallar: a) la velocidad del punto B cuando la barra AB pasa por la vertical, b) la correspondiente velocidad del carro C.



P4-30

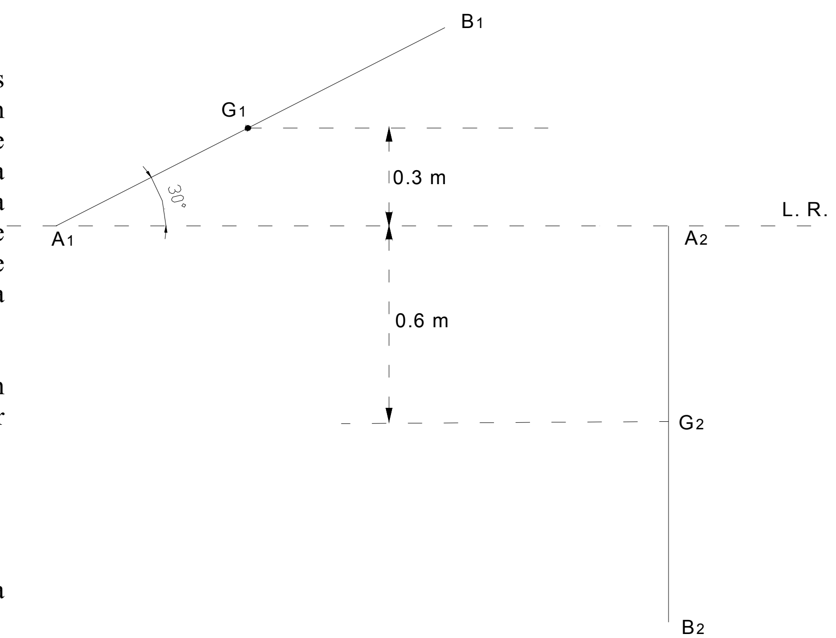
Solución

Como no hay fuerzas externas en el sistema en la dirección horizontal, la cantidad de movimiento lineal se conserva en esa dirección; además la única fuerza que produce trabajo es el peso, por lo que se conserva la energía mecánica en el sistema.

1).- Diagrama de la posición inicial y final del sistema (ver figura P30a):

$$\bar{V}_A = \bar{V}_C$$

2).- Por conservación de la cantidad de movimiento lineal:



P4-30a

Si:

$$\bar{V}_{G2} = \bar{V}_{A2} - \omega_2 \bar{k} \ x \ \bar{r}_{A2G2} = V_{A2}\bar{i} - \omega_2 \bar{k} \ x \left(-0.6\bar{j}\right) \quad \rightarrow \quad \bar{V}_{G2} = \left(V_{A2} - 0.6\ \omega_2\right)\bar{i}$$

Luego:

$$0 = m_C V_{A2} - m_{AB} V_{G2} = m_C V_{A2} + m_{AB}\left(V_{A2} - 0.6\omega_2\right)$$

$$0=(8\,V_{A2}-1.8\omega_2) \quad \rightarrow \quad V_{A2}=0.225\omega_2$$

3).- Por conservación de la energía mecánica:

$$U_1=m_{AB}gh_1=3*9.81*0.3=8.829 \text{ Joule}$$

$$E_{K1}=0$$

$$U_2=-m_{AB}gh_2=-3*9.81*0.6=-17.658 \text{ Joule}$$

$$E_{K2}=\frac{1}{2}m_C V_{A2}^2+\frac{1}{2}m_{AB}V_{G2}^2+\frac{1}{2}I_G\omega_2^2$$

$$E_{K2}=\frac{1}{2}*5*V_{A2}^2+\frac{1}{2}*3*(V_{A2}-0.6\omega_2)^2+\frac{1}{2}*\frac{1}{12}*3*1.2^2\,\omega_2^2$$

$$E_{K2}=4\,V_{A2}^2-1.8\,V_{A2}\omega_2+0.72\omega_2^2$$

$$E_{M1}=E_{M2}$$

$$8.829=-17.658+4\,V_{A2}^2-1.8\,V_{A2}\omega_2+0.72\,\omega_2^2$$

$$26.487=0.2025\omega_2^2-0.405\omega_2^2+0.72\omega_2^2$$

$$\omega_2=7.154 \text{ rad/seg} \quad \rightarrow \quad \bar{\omega}_2=-7.154\,\bar{k} \text{ (rad/seg)}$$

4).- Cálculos de las velocidades:

a).- De C, si $\bar{V}_A=\bar{V}_C$:

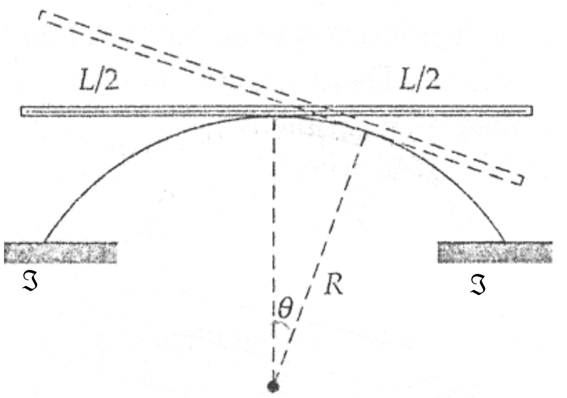
$$\bar{V}_{C2}=\bar{V}_{A2}=0.225\omega_2\bar{i}=1.61\,\bar{i} \text{ (m/seg)} \quad \rightarrow \quad V_{C2}=1.61 \text{ m/seg } (\rightarrow)$$

b).- De B:

$$\bar{V}_{B2}=\bar{V}_{A2}-\omega_2\bar{k}\ x\ \bar{r}_{AB}=1.61\,\bar{i}-7.154\,\bar{k}\ x\ (-1.2\,\bar{j})=-6.975\,\bar{i} \text{ (m/seg)}$$

$$V_{B2}=6.975 \text{ m/seg } (\leftarrow)$$

4-31.- La varilla delgada uniforme de masa *m* y longitud L, inicialmente en reposo centrada horizontalmente sobre la superficie circular de radio R, se bascula hasta la posición representada con trazos y se suelta sin velocidad inicial. Hallar la expresión de su velocidad angular ω cuando pasa por la posición horizontal. El rozamiento es suficiente para que no haya resbalamiento.

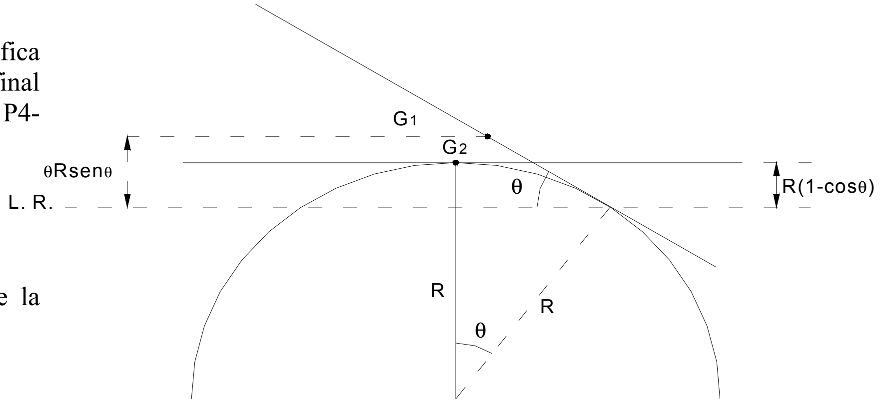


P4-31

Solución

Como la única fuerza que produce trabajo es el peso, se conserva la energía mecánica.

1).- Representación gráfica de la posición inicial y final del sistema (ver figura P4-31a):



P4-31a

2).- Por conservación de la energía mecánica:

$$U_1 = mg\theta\ Rsen\theta$$

$$E_{K1} = 0$$

$$U_2 = mgR(1-\cos\theta)$$

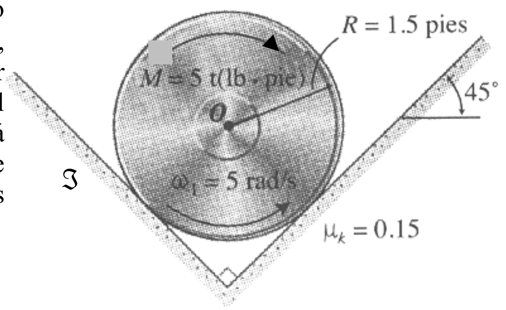
$$E_{K2} = \frac{1}{2} I_{C\,i}\omega^2 = \frac{1}{2} * \frac{1}{12} mL^2\omega^2 \quad \rightarrow \quad E_{K2} = \frac{1}{24} mL^2\omega^2$$

$$E_{M1} = E_{M2}$$

$$mg\theta\ Rsen\theta = mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{24} mL^2\omega^2 \quad \rightarrow \quad \omega^2 = \frac{24}{L^2} gR(\theta\ sen\theta + \cos\theta - 1)$$

$$\omega = \frac{2}{L}\sqrt{6gR(\theta\ sen\theta + \cos\theta - 1)}$$ (Unid. de velocidad angular)

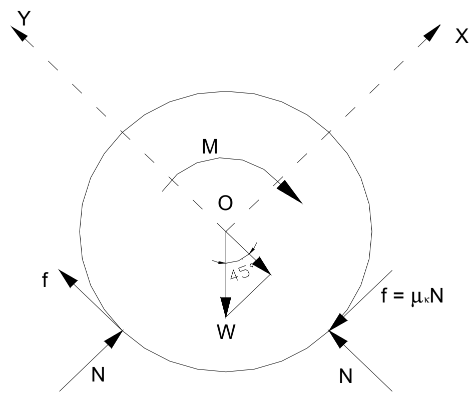
4-32.- El disco de 100 lb (radio R = 1.5 pies) está girando inicialmente a una velocidad angular de ω_1 = 5 rad/seg, como se ilustra. Si súbitamente se aplica al disco un par de torsión M = 5 t lb-pie, estando t en seg, determine el tiempo requerido para llevar al disco al reposo ¿invertirá el disco su dirección y continuará girando? El coeficiente de fricción cinética entre el disco y las paredes laterales es de 0.15.



P4-32

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P4-32a):



P4-32a

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = 0 \quad \rightarrow \quad N - \mu_K N - \frac{\sqrt{2}}{2} w = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad N + \mu_K N - \frac{\sqrt{2}}{2} w = 0$$

$$2N = \sqrt{2} w \quad \rightarrow \quad N = \frac{\sqrt{2}}{2} w$$

3).- Por el principio de impulso y cantidad de movimiento angular:

$$\int_0^t \sum M_0 dt = I_0 \left(\overbrace{\omega_2}^{0} - \omega_1 \right) \quad \rightarrow \quad \int_0^t -2(\mu_K NR) dt - \int_0^t 5\, t dt = -I_0 \omega_1$$

$$\int_0^t 2\left(\mu_K * \frac{\sqrt{2}}{2} wR \right) dt + \frac{5}{2} t^2 = \frac{1}{2} mR^2 \omega_1$$

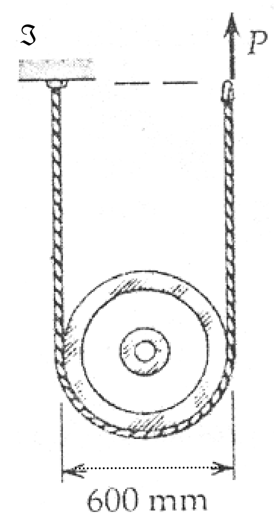
$$0.15 * \sqrt{2} * 100 * 1.5\, t + 2.5\, t^2 = \frac{1}{2} * \frac{100}{32.2} * 1.5^2 * 5$$

$$t^2 + 12.73\, t - 6.99 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{-12.73 + \sqrt{12.73^2 + 4 * 6.99}}{2}$$

$t = 0.53$ seg

El disco permanecerá en reposo

4-33.- Calcular la fuerza constante P requerida para dar al centro de la polea una velocidad de 1.2 m/seg hacia arriba en un ascenso de 0.9 m de dicho punto a partir de la posición de reposo indicada. La polea tiene una masa de 15 kg y un radio de giro centroidal de 250 mm y el cable mide 4.5 m y tiene una masa de 3 kg/m.

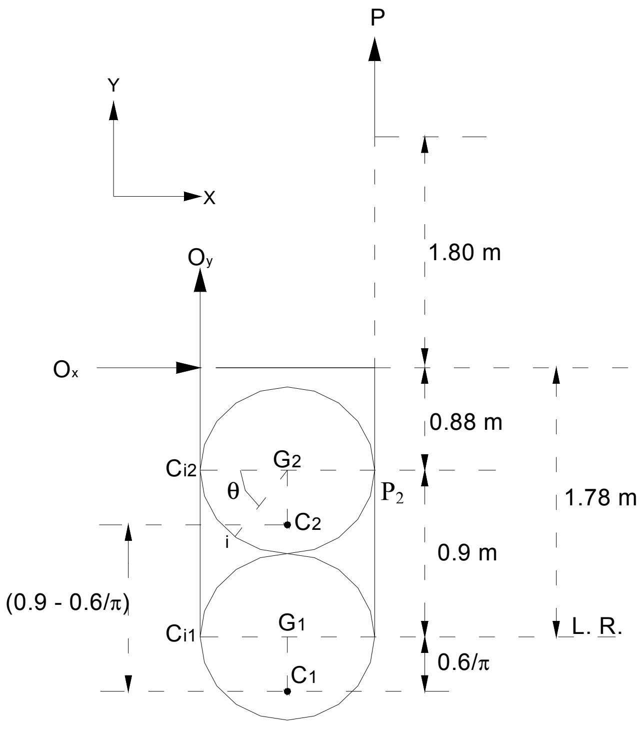


P4-33

Solución

Por la forma alternativa del principio de trabajo y energía, para fuerzas y momentos no conservativos.

1).- Gráfico de la posición inicial y final del sistema (ver figura P4-33a):



P4-33a

$$r\,\pi = 0.3 * \pi = 0.94 \text{ m}$$

2).- Relaciones cinemáticas para la posición final.- Por centros instantáneos de velocidad nula:

$$\omega = \frac{V_{G2}}{r}$$

$$V_{P2} = 2r * \omega = \frac{2r * V_{G2}}{r} = 2V_{G2}$$

$$\bar{V}_{G2} = V_{G2}\bar{j}$$

3).- Por la forma alternativa del principio de trabajo y energía cinética:

$$W_{1-2P} = E_{M2} - E_{M1}$$

$$E_{K\,1} = 0$$

$$U_1 = 2\, m_{C\,1} g * \frac{1.78}{2} - m_{C\,2} g * \frac{0.6}{\pi} = \left[2 * 1.78 * 3 * \frac{1.78}{2} - 0.94 * 3 * \frac{0.6}{\pi} \right] * 9.81$$

$U_1 = 87.96$ Joule

$$E_{K\,2} = E_{K\,2\,Cu} + E_{K\,2\,C} + E_{K\,2\,Po}$$

Cálculo de ésta energía cinética:

a).- Para la cuerda en la polea:

Si, se tiene para una partícula iésimo:

$$\overline{V_i} = \overline{V}_{G\,2} + \omega\, \bar{k}\ x\ r\left(-\cos\theta\, \bar{i} - sen\ \theta\ \bar{j}\right) = \overline{V}_{G\,2} + \omega\, r\left(sen\ \theta\, \bar{i} - \cos\theta\ \bar{j}\right)$$

Multiplicándose escalar mente asimismo y por ½ m_i:

$$\frac{1}{2} m_i \overline{V_1} \cdot \overline{V_1} = \frac{1}{2} m_i V_{G\,2}^2 + \frac{1}{2} m_i \left(\overbrace{\omega\, r}^{V_{G\,2}} \right)^2 + m_i \overline{V}_{G\,2} \cdot \omega\, r\left(sen\ \theta\, \bar{i} - \cos\theta\ \bar{j}\right)$$

Para toda la cuerda en la polea:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \int_0^{m_t} \frac{1}{2} V_{G\,2}^2 dm + \int_o^{m_t} \frac{1}{2} V_{G\,2}^2 dm - V_{G\,2} \overbrace{\omega\, r}^{V_{G\,2}} \int_0^{\pi} \rho\ r\ \cos\theta\ d\theta$$

$$E_{K\,2\,Cu} = \frac{1}{2} m_{Cu} V_{G\,2}^2 + \frac{1}{2} m_{Cu} V_{G\,2}^2 - V_{G\,2}^2 * \rho * \overbrace{r\ sen\ \theta \Big|_0^{\pi}}^{0} = m_{Cu} V_{G\,2}^2 = 0.94 * 3 * V_{G\,2}^2$$

$$E_{K\,2\,Cu} = 2.82\, V_{G\,2}^2$$

b).- Para la cuerda lineal:

$$E_{K\,2\,C} = \frac{1}{2} m_{\ell} V_{P\,2}^2 = \frac{1}{2} * (1.8 + 0.88) * 3 * \left(2\, V_{G\,2}\right)^2 = 16.08\, V_{G\,2}^2$$

c).- Para la polea:

$$E_{K\,2\,P} = \frac{1}{2}\left(15*0.25^2 + 15*0.3^2\right)\left(\frac{V_{G\,2}}{r}\right) = 12.708\, V_{G\,2}^2$$

Luego:

$$E_{K\,2} = 31.608\, V_{G\,2}^2 = 31.608*1.2^2 = 45.516 \;\text{ Joule}$$

$$U_2 = \left[0.88*3*\left(1.78 - \frac{0.88}{2}\right) + 0.94*3*\left(0.9 - \frac{0.6}{\pi}\right) + \left(1.8 + 0.88\right)*3*\left(0.9 + \frac{(1.8+0.88)}{2}\right) + 15*0.1\right]*9.81$$

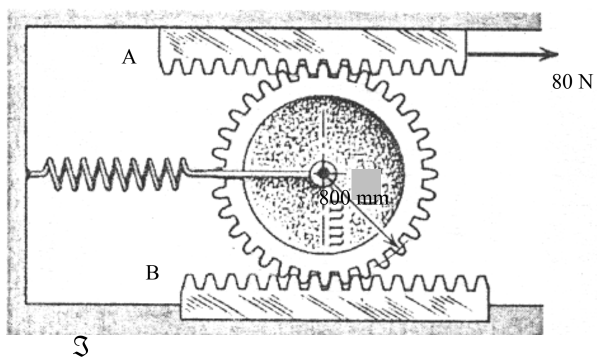
$$U_2 = 363.43 \;\text{ Joule}$$

Por lo tanto:

$$1.8\,P = (362.43 + 45.516) - 87.96 = 319.986$$

$$P = 177.77 \;\text{ Newton}$$

4-34.- La cremallera movible A tiene una masa de 3 kg y la cremallera B esta fija. La rueda dentada tiene una masa de 2 kg, un radio de paso de 800 mm y un radio de giro centroidal de 60 mm. En la posición de la figura, el resorte de constante K = 1.2 KN/m esta alargado una longitud de 40 mm. Para el instante representado, determinar la aceleración de la cremallera A bajo la acción de la fuerza de 80 N: El plano de la figura es vertical.

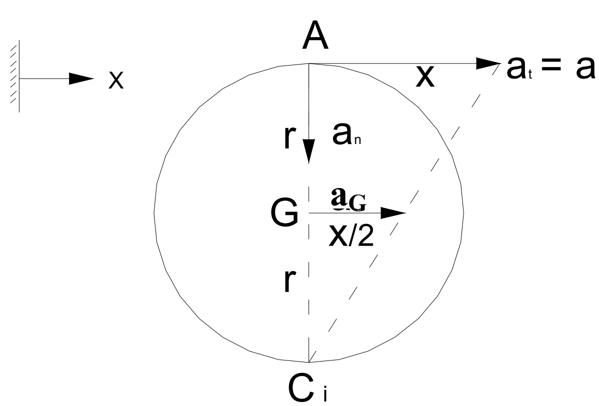


P4-34

Solución

Por la forma alternativa del trabajo de fuerzas y momentos no conservativos y cambio de energía mecánica, para desplazamiento infinitesimales reales.

1).- Relaciones cinemáticas:



P4-34a

$$a_G = \frac{a}{2}$$

$$X_G = \frac{X}{2} = \theta\, r$$

$$\frac{dX}{2} = r\ d\theta \quad \rightarrow \quad d\theta = \frac{dX}{2\ r}$$

2).- Por la forma alternativa de trabajos de fuerza y momento no conservativos y el cambio de energía mecánica, para desplazamientos infinitesimales reales:

$$dW_{F\ N\ C} = dE_K + dU$$

a).- Para la energía cinética:

$$dE_K = \sum m_i \bar{a}_{G\,i} \cdot d\ \bar{r}_{G\,i} + \sum I_{G\,i} \alpha_i d\theta_i$$

$$dE_{K\ Cre} = 3\ a\ dX \quad \text{(Cremallera en traslación)}$$

$$dE_{K\ eng} = 2 * \frac{a}{2} * \frac{dX}{2} + 2\left(0.06\right)^2 * \frac{a/2}{0.8} * \frac{dX}{2 * 0.8} = 0.503\ a\ dX$$

b).- Para la energía Potencial:

$$dU = \sum m_i g \overbrace{dh_i}^{0} + \sum K_j X_j dX_j = 12\ 000 * \left(0.04\right) * \frac{dX}{2} = 24\ dX$$

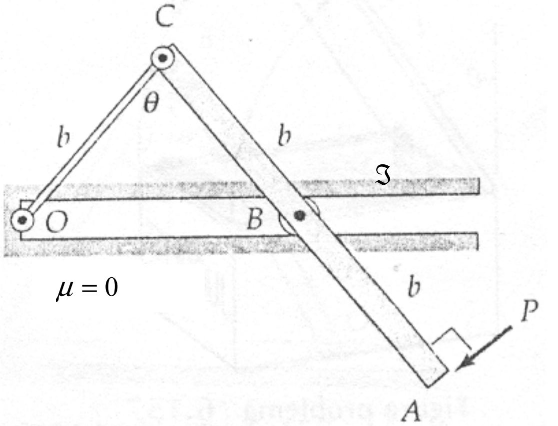
Luego:

$$80\ dX = 3\ a\ dX + 0.503\ a\ dX + 24\ dX$$

$$80 = 3.503\ a + 24 \quad \rightarrow \quad a = 15.99 \ \ \text{m/seg}^2$$

$$a \cong 16 \ \ \text{m/seg}^2$$

4-35.- La barra uniforme ABC tiene una masa *m* y parte del reposo con θ = 180°, en que A, B, C y O están alineados. Si la fuerza aplicada P es de intensidad constante, determinar la velocidad angular ω de la barra cuando B llega a O, siendo θ =0°. Las masas del rodillo B y del tensor OC son despreciables *(sugerencia: Sustituir la fuerza P, por una fuerza P aplicado en B y un par)*.

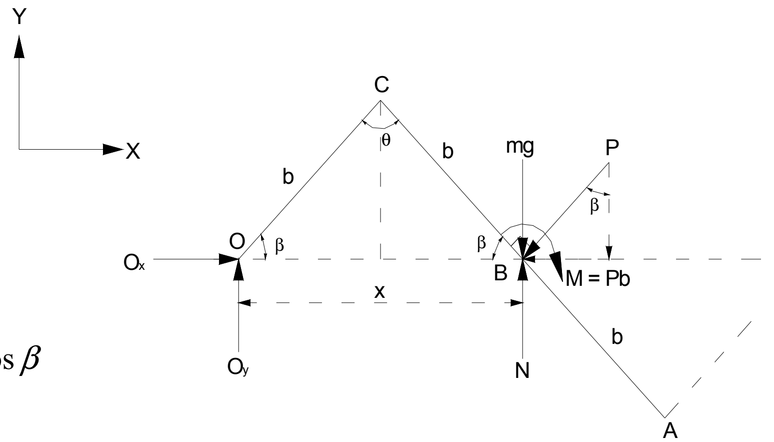


P4-35a

Solución

Por el principio de trabajo y energía cinética.

1).- D.S.F. y sustitución de P en A, en P y un par en B (ver figura P4-35a):



P4-35a

2).- Relaciones cinemáticas:

$$\cos\beta = \frac{X/2}{b} \quad \rightarrow \quad X = 2\,b\cos\beta$$

$$\dot{X} = V_B = -2\,b\,sen\,\beta\,\frac{d\beta}{dt}$$

$$\ddot{X} = a_B = -2\,b\cos\beta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 - 2\,b\,sen\,\beta\,\alpha$$

3).- Cálculo del trabajo sobre el sistema:

$$W_{1-2} = W_{1-2\,P} + W_{1-2\,M}$$

$$W_{1-2\,P} = \int_1^2 \overline{P}\cdot\overline{V}_B dt = \int_1^2 P\left(-sen\,\beta\,\bar{i} - \cos\beta\,\bar{j}\right)\cdot\left(-2\,b\,sen\,\beta\,\frac{d\beta}{dt}\,\bar{i}\right)dt$$

$$W_{1-2\,P} = \int_0^{\pi/2} 2\,b\,P\,sen^2\beta\,d\beta = 2\,b\,P\left(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}sen\,2\,\beta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = b\,P\,\frac{\pi}{2} \text{ (Unid. de energía)}$$

$$W_{1-2\,M} = \int_0^{\pi/2} M\,d\beta = P\,b\,\beta\,\Big|_0^{\pi/2} = b\,P\,\frac{\pi}{2} \text{ (Unid. de energía)}$$

Luego:

$$W_{1-2} = b\,P\,\frac{\pi}{2} + b\,P\,\frac{\pi}{2} = b\,P\,\pi \text{ (Unid. de energía)}$$

4).- Cálculo de la energía cinética del sistema:

$$E_{K\,1} = 0$$

$$E_{K\,2} = \frac{1}{2} m\, V_B^2 + \frac{1}{2} I_B \omega^2 = \frac{1}{2} m \left(4\omega^2 b^2 + \frac{1}{12} * 4\, b^2 \omega^2 \right) = \frac{13}{6} m\, b^2 \omega^2 \quad \text{(Unid. de energía)}$$

5).- Por el principio de trabajo y energía cinética:

$$W_{1-2} = E_{K\,2} - E_{K\,1}$$

Luego:

$$b\, P\, \pi = \frac{13}{6} m\, b^2 \omega^2 \quad \rightarrow \quad \omega^2 = \frac{6\, P\, \pi}{13\, m\, b} \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{6\, P\, \pi}{13\, m\, b}} \quad \text{(Unid. de velocidad angular)}$$

4-36.- Para el problema anterior (4-35); determinar la aceleración angular de AC debido a la acción de la fuerza P, para cualquier valor de θ. La masa de la varilla OC es despreciable y la guía horizontal es lisa.

Solución

Las únicas que producen trabajo son el momento y la fuerza P, que no son conservativos, por lo que usamos la forma alternativa de trabajo hecho por fuerzas y momentos no conservativos y el cambio de la energía mecánica en desplazamiento infinitesimales reales. Además aprovechamos las fórmulas encontradas en las relaciones cinemáticas, en la solución anterior.

Si:

$$dW_{1-2\,FNC} = dE_K + dU$$

1).- Para la energía cinética:

$$dE_K = \sum m_i \bar{a}_{G\,i} \cdot d\bar{r}_{G\,i} + \sum I_{G\,i} \alpha_i d\theta_i$$

$$dE_K = m \left[-2\, b \cos\beta \overbrace{\left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2}^{0} - 2\, b\, sen\, \beta\, \alpha \right] \bar{i} \cdot \left(-2\, b\, sen\, \beta\, d\beta \right) \bar{i} + \frac{1}{12} m * 4\, b^2 \alpha\, d\beta$$

$$dE_K = 4\, b^2 m \left(sen^2 \beta + \frac{1}{12} \right) \alpha\, d\beta = 4\, b^2 m \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{12} \right) \alpha\, d\beta$$

$$dE_K = 4\,b^2 m\left(\frac{\cos\theta+1}{2}+\frac{1}{12}\right)\alpha\,d\beta = b^2 m\left(\frac{6\cos\theta+7}{3}\right)\alpha\,d\beta$$

2).- Para la energía potencial:

$$dU = \sum m_i g \overbrace{dh_i}^{0} + \sum \overbrace{K_j X_j dX_i}^{0} = 0$$

3).- Para el trabajo:

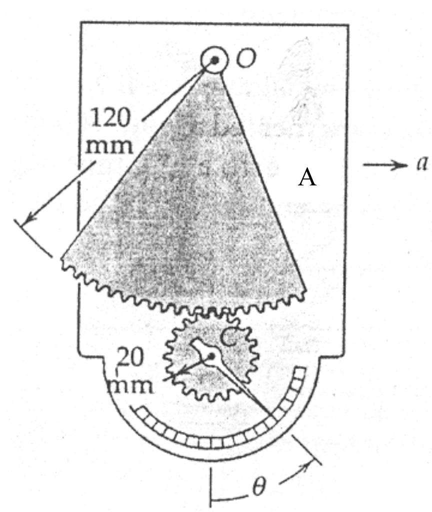
$$dW_{1-2\,FNC} = 2\,b\,P\,sen^2\beta\,d\beta + P\,b\,d\beta = P\,b\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}+1\right)d\beta = P\,b\,(\cos\theta+2)\,d\beta$$

Luego:

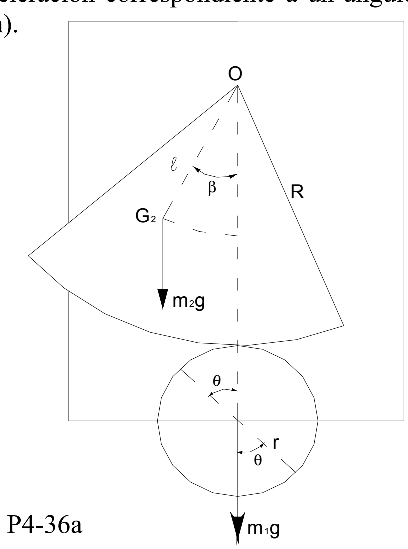
$$P\,b\,(2+\cos\theta)\,d\beta = \frac{b^2 m}{3}(7+6\cos\theta)\,\alpha\,d\beta$$

$$\alpha = \left(\frac{3\,P}{b\,m}\right)\left(\frac{2+\cos\theta}{7+6\cos\theta}\right)$$ (Unid. de aceleración angular)

4-37.- El mecanismo representado, se compone de un armazón vertical A sobre el que gira libremente en torno a O un sector conjugado del engranaje C, que lleva un índice solidario. Bajo una aceleración uniforme horizontal "a" hacia la derecha, el engranaje sufre un desplazamiento angular antihorario constante θ, respecto a la posición de aceleración nula θ = 0°. Hallar la aceleración correspondiente a un ángulo θ (sistema en traslación).



P4-36



P4-36a

Solución

1).- D.S.F. (ver figura P4-36a):

$$\theta\,r = \beta\,R \quad\rightarrow\quad \beta = \frac{r}{R}\theta = \frac{20}{120}\theta = \frac{\theta}{6}$$

2).- Relaciones cinéticas:

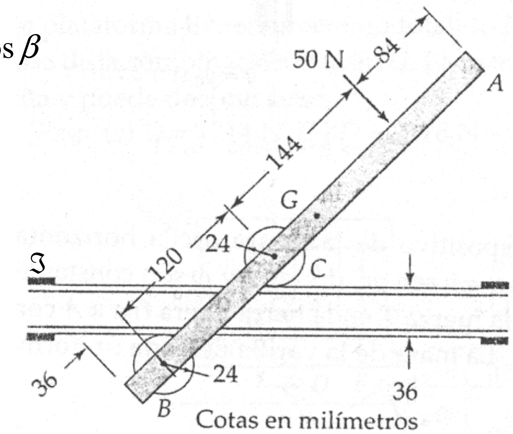
$$\sum M_0 = \sum \overbrace{I_{G\,i}\alpha_i}^{0} + \sum m_i a_{G\,i} d_i$$

El centro de masa del índice solidario no tiene movimiento respecto a O:

$$m_2 g\ \ell\ sen\ \beta = a\left(m_2 \ell \cos\beta\right) \quad \rightarrow \quad g\ sen\beta = a\cos\beta$$

$$a = g\ tg\beta = g\ tg\frac{\theta}{6} \quad \text{(Unid. de aceleración)}$$

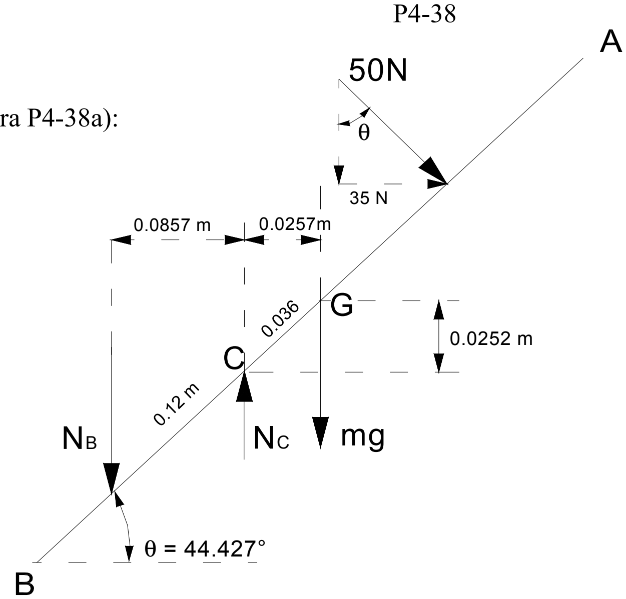
4-38.- El laminador de rodillo se compone de la barra uniforme de 2 kg ACB, con dos rodillos livianos que hacen compresión sobre las caras superior e inferior de un contrachapado a lo largo del borde. Hallar la fuerza que ejerce cada rodillo sobre el contrachapado cuando a la barra se aplica una fuerza de 50 N en la posición representada. Despreciar todos los rozamientos.



P4-38

Solución

1).- D.S.F. (sistema en traslación) (ver figura P4-38a):



P4-38a

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m\ a \quad \rightarrow \quad 35 = 2\ a$$

$$a = 17.5 \quad \text{m/seg}^2$$

$$\sum M_C = \sum m_i a_{G\,i} d_i$$

Si:

$$\sum m_i a_{G\,i} d_i = -2*17.5*0.0252 = -0.882 \ \text{N-m} \qquad (1)$$

$$\sum M_C = 0.0857*N_B - 2*9.81*0.257 - 50*0.144 = 0.0857 N_B - 12.242 \qquad (2)$$

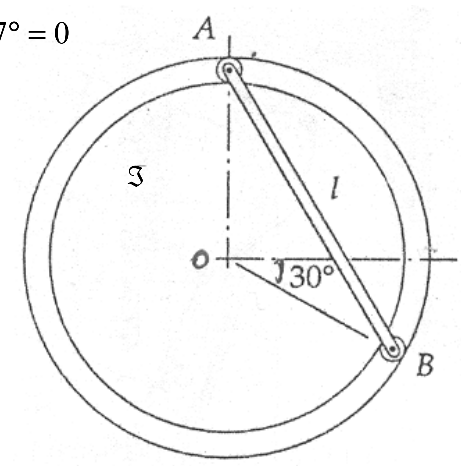
(1) = (2):

$$0.0857N_B - 7.704 = -0.882 \quad \rightarrow \quad N_B = 132.56 \text{ Newton}$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad -79.6 + N_C - 2*9.81 - 50\cos 44.427° = 0$$

$$N_C = 187.887 \text{ Newton}$$

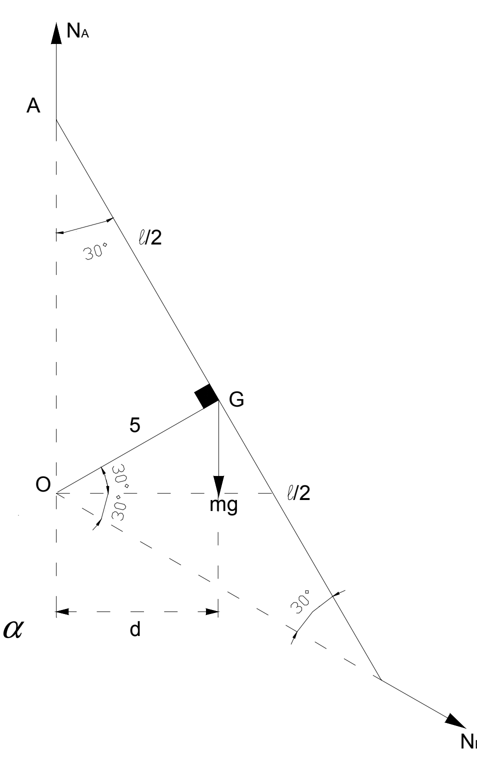
4-39.- Los pequeños rodillos de los extremos de la barra esbelta uniforme están vinculados a la ranura circular de la superficie vertical. Si la barra se suelta en reposo desde la posición indicada, hallar la aceleración angular inicial α. Se desprecian las masas de los rodillos y el rozamiento en ellos.



P4-39

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P4-39a):



P4-39a

$$tg30° = \frac{s}{\ell/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad s = \frac{\ell}{2\sqrt{3}}$$ (Unid de longitud)

$$\cos 30° = \frac{d}{s} \quad \rightarrow \quad d = \frac{\sqrt{3}}{2}s = \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\ell}{2\sqrt{3}}$$

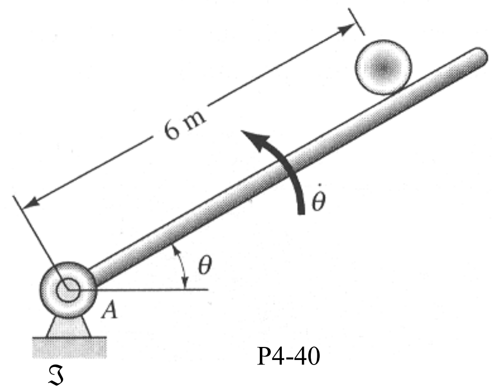
$$d = \frac{\ell}{4}$$ (Unid. de longitud)

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_O = I_O\alpha \quad \rightarrow \quad -mg\frac{\ell}{4} = -m\left[\frac{1}{12}\ell^2 + \left(\frac{\ell}{2\sqrt{3}}\right)^2\right]\alpha$$

$$g = \frac{2}{3}\ell\,\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{3g}{2\ell}$$ (Unid. de aceleración angular)

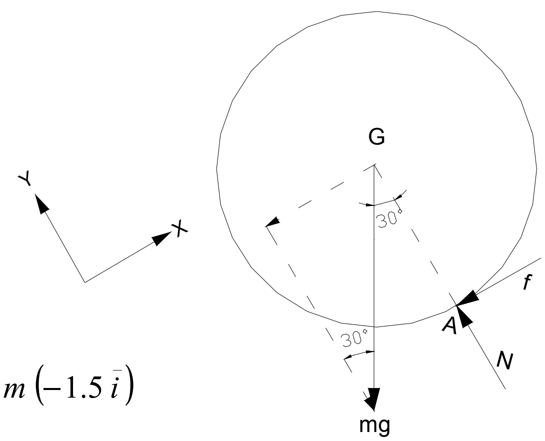
4-40.- Un cilindro de 50 kg de masa y 0.3 m de radio se mantiene fijo sobre el plano inclinado que está girando a 0.5 rad/seg. Se suelta el cilindro cuando el plano inclinado está en una posición θ = 30°. Si en el instante de soltarse el cilindro está a 6 m del punto O. ¿Cuál será la aceleración inicial del centro del cilindro relativa al plano inclinado? No hay deslizamiento.



P4-40

Solución

1).- D.C.L. del cilindro (ver figura P4.40a):



P4-40a

2).- Relaciones cinemáticas, por rodamiento:

$$\bar{a}_A = -\omega^2\ \bar{r}_{OA} = -0.5^2\left(6\ \bar{i}\right) = -1.5\ \bar{i}\ \ \text{(m/seg}^2\text{)}$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_A\ \bar{k} = I_A \alpha\ \bar{k} + \bar{\rho}_{AG} x\ m\ \bar{a}_A$$

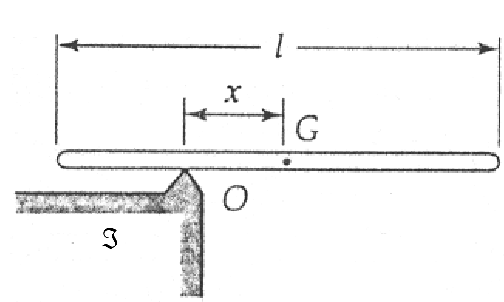
$$mg\ sen\ 30°\ r\ \bar{k} = \left(\frac{1}{2} m\ r^2 + m\ r^2\right)\alpha\ \bar{k} + r\ \bar{j}\ x\ m\left(-1.5\ \bar{i}\right)$$

$$9.81 * 0.5 * 0.3 = \frac{3}{2} * 0.3^2 \alpha + 0.3 * 1.5 \quad \rightarrow \quad \alpha = 7.57 \quad \text{rad/seg}^2$$

4).- Cálculo de la aceleración inicial relativo al plano inclinado:

$$\bar{a}_{G/\Re} = -\alpha\ r\ \bar{i} = -7.57 * 0.3\ \bar{i} = -2.271\ \bar{i}\ \ \text{(m/seg}^2\text{)}$$

4-41.- La barra delgada uniforme se suelta desde el reposo en la posición horizontal indicada. Hallar el valor de X para el que es máximo la aceleración angular y el valor correspondiente α de la misma.

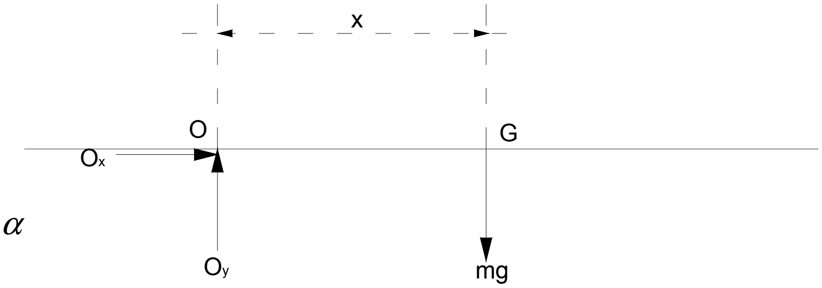


P4-41

Solución

El movimiento es inminente, alrededor de un eje fijo que pasa por O.

1).- D.C.L. (ver figura P4-41a):



P4-41a

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_O = I_O \alpha$$

$$mg\ X = \left(\frac{1}{12} m\,\ell^2 + m\,X^2\right)\alpha$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{12\ g\ X}{\ell^2 + 12\ X^2} \qquad (1)$$

3).- Por máximos y mínimos en (1):

$$\frac{d\alpha}{dX} = \frac{\left(\ell^2 + 12X^2\right) * 12g - 12gX * \left(24X\right)}{\left(\ell^2 + 12X^2\right)^2} = 0$$

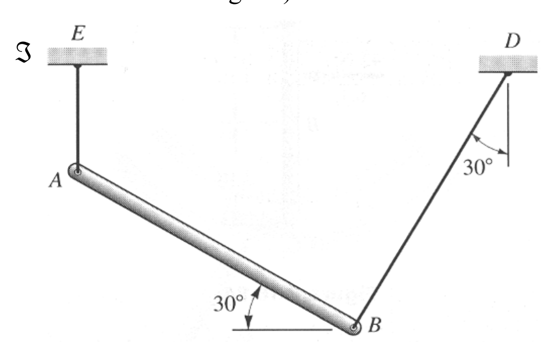
$$\left(\ell^2 + 12X^2\right) * 12g - 12gX * \left(24X\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \ell^2 - 12X^2 = 0$$

$$X = \frac{\ell}{2\sqrt{3}} \text{ (Unid. de longitud)}$$

Reemplazando en (1):

$$\alpha_{máx} = \frac{12g\left(\dfrac{\ell}{2\sqrt{3}}\right)}{\ell^2 + 12\left(\dfrac{\ell^2}{12}\right)} = \frac{6\ \ell g}{2\ \ell^2\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{g}{\ell}\sqrt{3} \text{ (Unid. de aceleración angular)}$$

4-42.- Una barra AB, inicialmente en reposo, de 3m de longitud y un peso de 445 N se muestra inmediatamente después de haberse soltado. Calcular la fuerza de tracción en los cables EA y BD en ese instante.

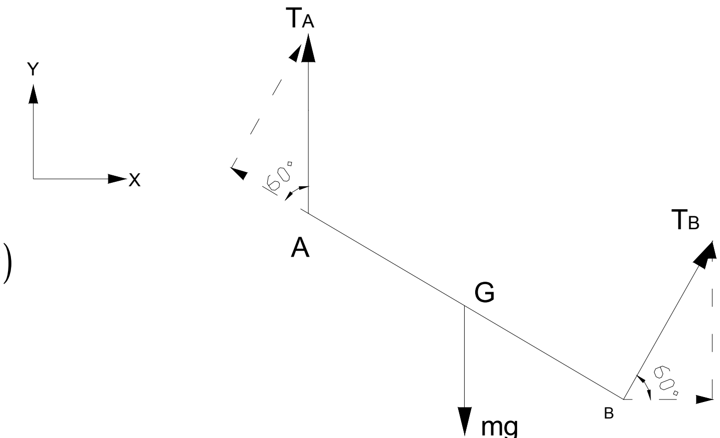


P4-42

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P4-42a):

2).- Relaciones cinemáticas:



P4-42a

$$\bar{a}_A = a_A\ \bar{i}$$

$$\bar{a}_B = a_B\left(\cos 30°\ \bar{i} - sen\ 30°\ \bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_B = a_B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ \bar{i} - \frac{1}{2}\ \bar{j}\right)$$

Si:

$$\bar{a}_G = a_A \bar{i} + \alpha\ \bar{k}\ x\ 1.5\ \left(\cos 30°\ \bar{i} - sen\ 30°\ \bar{j}\right) = \left(a_A + 0.75\ \alpha\right)\bar{i} + 0.75\sqrt{3}\ \alpha\ \bar{j} \qquad (1)$$

También:

$$\bar{a}_G = \bar{a}_B + \alpha\ \bar{k}\ x\ 1.5\left(-\cos 30° \bar{i} + sen 30° \bar{j}\right) = \begin{pmatrix} a_B \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \\ 0.75\alpha \end{pmatrix}\bar{i} + \begin{pmatrix} -0.5 a_B - \\ 0.75\sqrt{3}\alpha \end{pmatrix}\bar{j} \qquad (2)$$

(1)=(2) e igualando componentes:

$$-0.5\ a_B - 0.75\sqrt{3}\ \alpha = 0.75\sqrt{3}\ \alpha \quad \rightarrow \quad a_B = -3\sqrt{3}\ \alpha$$

$$-3\sqrt{3} * \frac{\sqrt{3}}{2}\ \alpha - 0.75\ \alpha = a_A + 0.75\ \alpha \quad \rightarrow \quad a_A = -6\ \alpha$$

En (1):

$$\bar{a}_G = -5.25\ \alpha\ \bar{i} + 0.75\sqrt{3}\ \alpha\ \bar{j}$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m\ \ddot{X}_G \quad \rightarrow \quad 0.5\ T_B = -\frac{445}{9.81} * 5.25\ \alpha \quad \rightarrow \quad T_B = -476.3\ \alpha \qquad (3)$$

$$\sum F_Y = m\ \ddot{Y}_G \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} T_B + T_A - 445 = \frac{445}{9.81} * 0.75\sqrt{3}\alpha$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}*476.3\,\alpha+T_A-445=58.93\,\alpha\quad\rightarrow\quad T_A=445+471.42\,\alpha \qquad (4)$$

$$\sum M_G=I_G\alpha$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}T_A*1.5+1.5T_B=-\frac{1}{2}*\frac{445}{9.81}*3^2\alpha\;\rightarrow\;-1.299T_A+1.5T_B=-204.13\alpha \qquad (5)$$

(3) y (4) en (5):

$$-1.5*476.3\,\alpha-445*1.299-1.299*471.42\,\alpha=-204.13\,\alpha$$

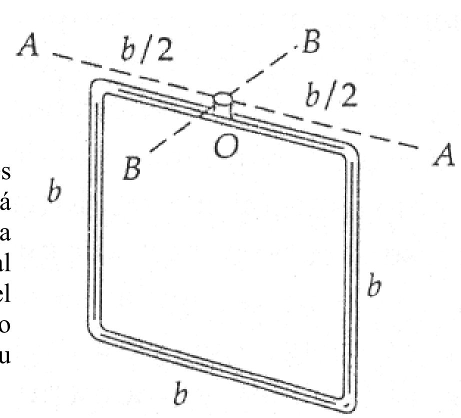
$$1122.69\,\alpha=-578.055\quad\rightarrow\quad\alpha=-0.515\ \text{rad/seg}^2$$

Luego en (3) y (4):

$$T_B=476.3*0.515=245.3\ \text{Newton}$$

$$T_A=445-471.42*0.515=202.2\ \text{Newton}$$

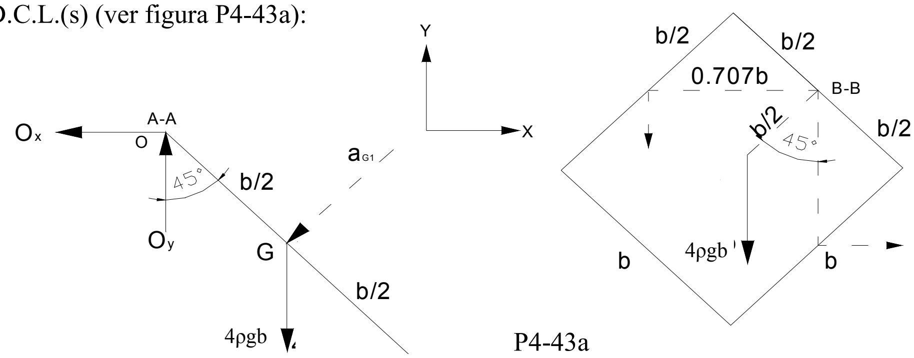
4-43.- El bastidor cuadrado se compone de cuatro trozos iguales de varilla delgada uniforme y la esfera O (rotula) está suspendida de un zócalo (no representada). A partir de la posición indicada, el conjunto recibe un giro de 45° en torno al eje A-A y se suelta. Hallar la aceleración angular inicial del bastidor. Repetir los cálculos para una rotación de 45° en torno al eje B-B. Despreciar la pequeña masa de la esfera, su descentrado y el rozamiento en ella.



P4-43

Solución

1).- D.C.L.(s) (ver figura P4-43a):



P4-43a

(a) (b)

2).- Relaciones cinéticas, para (a):

$$\sum M_O = \sum I_{G\,i}\alpha_i + \sum m_i a_{G\,i} d_i$$

Si:

$$\sum M_O = 4\rho\, bg * \frac{b}{2} sen\, 45° = 2\rho\, b^2 g \frac{\sqrt{2}}{2} = \rho\, g\, b^2 \sqrt{2}$$ (Unid. de momentos)

$$\sum I_{G\,i}\alpha_i = 2\left(\frac{1}{12}\rho\, b^3\right)\alpha = \frac{\rho\, b^3}{6}\alpha$$ (Unid. de momentos)

$$\sum m_i a_{G\,i} d_i = \rho\, b\left(2\alpha * \frac{b}{2} * \frac{b}{2} + \alpha\, b^2\right) = \rho\, b^3 \alpha\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{2}\rho\, b^3 \alpha$$ (Unid. de momentos)

Luego:

$$\rho\, g\, b^2 \sqrt{2} = \rho\, b^3 \alpha\left(\frac{1}{6} + \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{3} b^3\ \alpha$$

$$\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5} * \frac{g}{b} = 0.849\, \frac{g}{b}$$ (unid. de aceleración angular)

3).- Relaciones cinéticas, para (b):

$$\sum M_O = 4\rho\, b\, g * \frac{b}{2} sen\, 45° = \rho\, g\, b^2 \sqrt{2}$$ (Unid. de momentos)

$$\sum I_{G\,i}\alpha_i = 4 * \frac{1}{12}\rho\, b^3 \alpha = \frac{\rho\, b^3}{3}\alpha$$ (Unid. de momentos)

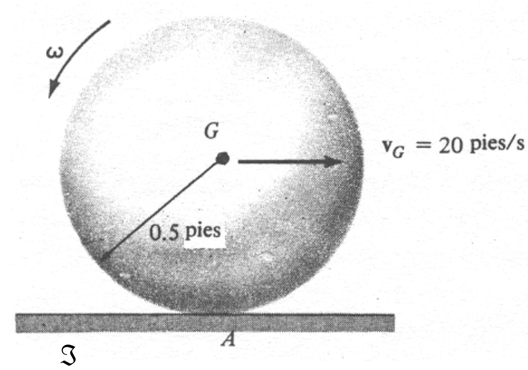
$$\sum m_i a_{G\,i} d_i = \rho\, b\alpha\left(2 * \frac{b\sqrt{2}}{2} * \frac{b\sqrt{2}}{2} + b^2\right) = 2\rho\, b^3 \alpha$$ (Unid. de momentos)

Luego:

$$\rho\, g\, b^2 \sqrt{2} = \rho\, b^3 \alpha\left(\frac{1}{3} + 2\right) = \frac{7}{3}\rho\, b^3 \alpha$$

$\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{7} * \frac{g}{b} = 0.606 \frac{g}{b}$ (Unid. de aceleración angular)

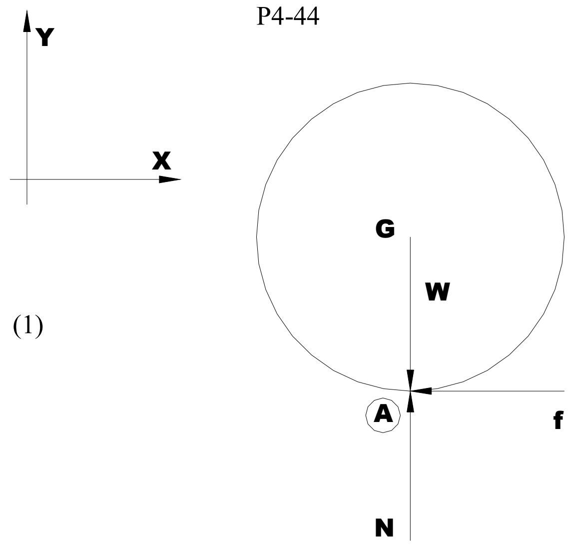
4-44.- La esfera sólida de 20 lb se tira sobre el suelo de tal manera que tiene una velocidad angular de retroceso de ω = 15 rad/seg y su centro tiene una velocidad inicial de V_G = 20 pie/seg. Si el coeficiente de fricción entre el piso y la esfera es μ_A = 0.3, determine la distancia que recorre antes que pare el efecto de retroceso.



P4-44

Solución

1).- D.C.L.:



P4-44a

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m\, a_{G\,X} \quad \rightarrow \quad -f = -m\, a_{G\,X}$$

$$f = \frac{20}{32.2} a_G = 0.62\, a_G \qquad (1)$$

$$\sum M_G = I_G\, \alpha \quad \rightarrow \quad -f\, r = -I_G\, \alpha$$

$$f\, r = \frac{2}{5} * \frac{20}{32.2} * r^2 \alpha$$

$$f = 0.1242\, \alpha \qquad (2)$$

(1) = (2):

$$0.62\, a_G = 0.1242\, \alpha \quad \rightarrow \quad a_G = 0.2\, \alpha$$

Si solamente hubiera rodadura $a_G = 0.5\, \alpha$, luego la esfera desliza, por lo que:

$$f = \mu\, N = 0.3 * 20 = 6 \text{ lb}$$

En (1):

$$a_G = \frac{6}{0.62} = 9.677 \text{ pie/seg}^2 \quad \rightarrow \quad \bar{a}_G = -0.967\,\bar{i} \quad (\text{pie/seg}^2)$$

En (2):

$$\alpha = \frac{6}{0.1242} = 48.31 \text{ rad/seg}^2 \quad \rightarrow \quad \bar{\alpha} = -48.31\,\bar{k} \quad (\text{rad/seg}^2)$$

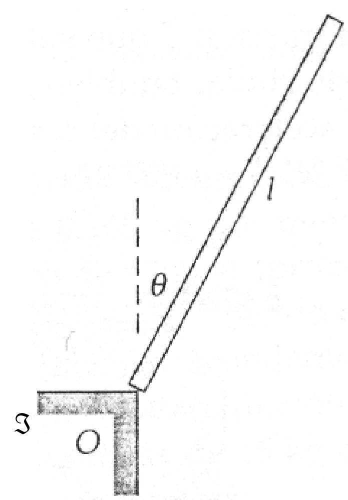
3).- Relaciones cinemáticas:

$$\omega = \alpha\, t \quad \rightarrow \quad t = \frac{15}{48.31} = 0.31\, seg$$

$$X = V_{G0}t - \frac{1}{2}a_G t^2 = 20 * 0.31 - \frac{1}{2} * 9.677 * 0.31^2$$

$$X = 5.735 \text{ pies}$$

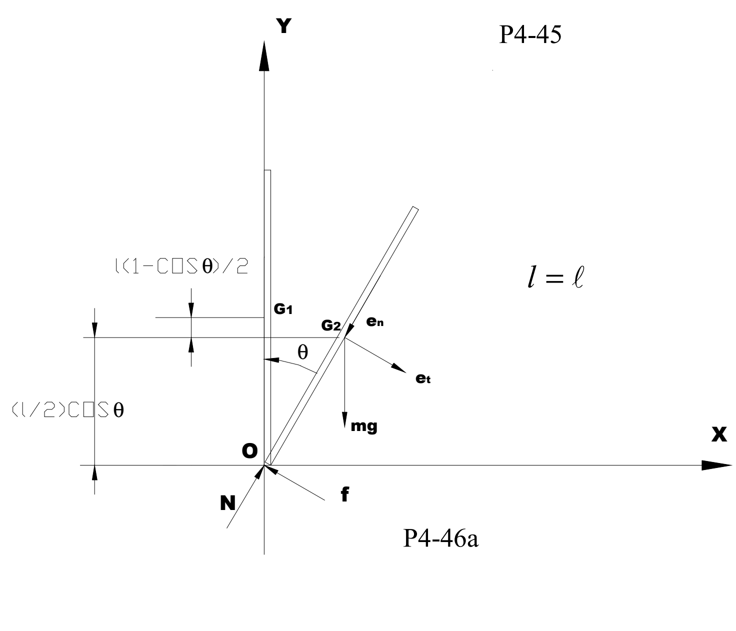
4-45.- La barra esbelta uniforme de masa m y longitud ℓ se abandona desde el reposo, cuando está vertical, de manera que gira sobre su extremo en torno a la esquina O. a) si se observa que resbala cuando θ = 30°, hallar el coeficiente de rozamiento estático μ_s entre la barra y la esquina, b) Si el extremo de la barra se entalla de modo que no pueda resbalar, hallar para que ángulo θ cesa su contacto con la esquina.



P4-45

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P4-46a):



$l = \ell$

P4-46a

2).- Relaciones cinemáticas, para ambos casos:

$$\bar{a}_G = \alpha\,\frac{\ell}{2}\,\bar{e}_t + \omega^2\,\frac{\ell}{2}\,\bar{e}_n$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_t = m\,a_t \quad \rightarrow \quad -f + mg\,sen\,\theta = m\,\alpha\,\frac{\ell}{2} \quad \rightarrow \quad f = m\left(g\,sen\,\theta - \alpha\,\frac{\ell}{2}\right) \qquad (1)$$

$$\sum F_n = m\,a_n \quad \rightarrow \quad mg\cos\theta - N = m\,\omega^2\,\frac{\ell}{2} \quad \rightarrow \quad N = m\left(g\cos\theta - \omega^2\,\frac{\ell}{2}\right) \qquad (2)$$

$$\sum M_0 = I_0\alpha \quad \rightarrow \quad -mg\,\frac{\ell}{2}\,sen\,\theta = -\frac{1}{3}m\,\ell^2\alpha$$

$$\alpha = \frac{3g}{2\,\ell}\,sen\,\theta \quad \text{(Unid. de aceleración angular)}$$

Para θ = 30°:

$$\alpha = \frac{3g}{4\,\ell} \text{ (Unid. de aceleración angular)} \qquad (3)$$

4).- Por el principio de trabajo y energía cinética:

$$W_{1-2} = \Delta E_K \quad \rightarrow \quad mg\,\frac{\ell}{2}\left(1-\cos\theta\right) = \frac{1}{2} * \frac{1}{3}m\,\ell^2\omega^2 \quad \rightarrow \quad \omega^2 = \frac{3g}{\ell}\left(1-\cos\theta\right)$$

Para θ = 30°:

$$\omega^2 = 0.402\,\frac{g}{\ell} \qquad (4)$$

Para θ = 30°, reemplazando (4) en (2):

$$N = m\left(g\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 0.402\,\frac{g}{\ell} * \frac{\ell}{2}\right) = 0.665\,mg \quad \text{(Unid. de fuerza)}$$

Para θ = 30°, reemplazando (3) en (1):

$$f = m\left(\frac{g}{2} - \frac{3g}{4\,\ell} * \frac{\ell}{2}\right) = 0.125\,mg$$

Si, $\mu_s N = f$:

$$\mu_s * 0.665\ mg = 0.125\ mg \quad \rightarrow \quad \mu_s = \frac{0.125}{0.665} = 0.188$$

5).- Cálculo del ángulo θ, para que la barra abandone su soporte:

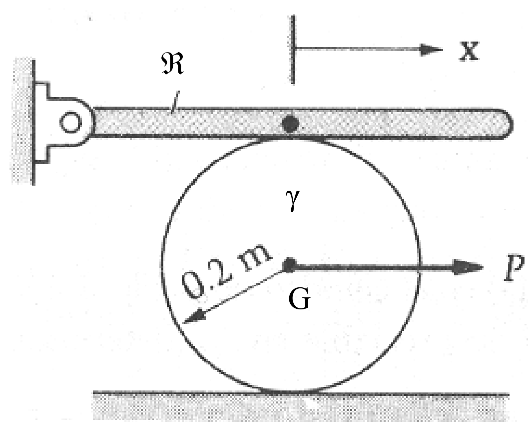
En (2):

$$0 = m\left(g\cos\theta - \omega^2 \frac{\ell}{2}\right) \quad \rightarrow \quad g\cos\theta = \frac{3g}{\ell}(1-\cos\theta)\frac{\ell}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos\theta \quad \rightarrow \quad \frac{5}{2}\cos\theta = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad \cos\theta = 0.6$$

$$\theta = 53.13°$$

4-46.- La fuerza P = 60 N se aplica como se muestra en la figura al cilindro γ de 10 kg, originalmente en reposo, bajo el centro de masa de la placa ℜ rectangular delgada de 5 kg. El coeficiente de fricción entre γ y ℜ es 0.5 y el plano bajo γ es liso. Determine: a) La aceleración inicial de G, b) El valor de X cuando γ está resbalando sobre ambas superficies. La longitud de ℜ es de 2m.

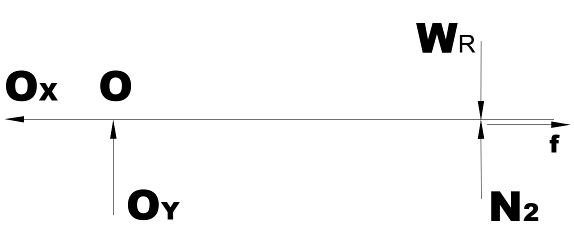


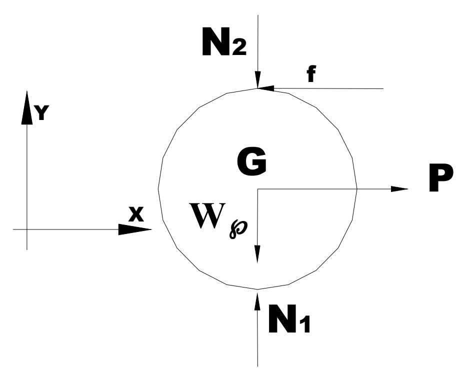
P4-46

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P4-46a):

a) Estado inicial:

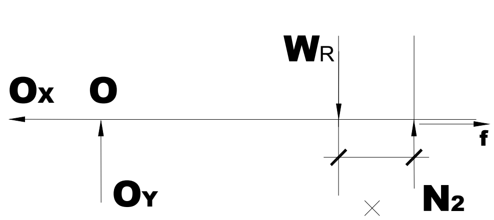


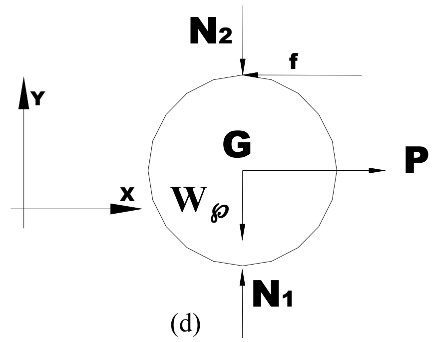


P4-46a

(a) (b)

b).- Para un X cualquiera (ver figura P4-46b):





P4-46b

(c) (d)

2).- Cálculo de la aceleración inicial, suponiendo que no hay resbalamiento:

En (a):

$$\sum M_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\ell}{2} N_2 - \frac{\ell}{2} w_{\Re} = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 = 5*9.81 = 49.05 \text{ Newton}$$

En (b):

$$\sum F_X = m\, a_G \quad \rightarrow \quad P - f = m_{\wp} a_G \quad \rightarrow \quad f = 60 - 10*0.2\,\alpha = 60 - 2\,\alpha \qquad (1)$$

$$\sum M_G = I_G \alpha \quad \rightarrow \quad f\, r = \frac{1}{2} m\, r^2 \alpha \quad \rightarrow \quad f = 5*0.2\,\alpha = \alpha \qquad (2)$$

(1)=(2):

$$\alpha = 60 - 2\,\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = 20 \text{ rad/seg}^2 \quad \rightarrow \quad f = 20 \text{ Newton}$$

Comprobando si hay resbalamiento:

$$\mu\, N_2 = 0.5*49.05 = 24.525 \text{ Newton}$$

Luego:

$f < \mu\, N_2$ hay rodamiento (la suposición fue correcta)

$$\therefore \quad a_G = \alpha\, r = 20*0.2 = 4 \text{ m/seg}^2$$

3).- Para el resbalamiento inminente, $f = \mu\, N_2$ y $a_G = \alpha\, r$:

En (c):

$$\sum M_0 = 0 \quad \rightarrow \quad -1 * w_{\Re} + (1+X)\, N_2 = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 = \frac{49.05}{1+X}$$

En (b):

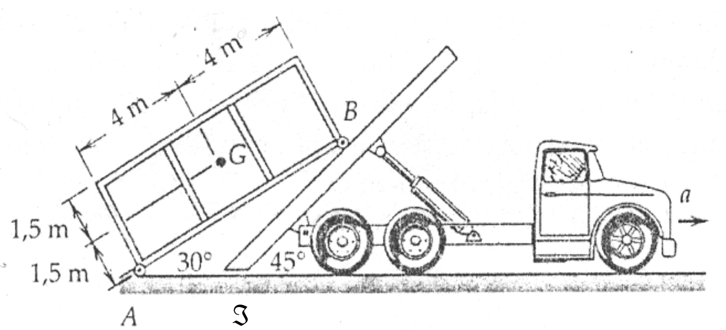
$$\sum M_G = I_G\, \alpha \quad \rightarrow \quad f\, r = \frac{1}{2} m\, r^2 \alpha \quad \rightarrow \quad f = 5 * 0.2\, \alpha = \alpha$$

$$\sum F_X = m\, \alpha\, r \quad \rightarrow \quad 60 - 0.5 * \frac{49.05}{1+X} = 10 * 0.2 * \left(0.5 * \frac{49.05}{1+X} \right)$$

$$60\,(1+X) = 3 * 24.525 \quad \rightarrow \quad X = 1.2263 - 1 = 0.2263 \text{ m}$$

$$X \cong 0.23 \text{ m}$$

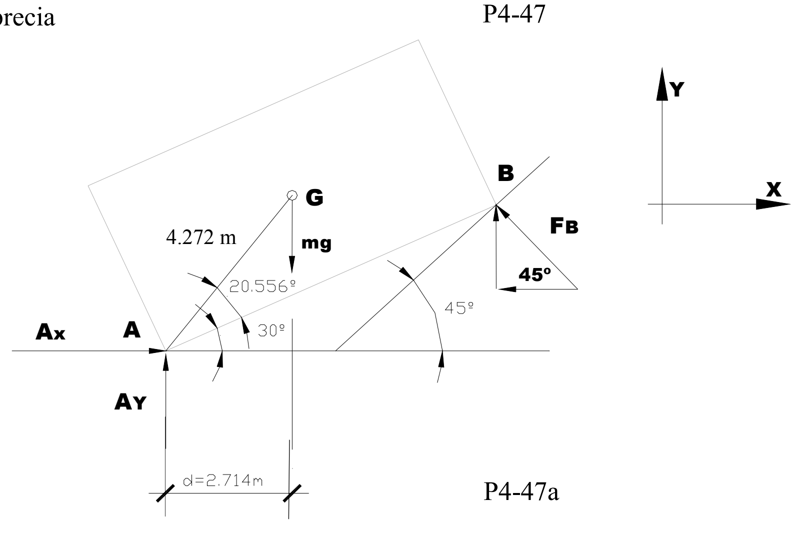
4-47.- Se ilustra la plataforma de descarga por rodadura de un camión de transporte de contenedores. El contenedor cargado de 120 Mg puede tratarse como un bloque rectangular macizo y homogéneo con centro de masa en G. Si la rueda de apoyo A está inmovilizada, calcular la fuerza F_B que ejerce la plataforma sobre la rueda de apoyo B cuando el camión arranca hacia delante con una aceleración de 3 m/seg^2. Se desprecia el rozamiento en B.



P4-47

Solución

1).- D.C.L. del contenedor:



P4-47a

2).- Relaciones cinemáticas:
Si:

$$\bar{a}_B = \bar{a} + \bar{a}_{B/P} = 3\,\bar{i} + a_{B/P}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{j}\right) = \left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,a_{B/P}\right)\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,a_{B/P}\,\bar{j} \qquad (1)$$

Además (comienza el movimiento alrededor de un eje fijo, que pasa por A):

$$\bar{a}_B = -\alpha\,\bar{k}\ x\ 8\left(\cos 30°\,\bar{i} + sen\ 30°\,\bar{j}\right) = 4\,\alpha\,\bar{i} - 6.93\,\alpha\,\bar{j} \qquad (2)$$

(1)=(2) e igualando componentes:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,a_{B/P} = -6.93\,\alpha$$

$$3 - 6.93\,\alpha = 4\,\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = 0.274 \ \text{ rad/seg}^2$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_A = I_A \alpha$$

$$-120\ 000 * 9.81 * 2.714 + F_B\,\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 8\cos 30° + \\ 8\ sen\ 30° \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} * 120\ 000\left(3^2 + 8^2\right) + \\ 120\ 000 * 4.272^2 \end{bmatrix} * (-0.274)$$

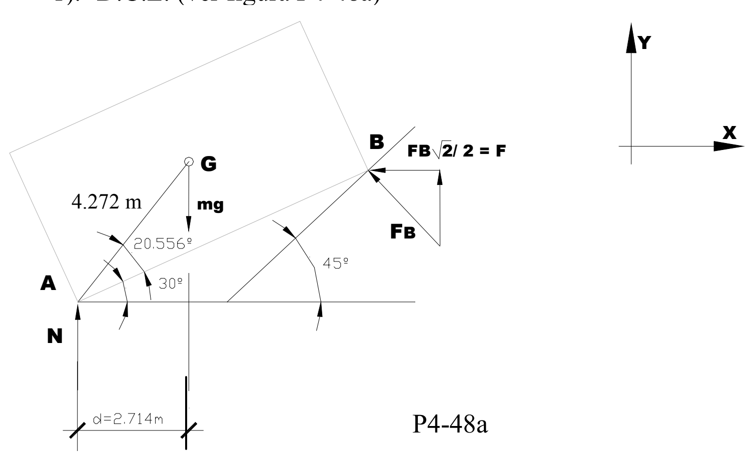
$$7.727\ F_B = 120\ 000\ (26.625 - 6.667)$$

$$F_B = 309.95x10^3 \text{ Newton} \quad \rightarrow \quad F_B \cong 310 \ \text{ KN}$$

4-48.- Se representa de nuevo al camión de contenedores del problema anterior. En la posición representada, las dos ruedas A están inmovilizadas y los frenos del vehículo aplicados para evitar que éste se mueva. Si súbitamente se liberan las ruedas A para permitir que ruede el contenedor, calcular la fuerza de rozamiento total F que se aplica a las ruedas del camión inmediatamente tras el desbloqueo. Se desprecia el rozamiento en A y B.

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P4-48a)



P4-48a

2).- Relaciones cinemáticas:

Si:

$$\bar{a}_B = a_B \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{j} \right) \qquad (1)$$

También:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A - \alpha\,\bar{k}\ x\ 8\left(\cos 30°\,\bar{i} + sen\ 30°\,\bar{j}\right) = \left(4\,\alpha - a_A\right)\bar{i} - 6.93\,\alpha\,\bar{j} \qquad (2)$$

(1) = (2) e igualando componentes:

$$-a_B\frac{\sqrt{2}}{2} = -6.93\,\alpha$$

$$4\,\alpha - a_A = -a_B\frac{\sqrt{2}}{2} = -6.93\,\alpha \quad \rightarrow \quad a_A = 10.93\,\alpha \ \text{ (Unid. de aceleración)}$$

Además:

$$\bar{a}_G = \bar{a}_A - \alpha\,\bar{k}\ x\ 4.272\left(\cos 50.556°\,\bar{i} + sen\ 50.556°\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_G = \left(3.3 - 10.93\right)\alpha\,\bar{i} - 2.714\,\alpha\,\bar{j} = -7.63\,\alpha\,\bar{i} - 2.714\,\alpha\,\bar{j} \ \text{ (Unid. de aceleración)}$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m\,\ddot{X}_G \quad \rightarrow \quad -F_B\frac{\sqrt{2}}{2} = -F = -7.63\,\alpha\,m \qquad (3)$$

$$\sum M_A\bar{k} = I_A\alpha + \bar{\rho}_{AG}x\ m\ \bar{a}_A$$

$$\begin{bmatrix} -9.81\,m*2.714\,\bar{k} + \\ F\begin{pmatrix} 8\cos 30° + \\ 8 sen\ 30° \end{pmatrix}\bar{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m\left(3^2 + 8^2\right) + \\ m*4.272^2 \end{bmatrix}(-\alpha)\bar{k} + 4.272m\begin{pmatrix} \cos 50.556°\,\bar{i} + \\ sen\ 50.556°\,\bar{j} \end{pmatrix}x\left(-10.93\,\alpha\,\bar{i}\right)$$

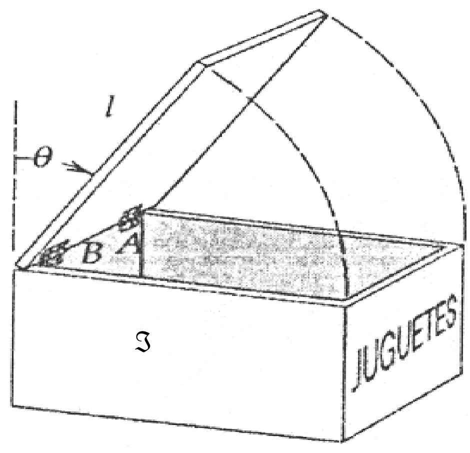
$$-26.625 = -71.673\,\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = 0.371\ \text{rad/seg}^2$$

En (3):

$$F = 7.63 * 0.371 * 120x10^3 = 339.69x10^3 \text{ Newton}$$

$$F \cong 340 \text{ KN}$$

4-49.- Cada una de las bisagras A y B, de la tapa uniforme de masa *m* de un cajón de juguetes contiene un resorte de torsión que ejerce un momento resistente M = Kθ sobre la tapa al cerrarse está. a) Especificar la rigidez torsional K de cada resorte, para que la velocidad angular de la tapa sea nula cuando la misma llegue a la posición horizontal de cierre (θ = π/2) al caer desde θ = 0° sin velocidad inicial, b) ¿Cuál sería su aceleración angular α en la posición cerrada si se soltara del reposo? ¿Serían esas bisagras una solución práctica?



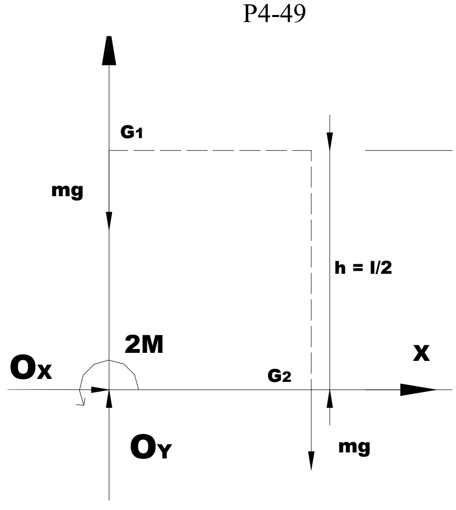
P4-49

Solución

Por el principio de trabajo y energía cinética:

1).- Cálculo de la rigidez torsional:

a).- Diagrama de la posición inicial y final de la tapa, representada en un plano (ver figura P4-49a):



P4-49a

b).- Por el principio de trabajo y energía cinética:

$$W_{1-2\,M} + W_{1-2\,g} = \overbrace{\Delta E_K}^{0}$$

$$W_{1-2\,M} = -2\int_0^{\pi/2} M\ d\theta = -2\ K \int_0^{\pi/2} \theta\ d\theta = -\ K\ \theta^2 \Big|_0^{\pi/2} = -K\,\frac{\pi^2}{4} \text{ (Unid. de trabajo)}$$

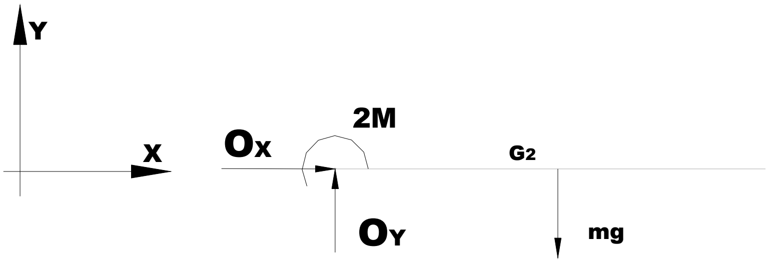
$$W_{1-2\,g} = mg\ h = mg\,\frac{\ell}{2}$$

Luego:

$$-K\frac{\pi^2}{4}+mg\frac{\ell}{2}=0 \quad \rightarrow \quad K=\frac{2mg\,\ell}{\pi^2}$$ (unid. de coeficiente de rigidez torsional)

2).- Cálculo de la aceleración angular:

a).- D.C.L., para la tapa en la posición horizontal (ver figura P4-49b):



P4-49b

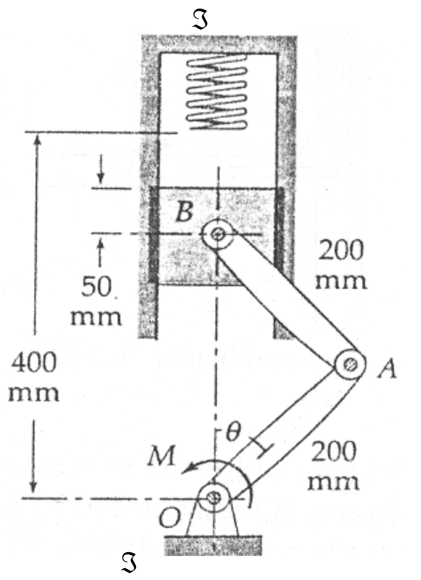
b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_O = I_O\alpha \quad \rightarrow \quad 2\,M - mg\frac{\ell}{2}=\frac{1}{3}m\,\ell^2\alpha$$

$$2*\frac{2mg\,\ell}{\pi^2}*\frac{\pi}{2}-mg\frac{\ell}{2}=\frac{1}{3}m\,\ell^2\alpha \quad \rightarrow \quad \frac{2\,g}{\pi}-\frac{g}{2}=\frac{\ell}{3}\alpha$$

$$\alpha=\frac{3\,g}{\ell}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)=0.41\frac{g}{\ell}$$ (Unid. de aceleración angular)

4-50.- La biela y la manivela tienen una masa de 2 kg y un radio de giro centroidal de 60 mm cada una. La corredera B tiene una masa de 3 kg y se mueve libremente por la guía vertical. El resorte tiene una constante de 6 KN/m. Si a la manivela OA se aplica un par de fuerzas constantes de momento M = 20 N-m a través de O, y a partir del reposo con θ = 45°, hallar la velocidad angular ω de OA, cuando θ =0°.

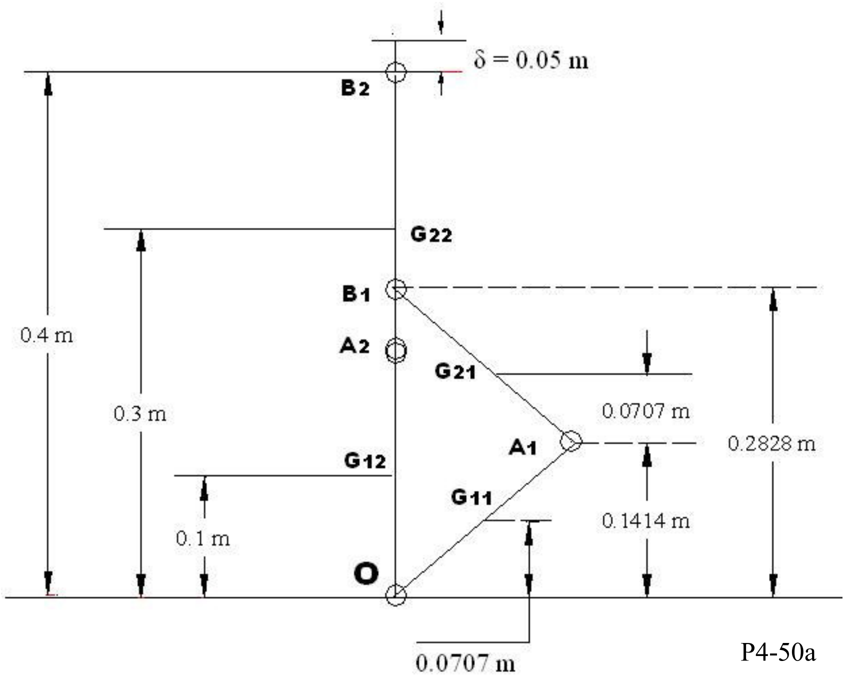


P4-50

Solución

Por el principio de trabajo y energía cinética:

1).- Grafico de la posición inicial y final (ver figura P4-50a):



P4-50a

2).- Relaciones cinemáticas, para la posición 2 (final):

a).- Para AB; B_2 es el centro instantáneo, por tener la velocidad cero en ese instante, luego la velocidad de A_2 es:

$$V_{A2} = \omega_2 \ell \qquad (1)$$

b).-La velocidad de A_2 tomando como punto de referencia O:

$$V_{A2} = \omega_1 \ell \qquad (2)$$

(1) = (2):

$$\omega_2 \ell = \omega_1 \ell \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \omega_1 = \omega$$ (Unid. de velocidad angular)

3).- Por el principio de trabajo y energía cinética:

$$W_{1-2} = E_{K2} - \overbrace{E_{K1}}^{0}$$

$$W_{1-2\,M} = -\int_{\pi/4}^{0} M\, d\theta = -20\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 15.71 \text{ N-m}$$

$$W_{1-2\,g} = -m_b g(0.1 - 0.0707) - m_b g(0.3 - 0.212) - mg(0.4 - 2 * 0.1414)$$

$$W_{1-2\,g} = -5.748 \text{ N-m}$$

$$W_{1-2\,K} = -\frac{1}{2} K\,\delta^2 = -\frac{1}{2} * 6000 * 0.05^2 = -7.5 \text{ N-m}$$

Luego:

$$W_{1-2} = 15.71 - 5.748 - 7.5 = 2.462 \text{ N-m} \qquad (3)$$

También:

$$E_{K\,2} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 + \frac{1}{2} I_B \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 * 2\, I_{C\,i} = \omega^2 \left[m\, k_G^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \right]$$

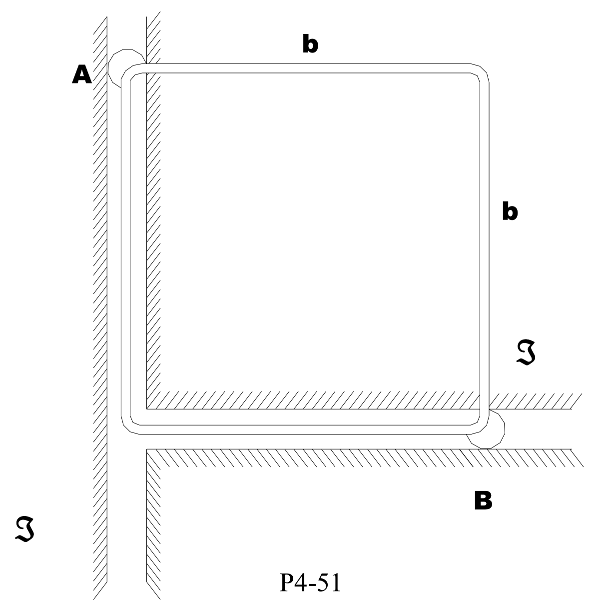
$$E_{K\,2} = 2\,\omega^2 \left(0.06^2 + 0.1^2\right) = 0.027\,\omega^2 \qquad (4)$$

(3) = (4):

$$0.272\,\omega^2 = 2.462 \quad \rightarrow \quad \omega^2 = 90.515$$

$$\omega = 9.514 \text{ rad/seg}$$

4-51.- El bastidor cuadrado está constituido por cuatro varillas delgadas iguales de longitud "b" cada una. Si el bastidor se suelta en reposo desde la posición representada, hallar la celeridad de la esquina A: a) Después de que A haya descendido una distancia "b" y b) Después de que A haya descendido una distancia "2b". Las pequeñas ruedas se deslizan sin frotamiento.

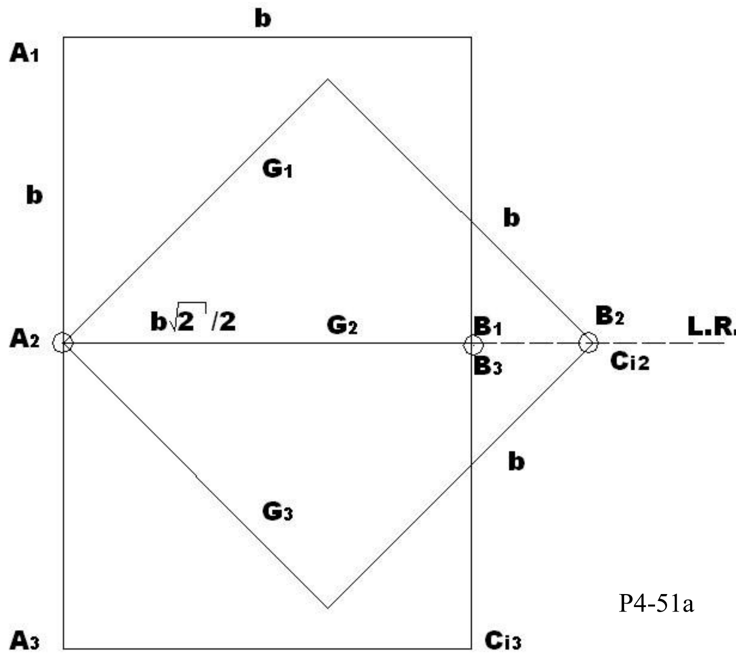


P4-51

Solución

Las únicas fuerzas que producen trabajo son los pesos de las barras, se conserva la energía mecánica y si tenemos como ρ a la densidad lineal de las barras.

1).- Diagrama de las posiciones en el sistema (ver figura P4-51a):



P4-51a

2).- Por conservación de la energía mecánica:

$$E_{M\,1} = E_{M\,2} = E_{M\,3}$$

$$E_{K\,1} = 0$$

$$U_1 = 4\rho\ g\ b\ \frac{b}{2} = 2\rho\ g\ b^2$$ (Unid. de energía)

$$E_{K\,2} = \frac{1}{2}\left[4 * \frac{1}{12} b\ \rho * b^2 + 4\ b\ \rho\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 4\ b\ \rho\left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]\omega_2^2$$

$$E_{K\,2} = \left(\frac{\rho\ b^3}{6} + \frac{\rho\ b^3}{2} + \rho\ b^3\right)\omega_2^2 = \frac{5}{3}\rho\ b^3\omega_2^2 = 1.667\rho\ b^3\omega_2^2$$ (Unid. de energía)

$$U_2 = 0$$

$$E_{K\,3} = \frac{5}{3}\rho\ b^3\omega_3^2 = 1.667\rho\ b^3\omega_3^2$$ (Unid. de energía)

$$U_3 = -2\rho\ g\ b^2$$ (Unid. de energía)

Luego:

a) $E_{M\,1} = E_{M\,2}$

$$2\rho\ g\ b^2 = \frac{5}{3}\rho\ b^3\omega_2^2 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{6\ g}{5\ b}}$$ (Unid. de velocidad angular)

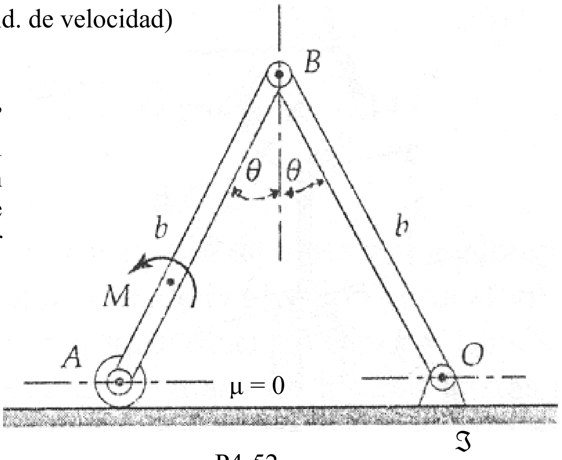
$$V_{A2} = \omega_2 * r_{C\,i2\,A\,2} = \sqrt{\frac{6\ g}{5\ b}} * b\sqrt{2} = \sqrt{\frac{12\ g\ b}{5}}$$ (Unid. de velocidad)

b).- $E_{M\,1} = E_{M\,3}$

$$2\rho\ g\ b^2 = \frac{5}{3}\rho\ b^3\omega_3^2 - 2\ b^2\rho\ g \quad \rightarrow \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{12\ g}{5\ b}}$$ (Unid. de velocidad angular)

$$V_{A\,3} = \omega_3 * r_{C\,i\,3\,A\,3} = \sqrt{\frac{12\ g}{5\ b}} * b = \sqrt{\frac{12\ g\ b}{5}}$$ (Unid. de velocidad)

4-52.- Las dos barras esbeltas de masa *m* y longitud "b" cada una están articuladas entre sí y se mueven en el plano vertical. Si se suelta en reposo desde la posición indicada y se mueven juntos bajo la acción de un par de momento de módulo constante M aplicado a AB, hallar la velocidad de A cuando choca con O.



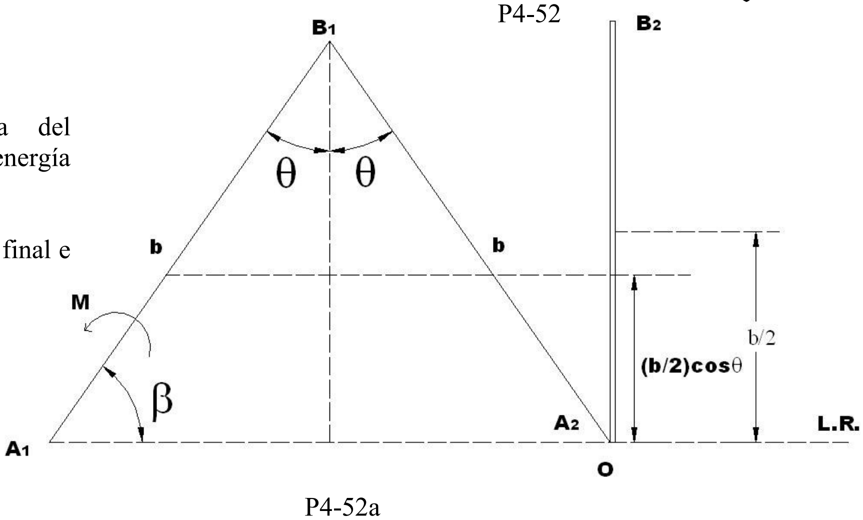
P4-52

Solución

Por la forma alternativa del principio de trabajo y energía cinética.

1).- Diagrama de la posición final e inicial (ver figura P4-52a):

A_2 centro instantáneo



P4-52a

2).- Por la forma alternativa de trabajo y energía cinética:

$$W_{1-2\,FNC} = E_{M\,2} - E_{M\,1} = \Delta E_K + \Delta U$$

$$W_{1-2\,FNC} = W_{1-2\,M} = \int_{\beta}^{\pi/2} M\ d\beta = M\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \theta\right) = M\ \theta \text{ (Unid. de energía)}$$

$$\Delta E_K = 2 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} m\, b^2 \omega^2 - 0 = \frac{1}{3} m\, b^2 \omega^2 \text{ (Unid. de energía)}$$

$$\Delta U = 2 * mg\frac{b}{2} - 2 * mg\frac{b}{2}\cos\theta = mg\ b\left(1 - \cos\theta\right) \text{ (Unid. de energía)}$$

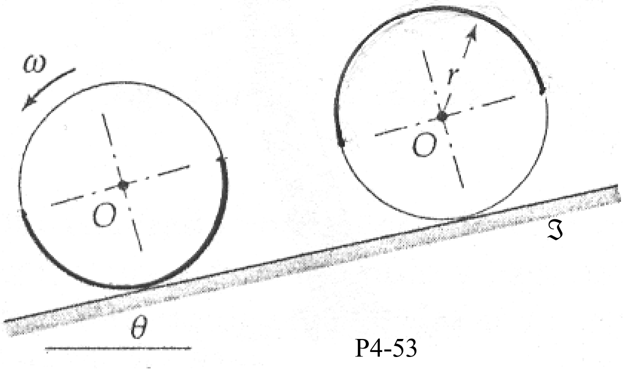
Luego:

$$M\ \theta = \frac{1}{3} m\, b^2 \omega^2 + mg\ b\left(1 - \cos\theta\right)$$

$$\omega = \sqrt{3\left[\frac{M\ \theta}{m\, b^2} - \frac{g}{b}\left(1 - \cos\theta\right)\right]} \text{ (Unid. de velocidad angular)}$$

$$V_A = \omega\, b = \sqrt{3\left[\frac{M\ \theta}{m} - g\ b\left(1 - \cos\theta\right)\right]} \text{ (Unidades de velocidad)}$$

4-53.- El aro circular liviano de radio r lleva una banda uniforme pesada de masa *m* a lo largo de su perímetro y se abandona en reposo desde la posición representada en la parte superior del plano inclinado. Después de que el aro haya rodado media vuelta. a) Hallar su velocidad angular ω y b) La fuerza normal bajo el mismo, si θ = 10°.

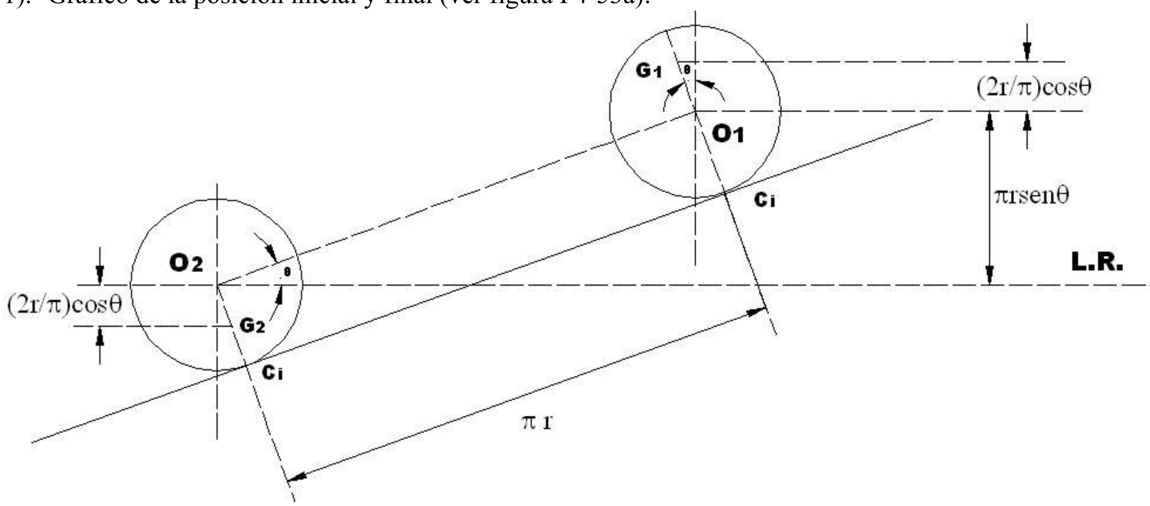


P4-53

Solución

Para la primera parte, la única fuerza que produce trabajo es el peso, por lo que se conserva la energía mecánica: para la segunda parte, aprovechamos la velocidad angular para resolver el problema, por sumatoria de fuerzas en la dirección de la normal.

1).- Grafico de la posición inicial y final (ver figura P4-53a):



P4-53a

2).- Por conservación de la energía mecánica:

$$E_{M\,1} = E_{M\,2}$$

$$E_{K\,1} = 0$$

$$U_1 = mg\left(\pi\ r\ sen\theta + \frac{2\ r}{\pi}\cos\theta\right) = mg\ r\left(\frac{\pi^2 sen\ \theta + 2\cos\theta}{\pi}\right) \text{ (Unid. de energía)}$$

$$E_{K\,2} = \frac{1}{2}m\,V_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 = \frac{1}{2}m\left[\omega\left(r - \frac{2\ r}{\pi}\right)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(m\ r^2 - m\frac{4\ r^2}{\pi^2}\right)\omega^2$$

$$E_{K\,2} = \frac{1}{2}m\ \omega^2\ r^2\ (\pi - 2)\left(\frac{2}{\pi}\right) \text{ (Unid. de energía)}$$

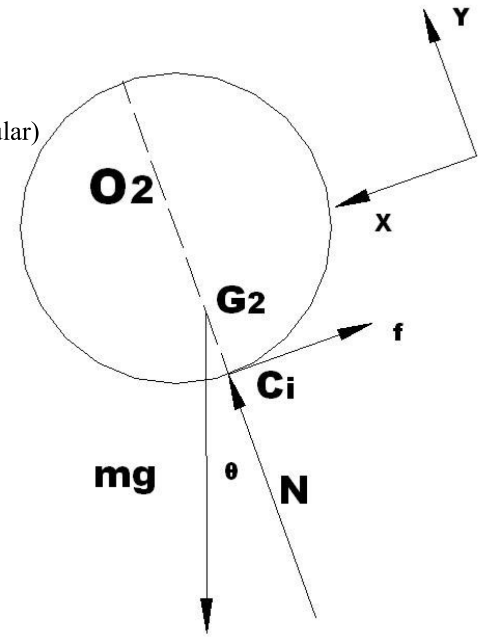
$$U_2 = -mg\frac{2\ r}{\pi}\cos\theta \quad \text{ (Unid. de energía)}$$

Luego:

$$mg\ r\left(\frac{\pi^2 sen\ \theta + 2\cos\theta}{\pi}\right) = \frac{1}{2}m\ \omega^2\ r^2\ (\pi - 2)\left(\frac{2}{\pi}\right) - mg\frac{2\ r}{\pi}\cos\theta$$

$$g\left(\pi^2 sen\,\theta + 4\cos\theta\right) = \omega^2 r\left(\pi - 2\right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}\left(\frac{\pi^2 sen\,\theta + 4\cos\theta}{\pi - 2}\right)}$$ (Unid. de velocidad angular)



P4-53b

3).- Para la parte segunda, en la posición "2":

a).- D.C.L. (ver figura P4-53b):

b).- Relaciones cinemáticas:

$$\bar{a}_{G2} = \omega^2\, r\,\bar{j} + \alpha\,\bar{k}\; x\; r\left(\frac{\pi-2}{\pi}\right)\bar{j} - \omega^2 r\left(\frac{\pi-2}{\pi}\right)\bar{j}$$

$$\bar{a}_{G2} = \alpha\, r\left(\frac{\pi-2}{\pi}\right)\bar{i} + \frac{2\,r}{\pi}\,\omega^2\,\bar{j}$$ (unid. de aceleración)

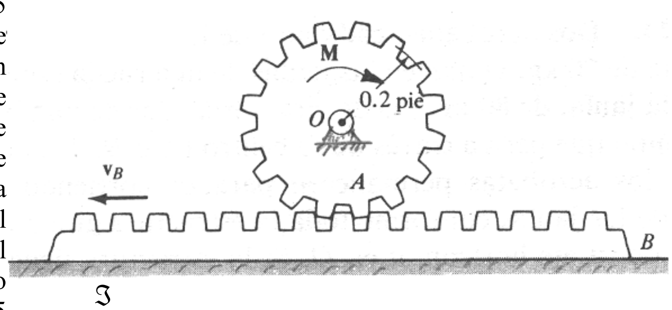
c).- Relaciones cinéticas, para θ = 10°:

$$\sum F_Y = m\,\ddot{Y}_G \quad \rightarrow \quad N - mg\cos\theta = m\frac{2\,r}{\pi} * \frac{g}{r}\left(\frac{4\cos\theta + \pi^2 sen\,\theta}{\pi - 2}\right)$$

$$N = mg\left[\cos 10° + \frac{2}{\pi}\left(\frac{4\cos 10° + \pi^2 sen\,10°}{\pi - 2}\right)\right]$$

$$N = 4.137\; mg \cong 4.14\; mg$$ (Unid. de fuerza)

4-54.- El engranaje A tiene un peso de 1.5 lb, un radio de 0.2 pie y un radio de giro de K_0 = 0.13 pies. El coeficiente de fricción entre la cremallera B y la superficie horizontal es μ = 0.3. Si la cremallera tiene un peso de 0.8 lb y está inicialmente deslizándose hacia a la izquierda con una velocidad de V_{B1} = 4 pie/seg, determine el momento constante M que debe aplicarse al engranaje para incrementar el movimiento de la cremallera de manera que en t = 2.5 seg adquiere una velocidad V_{B2} = 8 pie/seg hacia a la izquierda.



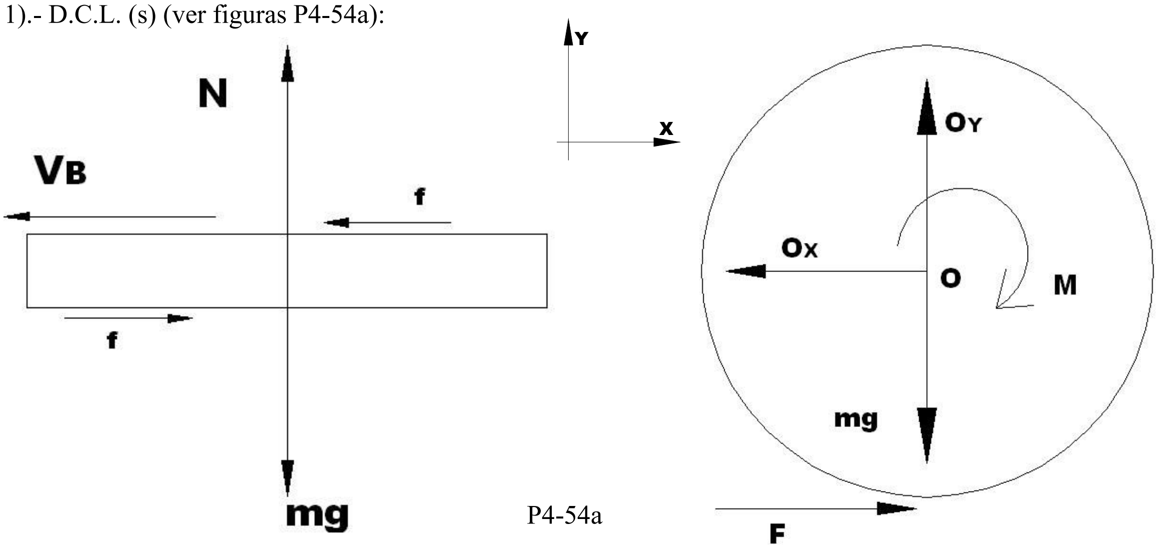
P4-54

Desprecie la fricción entre la cremallera y el engranaje; y suponga que el engranaje sólo ejerce una fuerza horizontal sobre la cremallera.

Solución

Como el movimiento se encuentra en función del tiempo, usaremos los principios de impulso y cantidad de movimiento.

1).- D.C.L. (s) (ver figuras P4-54a):



P4-54a

(a) (b)

2).- Relaciones cinéticas:

a).- Para (a), $f = \mu\ N = \mu\ w$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum F_X dt = \Delta\ L_X \quad \rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} (F - f)\, dt = m_B (V_{B2} - V_{B1})$$

$$F = 0.3 * 0.8 + \frac{0.8}{2.5 * 32.2} * (8 - 4) = 0.24 + 0.04 = 0.28 \text{ lb}$$

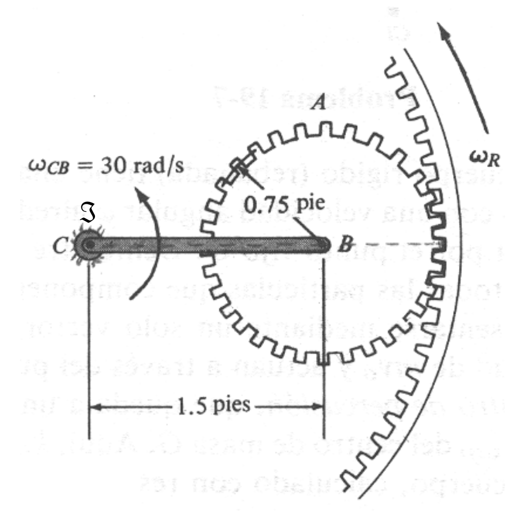
b).- Para (b):

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum M_0 dt = \Delta H_Z \quad \rightarrow \quad \int_0^{2.5} (M - F * 0.2)\, dt = I_0 (\omega_2 - \omega_1) = \frac{1.5}{32.2} * 0.13^2 \left(\frac{8-4}{0.2}\right)$$

$$2.5\ M - 2.5 * 0.28 * 0.2 = 0.01575$$

$$M = 0.0623 \text{ lb-pie}$$

4-55.- El engranaje A está articulado en B y gira a lo largo de la periferia de la cremallera R. Si A tiene un peso de 4 lb y un radio de giro de K_B = 0.5 pies, determine la cantidad de movimiento angular del engranaje A respecto al punto C, cuando ω_{CB} = 30 rad/seg y: a) ω_R = 0, b) ω_R =20 rad/seg.



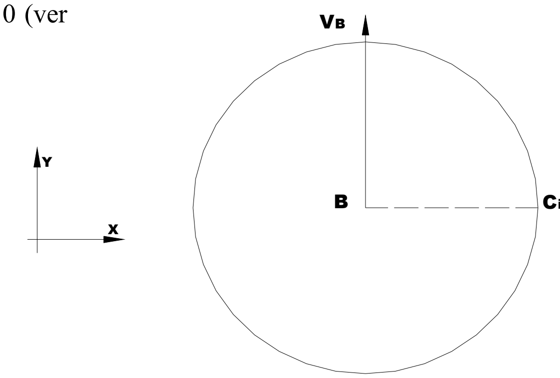
P4-55

Solución

1).- Relaciones cinemáticas.- Cálculo de la velocidad de B y la velocidad angular de A para ambos casos:

$$\bar{V}_B = \omega_{CB}\bar{k}\ x\ \bar{r}_{CB} = 30\ \bar{k}\ x\ 1.5\ \bar{i} = 45\ \bar{j}\ \text{(pie/seg)}$$

a).- Cálculo de la velocidad angular de A, para ω_R = 0 (ver figura P4-55a):



$$\omega_A = \frac{V_B}{r_{C\,i\,B}} = \frac{45}{0.75} = 60\ \text{rad/seg}$$

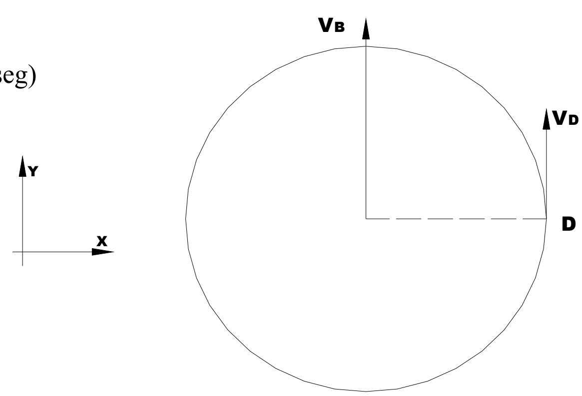
$$\bar{\omega}_A = -60\ \bar{k}\ \text{(rad/seg)}$$

P4-55a

b).- Cálculo de la velocidad angular de A, para ω_R = 20 rad/seg (ver figura P4-55b):

$$\bar{V}_D = \omega_R\bar{k}\ x\ \bar{r}_{CD} = 20\ \bar{k}\ x\ 2.25\ \bar{i} = 45\ \bar{j}\ \text{(pie/seg)}$$

Si:



$$\bar{V}_B = \bar{V}_D + \bar{\omega}_A x\ \bar{r}_{AB}$$

$$45\ \bar{j} = 45\ \bar{j} + \omega_A\bar{k}\ x\ (-0.75\ \bar{i})$$

$$-0.75\ \omega_A = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_A = 0$$

P4-55b

2).- Cálculo de la cantidad de movimiento angular de A, respecto a C:

Si:

$$\overline{H}_C = \overline{H}_B + \overline{r}_{CB} x\, m_A\, \overline{V}_B$$

a).- Para $\overline{\omega}_A = -60\,\overline{k}$ rad/seg:

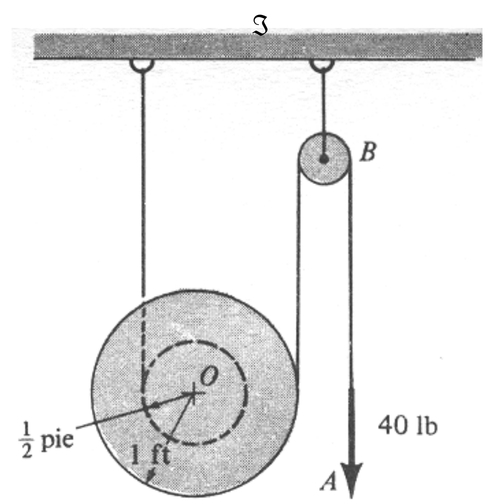
$$\overline{H}_C = -I_B \omega_A \overline{k} + r_{CB}\overline{i}\ x\ m_A V_B \overline{j} = -\frac{4}{32.2} * 0.5^2 * 60\,\overline{k} + 1.5\,\overline{i}\ x \frac{4}{32.2} * 45\,\overline{j}$$

$$\overline{H}_C = -1.863\,\overline{k} + 8.385\,\overline{k} = 6.522\,\overline{k}$$ slug-pie^2/seg

b).- Para $\overline{\omega}_A = \overline{0}$:

$$\overline{H}_C = r_{CB}\overline{i}\ x\ m_A V_B \overline{j} = 1.5\,\overline{i}\ x\ \frac{4}{32.2} * 45\,\overline{j} = 8.385\,\overline{k}$$ slug-pie^2/seg

4-56.- Cierto carrete tiene un peso de 30 lb y un radio de giro K_O = 1.4 pies. Si se aplica una fuerza de 40 lb a la cuerda de soporte en A, como se indica, determine la velocidad angular del carrete a los 3 seg después de partir del reposo.

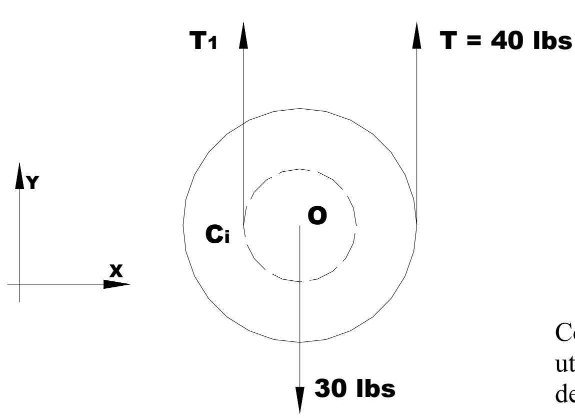


P4-556

Solución

Como el movimiento esta en función del tiempo, utilizaremos el principio de impulso angular y cantidad de movimiento angular.

1).- D.C.L. (ver figura P4-56a):



P4-56a

2).- Relaciones cinéticas, para un tiempo cualquiera, tomando momentos con respecto al centro instantáneo C_i:

$$\sum \overline{M}_{C\,i} = \dot{\overline{H}}_{C\,i} + \overline{\rho}_{C\,i\,O} x\ m\ \overline{a}_{C\,i} = \dot{\overline{H}}_{C\,i} + \overbrace{r\ \overline{i}\ x\ m\ \omega^2 r\ \overline{i}}^{0} = \frac{d\overline{H}_{C\,i}}{dt}$$

Separando variables e integrando, para un cuerpo simétrico en movimiento plano:

$$\int_0^3 \sum M_{C\,i} dt = H_{Z\,C\,i\,3} - \overbrace{H_{Z\,C\,i\,0}}^{0}$$

$$\int_0^3 (1.5\,T - 30 * 0.5)\,dt = \frac{30}{32.2}\left(K_O^2 + 0.5^2\right)\omega_3 = \frac{30}{32.2}\left(1.4^2 + 0.5^2\right)\omega_3 = 2.06\ \omega_3$$

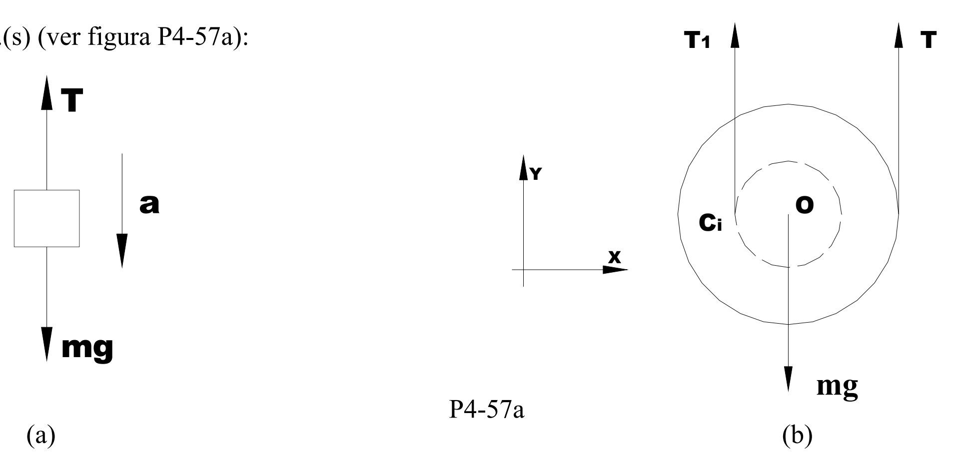
$$4.5 * 40 - 45 = 2.06\ \omega_3 \quad \rightarrow \quad \omega_3 = 65.534 \ \text{ rad/seg}$$

4-57.- Resuelva el problema **4-56**, si de la cuerda en A se cuelga un bloque de 40 lb en vez de aplicar la fuerza de 40 lb.

Solución

Como el movimiento esta en función del tiempo, utilizaremos el principio de impulso angular y cantidad de movimiento angular.

1).- D.C.L.(s) (ver figura P4-57a):



P4-57a

2).- Relaciones cinemáticas:

a).- Para (a):

$$V_{P\,3} = \overbrace{V_{P\,0}}^{0} + a\,t \quad \rightarrow \quad a = \frac{V_{P\,3}}{t} = \frac{V_{P\,3}}{3} \qquad (1)$$

b).- Para (b), por rodamiento:

$$V_{P\,3} = 1.5\,\omega_3$$

En (1):

$$a = \frac{1.5\,\omega_3}{3} = 0.5\,\omega_3 \qquad (2)$$

3).- Relaciones cinéticas:

a).- Cálculo del momento con respecto a Ci, para un tiempo cualquiera en el carrete:

$$\sum \overline{M}_{C\,i} = \dot{\overline{H}}_{C\,i} + \overline{\rho}_{C\,i\,O} x\; m\; \overline{a}_{C\,i} = \dot{\overline{H}}_{C\,i} + \overbrace{r\;\overline{i}\;\;x\;m\;r\;\omega^2\overline{i}}^{0} = \dot{\overline{H}}_{C\,i} = \frac{d\;\overline{H}_{C\,i}}{dt}$$

Separando variables e integrando, para el cuerpo simétrico:

$$\int_0^3 \sum M_{C\,i}\;dt = H_{C\,i\,3} - \overbrace{H_{C\,i\,0}}^{0} \quad \rightarrow \quad \int_0^3 \left(1.5\,T - 30 * 0.5\right) dt = \frac{30}{32.2}\left(K_O^2 + 0.5^2\right)\omega_3$$

$$4.5\,T - 45 = 2.06\,\omega_3 \qquad (3)$$

b).- Cálculo de T en (a):

$$mg - T = ma \quad \rightarrow \quad T = m\left(g - a\right)$$

De (2):

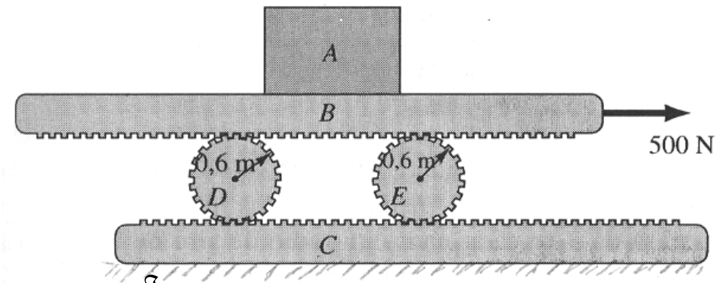
$$T = 40 - \frac{40}{32.2} * 0.5\,\omega_3 = 40 - 0.6\,\omega_3 \qquad (4)$$

(4) en (3):

$$180 - 2.79\,\omega_3 - 45 = 2.06\,\omega_3 \quad \rightarrow \quad 4.85\,\omega_3 = 135$$

$$\omega_3 = 27.835 \;\; \text{rad/seg}$$

4-58.- Una plataforma B de 115 kg de masa, se mueve sobre las ruedas dentadas D y E tal como se muestra. Si cada rueda tiene una masa de 15 kg. ¿Qué distancia recorrerá la plataforma B en 0.1 seg después de la aplicación de la fuerza de 500 N como se muestra?



P4-58

Solución

En el sistema la única fuerza que produce trabajo es la de 500 N (no conservativa), Utilizamos la forma alternativa del principio de trabajo y energía para desplazamientos infinitesimales reales; de esta manera se obtiene la aceleración constante (las fuerzas que actúan en el sistema son constantes) de B, al encontrarse este en movimiento de traslación rectilínea, obtenemos la distancia recorrida a partir del reposo de B.

1).- Cálculo de la aceleración de B, por la forma alternativa del principio de trabajo y energía para desplazamientos infinitesimales reales en el sistema.

a).- Determinación de los desplazamientos infinitesimales, para uno de los engranajes (ver figura P4.58a):

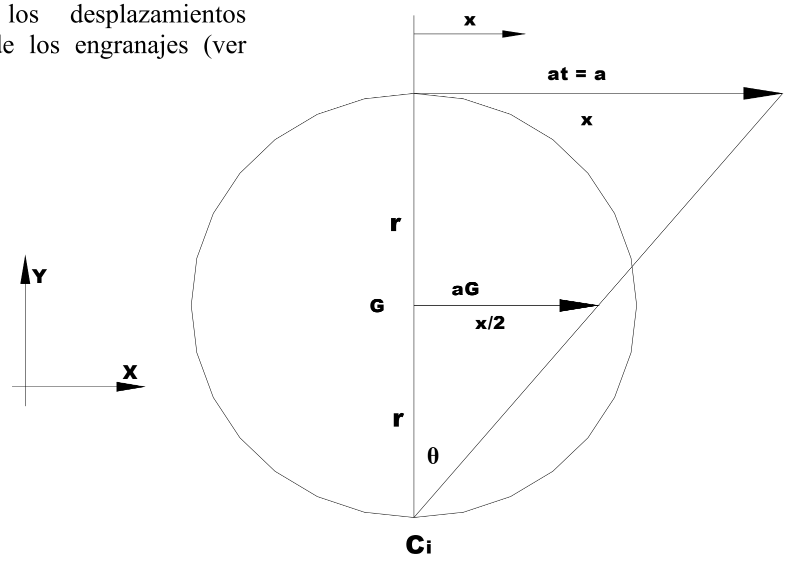
Si:

$$a_G = \frac{a}{2}$$

$$X_G = \frac{X}{2} = r\theta$$

$$dX_G = \frac{dX}{2} = r\, d\theta$$

$$d\theta = \frac{dX}{2\,r}$$



P4-58a

b).- Por la forma alternativa del principio de trabajo y energía:

$$dW_{FNC} = dE_K + dU$$

$$dW_{FNC} = 500\ dX$$

$$dE_K = \sum m_i \bar{a}_{G\,i} \cdot d\bar{r}_{G\,i} + \sum I_{G\,i} \alpha_i d\theta_i$$

$$dE_K = 65\ a\ dX + 2*15*\frac{a}{2}*\frac{dX}{2} + 2*\frac{1}{2}*15*0.6^2*\frac{a/2}{0.6}*\frac{dX}{2*0.6}$$

$$dE_K = 76.25\ a\ dX$$

$$dU = \sum m_i g\ dh_i + \sum K_j X_j dX_j$$

$$dU = 0$$

Luego:

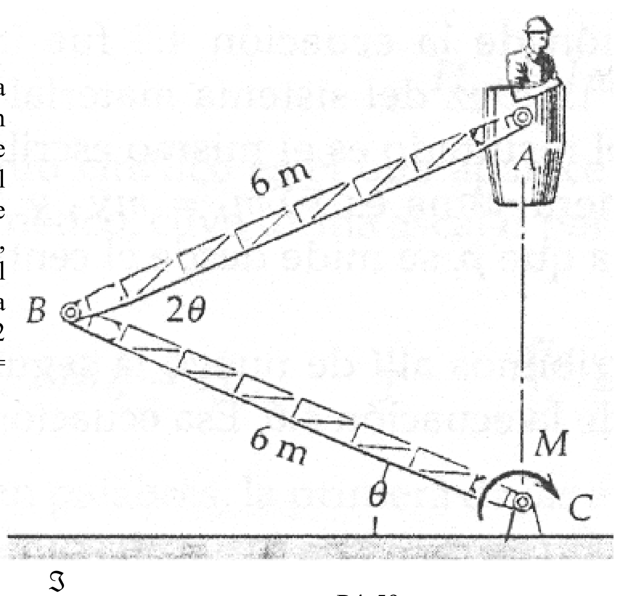
$$500\ dX = 76.25\ a\ dX \quad \rightarrow \quad a = 6.5574 \text{ m/seg}^2$$

2).- Relaciones cinemáticas:

$$X = \overbrace{X_0}^{0} + \overbrace{\dot{X}_0}^{0} t + \frac{1}{2} a\ t^2 = \frac{1}{2}*6.5574*0.1^2 = 0.032785 \text{ m}$$

$$X = 32.785 \text{ mm}$$

4-59.- El elevador de la figura está diseñado para elevar un hombre en dirección vertical. Un "mecanismo interno" en B hace que el ángulo entre AB y BC sea el doble que el ángulo θ entre BC y el suelo. Si la masa total del operario y la cabina es de 200 kg y todas las otras masas se desprecian, determinar el momento M aplicado a BC en C y el momento M_B en la unión B, requerido para dar a la cabina una aceleración vertical ascendente de 1.2 m/seg^2 cuando parte del reposo en la posición θ = 30°.



P4-59

Solución

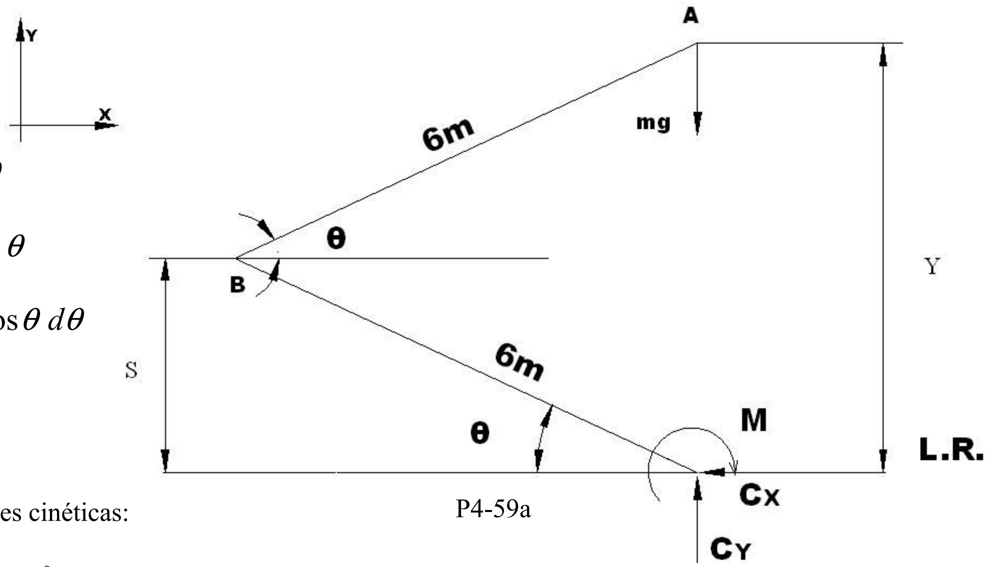
1).- D.S.F. (ver figura P4-59a):

$$sen\ \theta = \frac{s}{6}$$

$$s = 6\ sen\ \theta$$

$$Y = 12\ sen\ \theta$$

$$d\ Y = 12\cos\theta\ d\theta$$



P4-59a

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_C = \sum \overbrace{I_{G\,i}}^{0}\ddot{\theta} + \sum m_i a_{G\,i} d_i = m * 1.2\ \bar{j} * 0 = 0$$

Luego:

$$\sum M_C = M = 0$$

3).- Por la forma alternativa del principio de trabajo y energía, para desplazamientos infinitesimales reales (las fuerzas y momentos internos producen trabajo):

$$dW_{FNC} = dE_K + dU$$

$$dW_{FNC} = M_B(2\ d\theta) = 2\ M_B d\theta \quad \text{(Unid. de energía)}$$

$$dE_K = \sum m_i \bar{a}_{G\,i} \cdot d\bar{r}_{G\,i} + \sum I_{G\,i}\alpha_i d\theta_i$$

$$dE_K = m\ a\ (12\cos\theta\ d\theta) = 12\ a\ m\cos\theta\ d\theta \quad \text{(Unid. de energía)}$$

$$dU = \sum m_i g\ dh_i + \sum K_j X_j dX_j$$

$$d\ U = mg\ (12\cos\theta\ d\theta) = 12mg\cos\theta\ d\theta \quad \text{(Unid. de energía)}$$

Luego:

$$2\ M_B d\theta = 12\ a\ m\cos\theta\ d\theta + 12\ mg\cos\theta\ d\theta$$

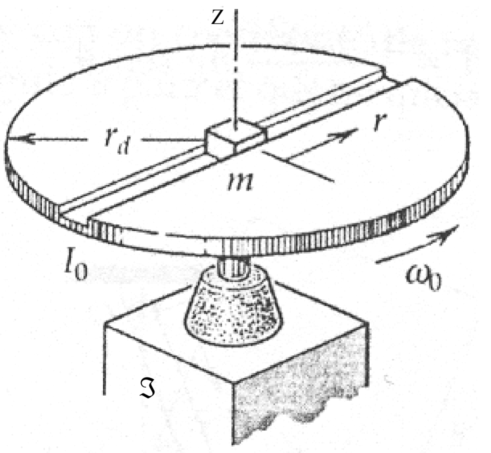
$$M_B = 6\ m\cos\theta\left(a+g\right)$$ (unid. de momento) (1)

En (1), para $a = 1.2$ m/seg^2 y $\theta = 30°$:

$$M_B = 6*200*\cos 30°(1.2+9{,}81) = 11\,441.93$$ N-m

$$M_B = 11.44$$ KN-m

4-60.- El bloquecito de masa *m* se desliza por la ranura diametral lisa del disco, el cual gira libremente en su cojinete. Si el bloquecito se desplaza un poco desde la posición central cuando la velocidad del disco es ω_0, hallar su velocidad radial Vρ en función de la distancia radial r. El momento de inercia del disco respecto a su eje de rotación es I_0.



P4-60

Solución

Como no hay fuerzas que producen trabajo, la energía cinética se conserva; además el momento con respecto al eje vertical es nulo, por lo que se conserva la cantidad de movimiento angular.

1).- Por conservación de la cantidad de movimiento angular:

$$\left(\sum H_{OZ}\right)_i = \left(\sum H_{OZ}\right)_f$$

$$I_O\omega_O = I_O\omega + m\ r\ V_\theta = I_O\omega + m\ r^2\omega$$

$$\omega = \frac{I_O}{I_O + m\ r^2}\ \omega_O$$ (unid. de velocidad angular)

2).- Por conservación de la energía cinética:

$$E_{K1} = E_{K2}$$

$$E_{K1} = \frac{1}{2} I_O\omega_O^2$$ (Unid. de energía)

$$E_{K\,2} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 + \frac{1}{2} m \left[V_\rho^2 + (r\,\omega)^2 \right] = \frac{1}{2} \omega^2 \left(I_O + m\,r^2 \right) + \frac{1}{2} m\,V_\rho^2 \text{ (Unid. de energía)}$$

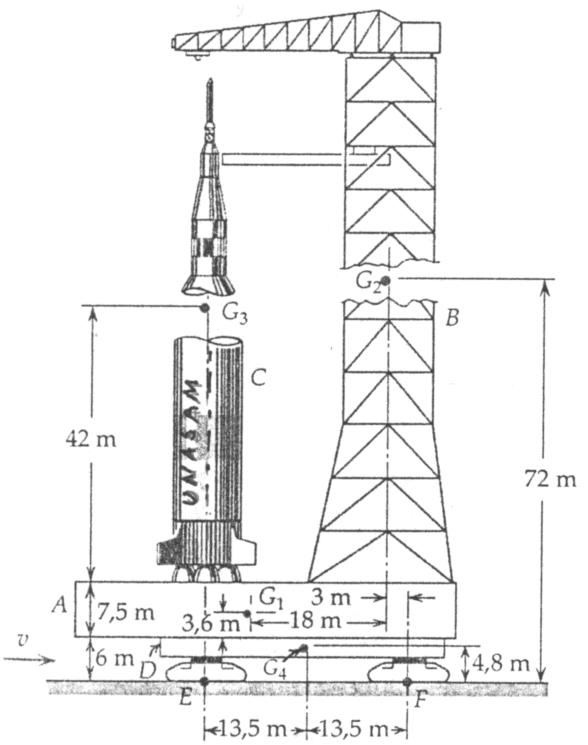
Luego:

$$\frac{1}{2} I_O \omega_O^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \left(I_O + m\,r^2 \right) + \frac{1}{2} m\,V_\rho^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{I_O}{I_O + m\,r^2} \omega_O \right)^2 * \left(I_O + m\,r^2 \right) + \frac{1}{2} m\,V_\rho^2$$

$$V_\rho = \omega_O \left[\frac{I_O}{m} - \frac{I_O^2}{m\left(I_O + m\,r^2 \right)} \right]^{1/2} = \omega_O \left[\frac{I_O^2 + I_O m\,r^2 - I_O^2}{m\left(I_O + m\,r^2 \right)} \right]^{1/2}$$

$$V_\rho = \omega_O r \sqrt{\frac{I_O}{I_O + m\,r^2}} \text{ (Unid. de velocidad)}$$

4-61.- La figura muestra la plataforma móvil A de lanzamiento del Saturno V junto a la torre umbilical B, el cohete sin combustible C y el transportador de oruga D que lleva al sistema al lugar de lanzamiento. Se dan las dimensiones aproximadas de las estructuras y las posiciones de los centros de masas G_i. Las masas aproximadas son: m_A = 3 Gg, m_B = 3.3 Gg, m_C = 0.23 Gg y m_D = 3 Gg. La distancia mínima necesaria para pararse desde la celeridad máxima de 1.5 km/hr es 0.1 m. Calcular la componente vertical de la reacción bajo el tren oruga delantero F durante el período de desaceleración máxima.

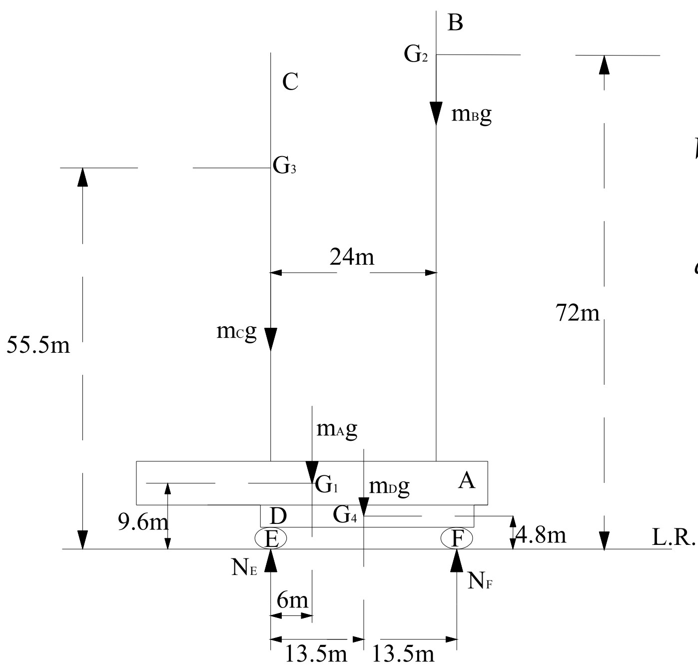


P4-61

Solución

Todo el sistema tiene movimiento de traslación.

1).- D.S.F. (ver figura P4-61a)



P4-61a

2).- Relaciones cinemáticas:

$$V_f^2 = V_0^2 - 2\,a\,e \quad \rightarrow \quad a = \frac{V_0^2}{2\,e}$$

$$a = \frac{\left(1500/3600\right)^2}{2*0.1} = 0.868\ m/seg^2$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_E = \sum m_i a_{G\,i} d_1$$

a).- Cálculo del momento respecto a E:

a).- Cálculo del momento respecto a E:

$$\sum M_E = g*10^6\ \left(6*3+24*3.3+13.4*3\right)-27\ N_F$$

$$\sum M_E = 1350.834x10^6 - 27\ N_F \qquad (1)$$

b).- Cálculo del momento inercial respecto a E:

$$\sum m_i a_{G\,i} d_i = -a\ \left(3*9.6+3.3*7.2+0.23*55.5+3*4.8\right)x10^6$$

$$\sum m_i a_{G\,i} d_i = -254.814x10^6\,a \qquad (2)$$

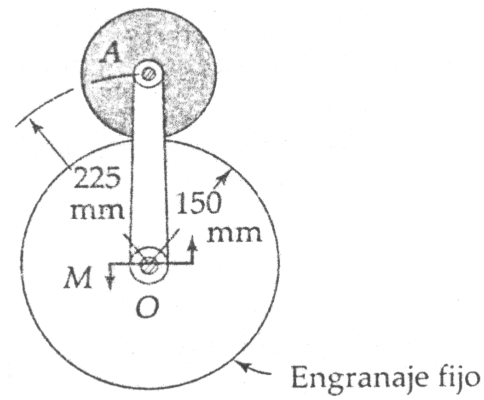
(1) = (2):

$$1350.834x10^6 - 27\ N_F = -254.814x10^6$$

$$N_F = 59.469x10^6 \ \text{ N}$$

$$N_F \cong 59.5 \ \text{ MN}$$

4-62.- El pequeño engranaje se hace rotar en un plano horizontal alrededor del engranaje grande mediante el par de momento M aplicado al brazo OA. El engranaje pequeño tiene una masa de 3 kg y puede tratarse como si fuera un disco. El brazo OA de 2 kg tiene un radio de giro de 150 mm respecto al cojinete fijo en O. Hallar el momento M del par constante necesario para dotar al brazo OA de una velocidad angular de 20 rad/seg en 3 seg a partir del reposo. Se desprecia el rozamiento.



P4-62

Solución

Por el principio de impulso angular y momentum angular, respecto al eje perpendicular al plano y que pase por O.

$$\int_0^3 M_0 dt = \left(\sum H_0\right)_f - \left(\sum H_0\right)_i \qquad (1)$$

1).- Relaciones cinemáticas:

Si:

$$\left.\begin{aligned} \overline{V}_A &= \omega_D r = 0.075\ \omega_D \\ \overline{V}_A &= \omega_{OA} r = 0.225\ \omega_{OA} \end{aligned}\right\} \omega_D = \frac{0.225}{0.075}\ \omega_{OA} \quad \rightarrow \quad \omega_D = 3\ \omega_{OA}$$

2).- En (1):

Si: $\overline{H}_O^D = \overline{H}_G + \bar{r}_G x\ m\ \overline{V}_G$

En (1):

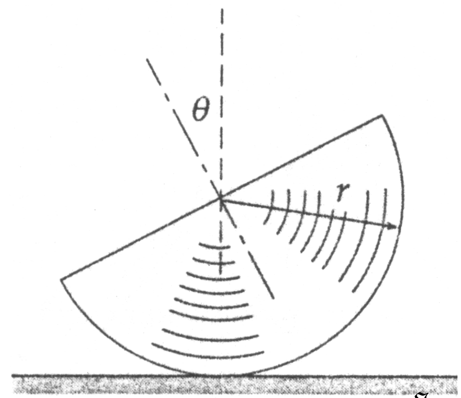
$$\int_0^3 M\ dt = \left(H_O^D + H_O^{OA}\right)_f = \left(\frac{1}{2} m_D r^2 * 3\ \omega_{OA} + 0.225 * m_D * 0.225\ \omega_{OA}\right) + m_B K_O^2\ \omega_{OA}$$

$$3\ M = \left(\frac{3}{2} * 0.075^2 + 0.225^2\right) * 3 * 20 + 2 * 0.15^2 * 20$$

$$3\ M = 3.544 + 0.9$$

$M = 1.481$ N-m

4-63.- El semicilindro macizo homogéneo se suelta en reposo desde la posición representada. Si el rozamiento basta para que no haya deslizamiento, hallar la velocidad angular máxima ω que alcanza el sólido por la superficie horizontal.

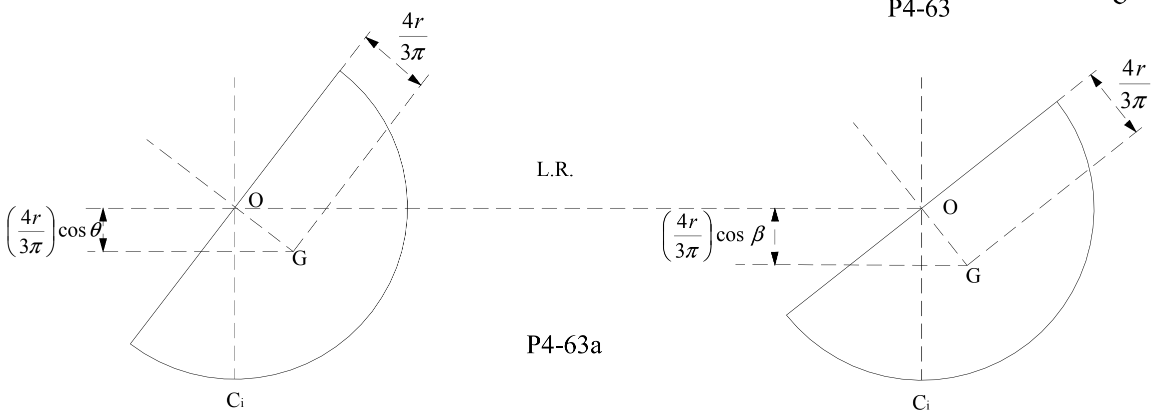


P4-63

Solución

Como la única fuerza que produce trabajo es el peso, la energía mecánica se conserva.

1).- Diagrama del estado inicial y otro estado cualquiera:

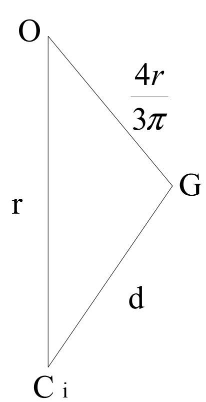


P4-63a

2).- Por conservación de la energía mecánica:

$$U_1 = -m\,g\,\frac{4\,r}{3\,\pi}\cos\theta \quad \text{y} \quad Ek_1 = 0$$

$$U_\beta = -m\,g\,\frac{4\,r}{3\,\pi}\cos\beta \quad \text{y} \quad Ek_\beta = \frac{1}{2}\,I_{C\,i}\,\omega^2$$



P4-63b

a).- Cálculo del $I_{C\,i}$ (ver figura p3-63b):

$$I_{C\,i} = I_0 - m\left(\frac{4\,r}{3\,\pi}\right)^2 = m\left[\frac{1}{2}r^2 - \left(\frac{4\,r}{3\,\pi}\right)^2\right]$$

Si: $d^2 = r^2 + \left(\frac{4\,r}{3\,\pi}\right)^2 - 2\,r\left(\frac{4\,r}{3\,\pi}\right)^2\cos\beta$ y

$$I_{C\,i} = I_G + m\,d^2$$

$$I_{C\,i} = \left[\frac{1}{2}\,m\,r^2 - m\left(\frac{4\,r}{3\,\pi}\right)^2\right] + m\left[r^2 + \left(\frac{4\,r}{3\,\pi}\right)^2 - 2\,r\left(\frac{4\,r}{3\,\pi}\right)\cos\beta\right]$$

$$I_{C\,i} = m\left(\frac{2}{3}\,r^2 - \frac{8\,r^2}{3\,\pi}\right)\cos\beta$$

b).- Por conservación de la energía mecánica:

$$U_1 = U_\beta + Ek_\beta$$

$$-m\,g\,\frac{4\,r}{3\,\pi}\cos\theta = -m\,g\,\frac{4\,r}{3\,\pi}\cos\beta + \frac{1}{2}\,I_{C\,i}\,\omega^2$$

$$m\,g\,\frac{4\,r}{3\,\pi}\left(\cos\beta - \cos\theta\right) = \frac{1}{2}\,I_{C\,i}\,\omega^2 \qquad (1)$$

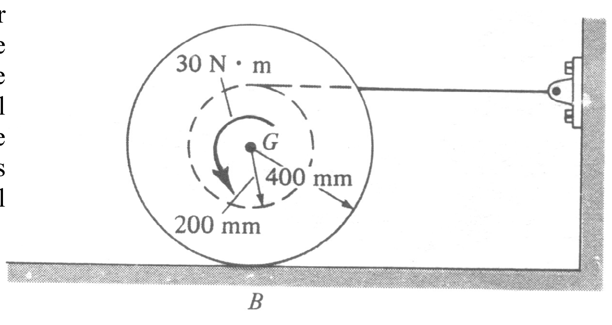
Si ω es máximo cuando cos β = 1, en (1) se tiene:

$$m\,g\,\frac{4\,r}{3\,\pi}\left(1 - \cos\theta\right) = \frac{1}{2}\,m\left[\frac{3}{2}\,r^2 - \frac{8\,r^2}{3\,\pi}\right]\omega_{\max}^2$$

$$16\,g\,\left(1 - \cos\theta\right) = r\,\left(9\,\pi - 16\right)\,\omega_{\max}^2$$

$$\omega_{\max} = 4\,\sqrt{\frac{g\,\left(1 - \cos\theta\right)}{\left(9\,\pi - 16\right)r}} = 1.142\,\sqrt{\frac{g\,\left(1 - \cos\theta\right)}{r}}$$ (Unidades de velocidad angular)

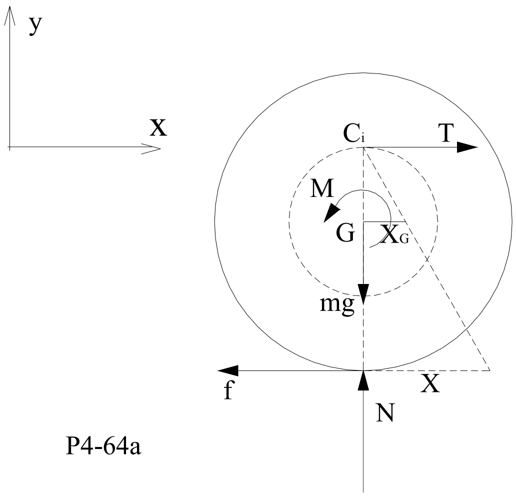
4-64.- El carrete y el alambre enredado alrededor de su eje tienen una masa de 20 kg y un radio de giro centroidal de K_G = 250 mm. Si el coeficiente de fricción en el suelo es μ_B = 0.1. Usando el método de la forma alternativa del principio de trabajo y energía cinética, para desplazamientos infinitesimales reales, determiné la aceleración del carrete cuando se aplica un par de 300 N-m.



P4-64

Solución

Los únicos que producen trabajo son: el momento y la fuerza de fricción en B que son no conservativos.



P4-64a

1).- D.C.L. y relación de los desplazamientos infinitesimales reales (ver figura P4-64a):

$$X_G = r\,\theta \quad \rightarrow \quad dX_G = r\,d\theta$$

$$\frac{X}{X_G} = \frac{0.6}{0.2} \quad \rightarrow \quad X = 3\,X_G$$

$$dX = 3\,dX_G = 3\,r\,d\theta$$

$$\bar{a}_G = 0.2\,\alpha\,\bar{i}$$

2).- Relaciones cinéticas.- Para calcular la fuerza de fricción en B (hay deslizamiento):

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad N = mg = 20\,g \quad \rightarrow \quad f = \mu_B N = 0.1 * 0.2\,g = 2\,g$$

3).- Por la forma alternativa del principio de trabajo y energía cinética, para desplazamientos infinitesimales reales:

$$dW_{NC} = dEk + dU$$

Donde:

$$dW_{NC} = 30\,d\theta - 2\,g * 3 * 0.2\,d\theta = 18.228\,d\theta$$

$$dEk = \sum m_i \bar{a}_{G\,i} \cdot d\,\bar{r}_{G\,i} + \sum I_{G\,i}\alpha\,d\theta = m\,\alpha\,r^2 d\theta + m\,K_G^2 \alpha\,d\theta$$

$$dEk = 20\,\alpha\left(0.2^2 + 0.25^2\right) d\theta = 2.05\,\alpha\,d\theta$$

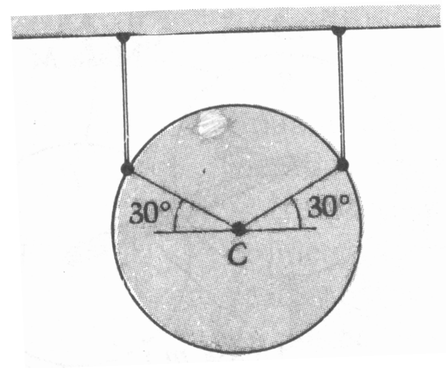
$$dU = 0$$

Luego:

$$18.228\,d\theta = 2.05\,\alpha\,d\theta$$

$$\alpha = 8.892 \quad \text{rad/seg}^2$$

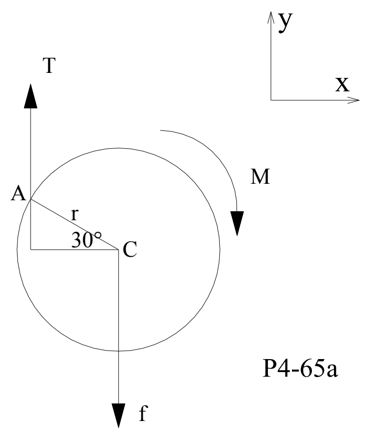
4-65.- El disco mostrado en la figura tiene una masa *m* y un radio *r*. Demuestre que en el instante en que se corta la cuerda de la derecha la tensión en la otra cuerda cambia a (2/5)mg, la aceleración del centro de masa es entonces de (3/5)g y de A es $\frac{\sqrt{3}}{5}g$.



P4-65

Solución

1).- D.C.L. (en el instante del corte), ver figura P3-65a:



P4-65a

2).- Relaciones cinemáticas, en el instante del corte, donde ω =0:

$$\bar{a}_A == a_A\ \bar{i}$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A - \alpha\ \bar{k}\ x\ \bar{r}_{AC} = -a_A \bar{i} - \alpha\ \bar{k}\ x\ r\ \left(\cos 30^o\ \bar{i} - sen 30^o\ \bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_C = -\left(a_A + \alpha\ r\ sen 30^o\right)\bar{i} - \alpha\ r\ \cos 30^o\ \bar{j}$$

3).- relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m\ a_{C\,X} \quad \rightarrow \quad 0 = -m\left(a_A + \alpha\ r\ sen 30^o\right) \quad \rightarrow \quad a_A = -\frac{\alpha\ r}{2} \qquad (1)$$

$$\sum F_Y = m\ a_{C\,Y} \quad \rightarrow \quad T - mg = -m\ \alpha\ r\ \cos 30^o \qquad (2)$$

$$\sum M_C = I_C \alpha \quad \rightarrow \quad -T\ r \cos 30^o = \frac{1}{2} m\ r^2 \alpha \quad \rightarrow \quad T = \frac{m\ r}{\sqrt{3}} \alpha \qquad (3)$$

(3) en (2):

$$\frac{m\ r}{\sqrt{3}} \alpha - mg = -m\ \alpha\ r\ \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{g}{r}\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right) \qquad (4)$$

Luego:

$$\bar{a}_C = -\frac{g}{r}\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right) r \frac{\sqrt{3}}{2}\,\bar{j} = -\frac{3}{5}\,g\,\bar{j} \quad \text{(Unidades de aceleración)}$$

$$a_C = \frac{3}{5}\,g \quad \downarrow \quad \text{(Unidades de aceleración) lqqd}$$

En (3):

$$T = \frac{m\,r}{\sqrt{3}} * \frac{g}{r}\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right) = \frac{2}{5}\,mg \quad \text{(Unidades de fuerza) lqqd}$$

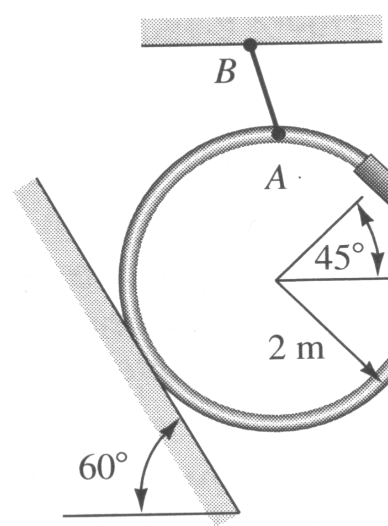
En (1):

$$a_A = -\frac{g}{r}\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)\frac{r}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{5}\,g$$

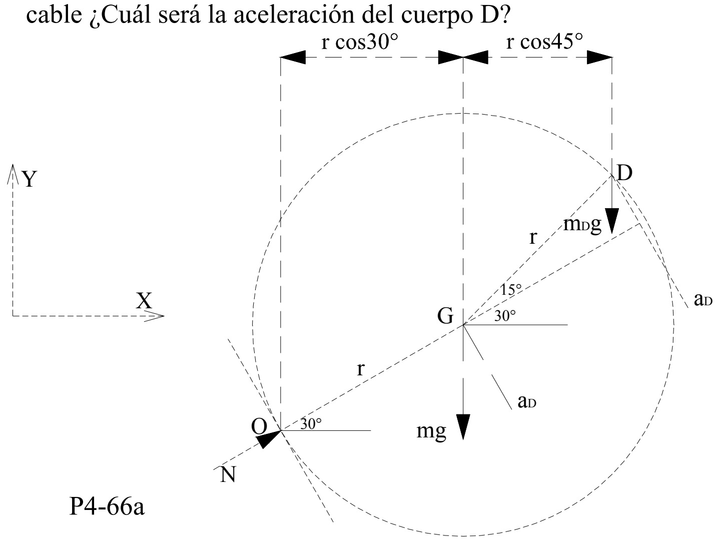
$$a_A = \frac{\sqrt{3}}{5}\,g \;\rightarrow\; \text{(Unidades de aceleración) lqqd}$$

.

4-66.- Se muestra un anillo soportado por un cable AB y una superficie suave (lisa). El anillo tiene una masa de 10 kg y un radio medio de 2 m. Un cuerpo D que tiene una masa de 3 kg está fijo al anillo tal como se muestra. Si se corta el cable ¿Cuál será la aceleración del cuerpo D?



P4-66



P4-66a

Solución

El sistema se moverá en traslación

1).- D.S.F. (ver figura P4-66a):

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_O = \sum \overbrace{I_0 \alpha}^{o} + \sum m_i a_i d_i$$

$$mg\ r\ \cos 30^o + mg\ r\ (\cos 30^o + \cos 45^o) = m\ a_D r + m_D a_D r\ (1 + \cos 15^o)$$

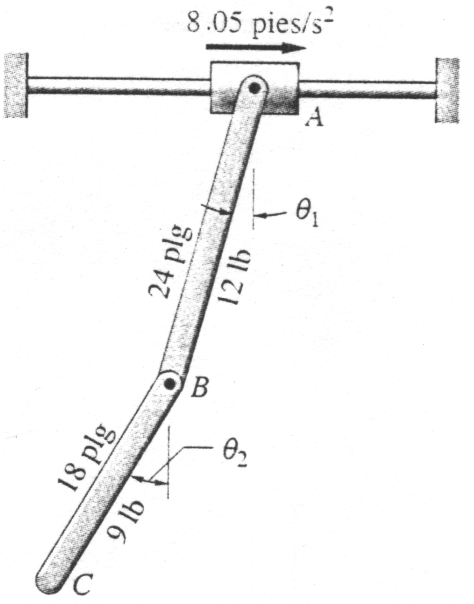
$$10 * 9.81 \cos 30^o + 3 * 9.81 * 1.573 = a_D (10 + 3 * 1.966)$$

$$a_D = 8.256 \ \text{ m/seg}^2 \ (\ 60^o \ )$$

$$\bar{a}_D = 8.256 \left(\cos 60^o\ \bar{i} - sen 60^o\ \bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_D = 4.128\ \bar{i} - 7.15\ \bar{j} \ \ (\text{m/seg}^2)$$

4-67.- Dos barras homogéneas están conectadas por un perno en B. La barra superior está unida mediante un perno al collarín deslizante en A. El collarín tiene una aceleración constante de 8.05 pie/seg^2 a la derecha. Determine los ángulos θ_1 y θ_2, suponiendo que no haya oscilación (es decir los ángulos son constantes).

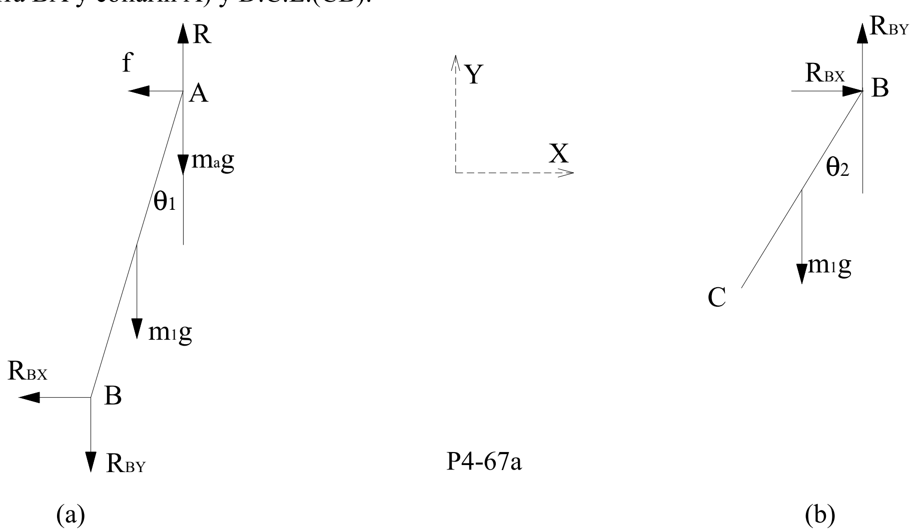


P4-67

Solución

Todo los cuerpos están en movimiento de traslación.

1).- D.S.F.(barra BA y collarín A) y D.C.L.(CB):



P4-67a

2).- Relaciones cinéticas:

En (b):

$$\sum F_X = m_2\ a \quad \rightarrow \quad R_{B\,X} = m_2 a = \frac{9}{32.2} * 8.05 = 2.25 \ \text{ lb}$$

$$\sum F_Y = = 0 \quad \rightarrow \quad R_{B\,Y} = m_2 g = 9 \ \text{ lb}$$

$$\sum M_B = m_2 a\ d_2 \ \rightarrow \ m_2 g * \frac{9}{12}\ sen\theta_2 = m_2 a * \frac{9}{12} \cos\theta_2$$

$$tg\theta_2 = \frac{a}{g} = \frac{8.05}{32.2} = 0.25 \quad \rightarrow \quad \theta_2 = 14.036º$$

En (a):

$$\sum M_A = m_1 a_{G\,1} d_1$$

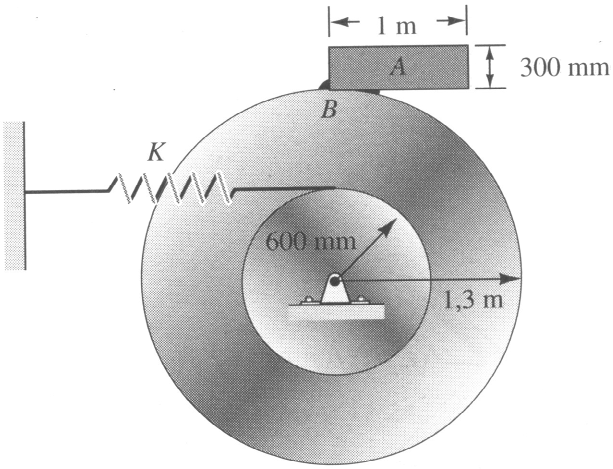
$$m_1 g * \frac{12}{12} sen\theta_1 + R_{B\,Y} * \frac{24}{12} sen\theta_2 - R_{B\,X} * \frac{24}{12} \cos\theta_2 = m_1 a * \frac{12}{12} \cos\theta_1$$

$$12 * sen\theta_1 + 9 * 2\ sen\theta_2 - 2.25 * 2 \cos\theta_2 = \frac{12}{32.2} * 8.05 * \cos\theta_1$$

$$30\ sen\theta_1 = 7.5 \cos\theta_1$$

$$tg\theta_1 = 0.25 \quad \rightarrow \quad \theta_1 = 14.036º$$

4-68.- Un cilindro escalonado tiene unos radios de 600 mm el pequeño y 1.3 m el grande. Un bloque rectangular A que pesa 225 N está soldado al cilindro en el punto B. La constante del muelle K es de 0.18 N/mm. Si el sistemas se suelta a partir de una configuración en reposo. ¿Cuál será la velocidad angular del cilindro después de haber girado 90º? El radio de giro del cilindro escalonado es de 1 m y su masa es de 36 kg. En la posición que se muestra el muelle no está deformado.

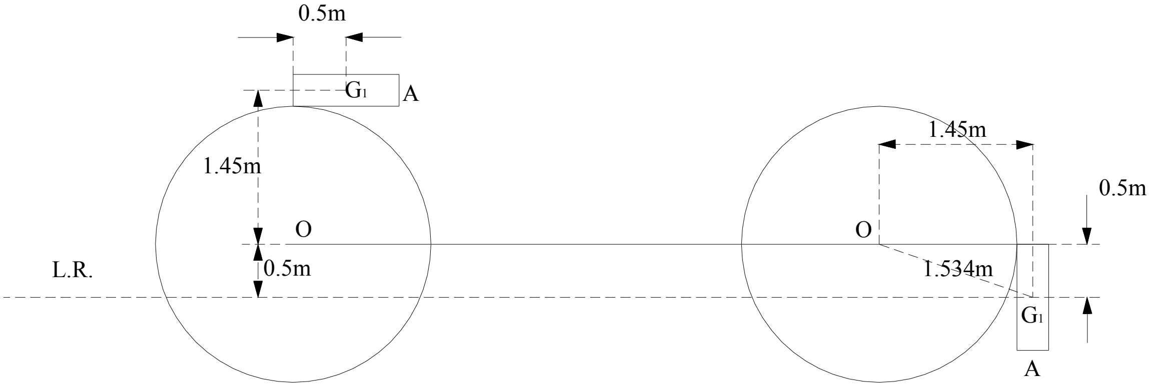


P4-68

Solución

Las únicas fuerzas que producen trabajo son conservativas, por lo que la energía mecánica se conserva.

1).- Grafico de la posición inicial y final:



P4-68a

Para el resorte:

$$\delta_{S1} = 0$$

$$\delta_{S2} = \frac{\pi}{2} r \quad \text{(hay enrollamiento)}$$

2).- Por conservación de la energía mecánica:

$$Ek_1 = 0$$

$$U_{g1} = m_A g\, h_A = 225 * 1.95 = 438.75 \quad \text{J}$$

$$U_{e1} = 0$$

$$Ek_2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} m_A V_{G2}^2 + \frac{1}{2} I_{GA} \omega^2$$

$$Ek_2 = \frac{1}{2} * 36 * 1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} * \frac{225}{9.81} * (1.534\ \omega)^2 + \frac{1}{2} * \frac{1}{12} * \frac{225}{9.81} \left(0.3^2 + 1^2\right) \omega^2 = 46.027\ \omega^2 \quad \text{J}$$

$$U_{g2} = 0$$

$$U_{e2} = \frac{1}{2} * 180 * \left(\frac{\pi}{2} * 0.6\right)^2 = 79.94\ j$$

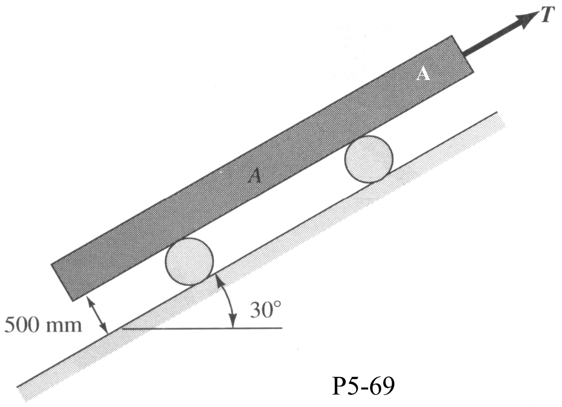
Luego:

$$EM_1 = EM_2$$

$$438.75 = 46.027\ \omega^2 + 79.94$$

$$\omega = 2.792 \text{ rad/seg}$$

4-69.- Una placa A que pesa 2KN se mueve sobre dos rodillos de 50 kg de masa cada uno y que tienen un radio de giro de 200 mm. Si el sistema parte del reposo ¿Qué fuerza constante mínima T se necesita para evitar que la placa supere la velocidad de 3 m/seg, 4 seg después de comenzar a bajar? No hay deslizamiento.

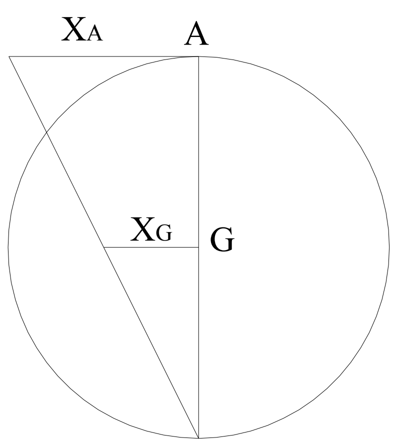


P5-69

Solución

Como toda las fuerzas que actúan en el sistema son constantes, la aceleración que actúa en los centros de masa serán constantes, luego utilizando el método alternativo de trabajo y energía cinética para desplazamientos infinitesimales reales.

1).- Relación de los desplazamientos infinitesimales (en uno de los rodillos) y relaciones cinemáticas:



P4-69a

$$\frac{X_A}{X_G} = \frac{2\,r}{r} \rightarrow X_G = \frac{X_A}{2} \rightarrow dX_G = \frac{dX_A}{2}$$

$$X_G = r\,\theta \rightarrow d\theta = \frac{dX_G}{r} = \frac{dX_A}{2\,r}$$

$$a_G = \frac{a_A}{2} = \alpha\,r \rightarrow \alpha = \frac{a_A}{2\,r}$$

$$V_A = a_A t = 4\,a_A \leq 3 \text{ m/seg}$$

$$a_A = 0.75 \text{ m/seg}^2 \text{ (Tomando la velocidad limite)}$$

2).- Por el método alternativo, para desplazamientos infinitesimales reales en el sistema:

$$dW_{NC} = \sum m_i \bar{a}_{G\,i} \cdot d\bar{r}_{G\,i} + \sum I_{G\,i}\ \alpha_i\ d\theta_i + \sum m_i g\ h_i$$

Donde:

$$dW_{NC} = -T\ dX_A$$

$$\sum m_i \bar{a}_{G\,i} \cdot d\bar{r}_{G\,i} = m_A a_A dX_A + 2\ m_D * \frac{a_A}{2} * \frac{dX_A}{2} = \frac{2000}{9.81} * 0.75\ dX_A + 50 * 0.75\ \frac{dX_A}{2}$$

$$\sum m_i \bar{a}_{G\,i} \cdot d\bar{r}_{G\,i} = 171.66\ dX_A$$

$$\sum I_{G\,i}\ \alpha_i\ d\theta_i = 2 * 50 * 0.2^2 * \frac{a_A}{2\,r} * \frac{dX_A}{2\,r} = 12\ dX_A$$

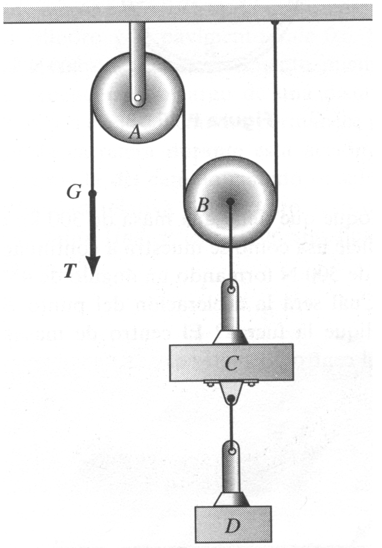
$$\sum m_i g\ dh_i = -2000 * dX_A sen30º - 2 * 50 * 9.81 * \frac{dX_A}{2} sen30º = -1245.25\ dX_A$$

Luego:

$$-T\ dX_A = 171.66\ dX_A + 12\ dX_A - 1245.25\ dX_A$$

$$T = 1061.59\ \ \text{N}$$

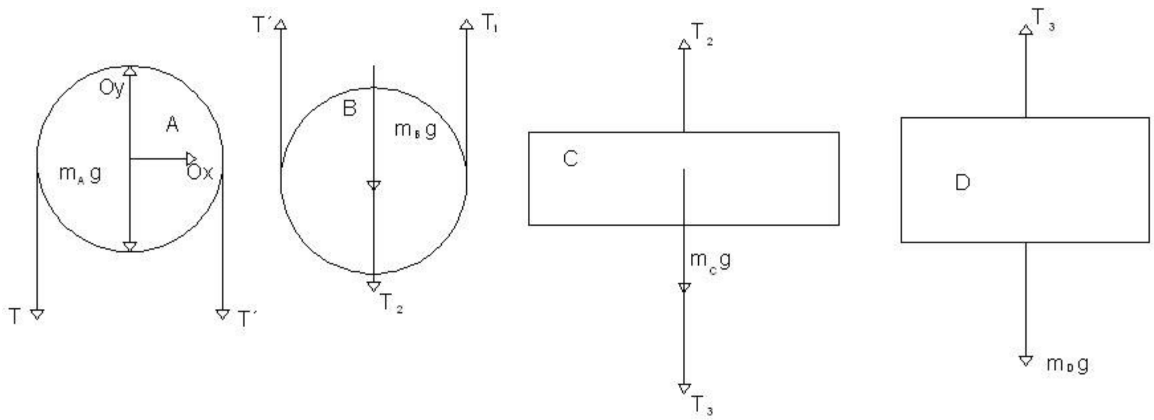
4-70.- Un cable pasa alrededor de dos poleas. Se aplica una fuerza T en el extremo G del cable. Cada polea tiene una masa de 2.5 kg y un radio de giro de 100 mm. El diámetro de las poleas es de 300 mm. Un cuerpo C de 50 Kg de masa está soportado mediante la polea B. Suspendido de C hay otro cuerpo D de 12.5 kg de masa. El cuerpo D se deja bajar desde el cuerpo C con una aceleración de 1.5 m/seg^2 respecto a C ¿Qué fuerza T se necesitará aplicar entonces para tirar del cable hacia abajo en el punto G con una aceleración de 1.5 m/seg^2?



P4-70

Solución

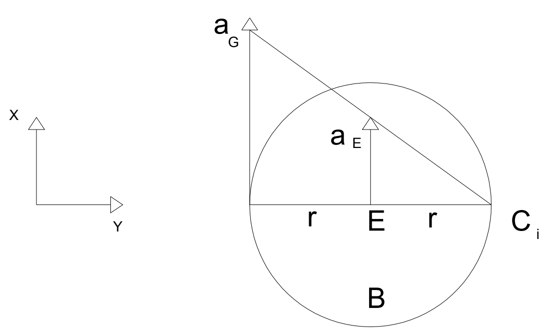
1).- D.C.L. (s), ver figuras P5-7a:



(a) (b) (c) (d)

2).- Relaciones cinemáticas:

a).- Para el cuerpo B:



P4-70a

$$\frac{a_G}{a_E} = \frac{2\,r}{r} \;\rightarrow\; a_G = 2\,a_E = 2\,r\,\alpha$$

$$a_G = 1.5 \;\; \text{m/seg}^2$$

$$a_E = \frac{1.5}{2} = 0.75 \;\text{m/seg}^2$$

$$\alpha = \frac{1.5}{0.3} = 5 \;\; \text{rad/seg}^2$$

b).- Para la configuración:

$$a_E = a_C = 0.75 \;\; \text{m/seg}^2$$

c).- Para el cuerpo D:

$$\bar{a}_D = \bar{a}_C + \bar{a}_{C/D} = 0.75\;\bar{j} - 1.5\;\bar{j} = -0.75\;\bar{j} \;\; (\text{m/seg}^2)$$

3).- Relaciones cinéticas:

a).-Para (d):

$$-m_D g + T_3 = -m_D a_D \quad \rightarrow \quad T_3 = 12.5\left(9.81 - 0.75\right) = 113.25 \;\; \text{N}$$

b).- Para (c):

$$T_2 - m_C g - T_3 = m_C a_C \quad \rightarrow \; T_2 = 50\left(9.81 + 0.75\right) + 113.25 = 641.25 \text{ N}$$

c).- Para (b), tomando momentos en C_i:

$$\sum M_{Ci} = \sum m_i a_{Gi} d_i + \sum I_{Gi}\ \alpha_i$$

$$T'(2\,r) - \left(m_B g + T_2\right) r = m_B a_E r + I_E \alpha$$

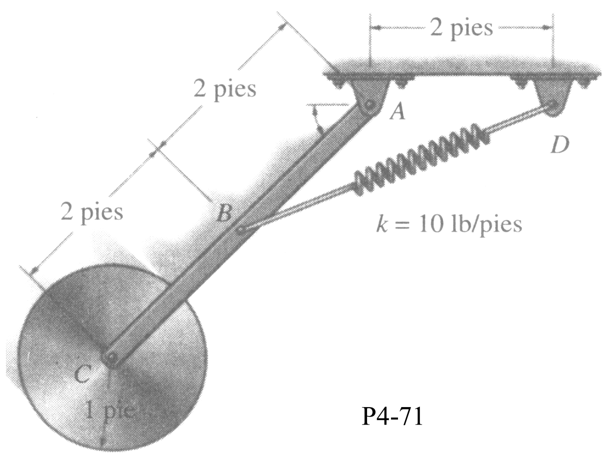
$$2T' = 2.5*9.81 + 641.25 + 2.5*0.75 + \frac{2 - 5*0.1^2}{0.15}*5 \;\rightarrow\; T' = 334.242 \text{ N}$$

$$\sum M_0 = I_0 \alpha_A \quad \rightarrow \quad \left(T' - T\right) r = -m_A K_0^2\, \frac{a_G}{r} = -m_A K_0^2\, \frac{2\,r\,\alpha}{r}$$

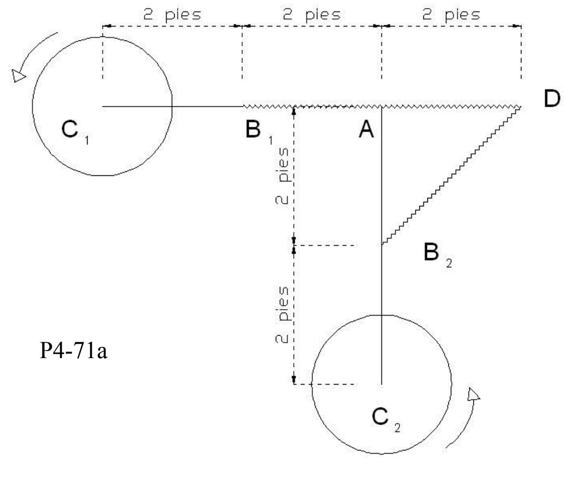
$$T = 334.242 + 2.5*\frac{0.1^2*2}{0.15}*5$$

$$T = 335.91 \text{ N}$$

4-71.- El ensamblaje consta de una barra delgada AC de 5 lb unida por el perno a un disco de 12 lb y un resorte BD: Si la varilla es llevada a la posición horizontal θ= 0º y el disco es hecho a girar en sentido contrario al de las manecillas del reloj a 3 rad/seg (constante) cuando la barra es soltada del reposo, determine la velocidad angular de la barra en el instante θ = 90º. El resorte tiene una longitud no estirada de 1 pie.



P4-71



P4-71a

Solución

Como en el sistema las únicas fuerzas que producen trabajo son conservativas, la energía cinética se conserva.

1).- Grafico del sistema en su posición inicial y final (ver figura P4-71a):

$\delta_1 = 3$ pies (deformación del resorte)

$\delta_2 = \left(2\sqrt{2} - 1\right) = 1.828$ pies

2).- Por conservación de la energía mecánica:

$$EM_1 = EM_2$$

$$Ek_1 = Ek_{1\Re} + \overbrace{Ek_{1\,AC}}^{0} = \frac{1}{2} I_C \omega_{\Re}^2 = \overbrace{\frac{1}{2} * \frac{12}{32.2} * \frac{1}{2} * 1^2}^{0.0932} * 3^2 = 0.839 \quad \text{lb-pie}$$

Donde:

$$U_{g\,1} = 0$$

$$U_{e\,1} = \frac{1}{2} K\ \delta^2 = \frac{10}{2} * 3^2 = 45 \quad \text{lb-pie}$$

$$Ek_2 = Ek_{2\,\Re} + Ek_{2\,AC} = \left(\frac{1}{2} m_{\Re} V_{C\,2}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_{\Re\,2}^2\right) + \left(\frac{1}{2} m_{AC} V_B^2 + \frac{1}{2} I_B \omega_{AC}^2\right)$$

$$Ek_2 = \left[\frac{1}{2} m_{\Re} (4\ \omega_{AC})^2 + 0.0932\ (3 + \omega_{AC})^2\right] + \frac{1}{2} I_{C\,i\,AC} \omega_{AC}^2$$

$$Ek_2 = \frac{1}{2} * \frac{12}{32.2} * 16\ \omega_{AC}^2 + 0.0932\ \left(9 + \omega_{AC}^2 + 6\ \omega_{AC}\right) + \frac{1}{2} * \frac{5}{32.2} * \frac{4^2}{3}\ \omega_{AC}^2$$

$$Ek_2 = 3.488\ \omega_{AC}^2 + 0.559\ \omega_{AC} + 0.839$$

$$U_{g\,2} = -m_{\Re} g\ h_C - m_{AC} g\ h_B = -(12 * 4 + 5 + 2) = -58 \quad \text{lb-pie}$$

$$U_{e\,2} = \frac{1}{2} K\ \delta^2 = \frac{10}{2} * 1.828^2 = 16.71 \quad \text{lb-pie}$$

Luego:

$$0.839 + 45 = 3.488\ \omega_{AC}^2 + 0.559\ \omega_{AC} + 0.839 - 58 + 16.71$$

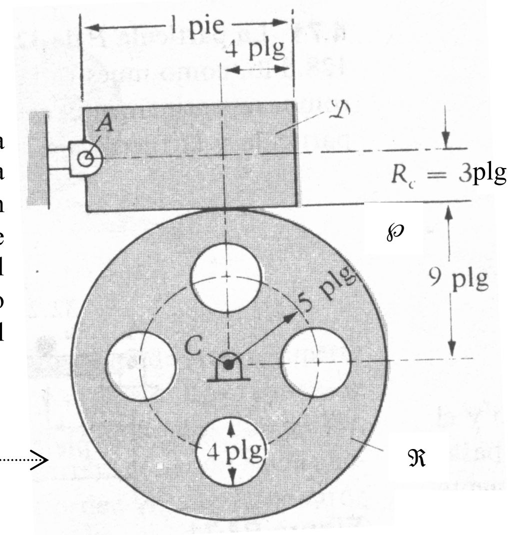
$$3.488\ \omega_{AC}^2 + 0.559\ \omega_{AC} - 86.29 = 0$$

$$\omega_{AC} = \frac{-0.559 \pm \sqrt{0.559^2 + 4 * 86.29 * 3.488}}{2 * 3.488} = -0.08 \pm 4.974$$

$\omega_{AC1} = 4.894$ rad/seg (bueno) y $\omega_{AC2} = -5.055$ rad/seg (malo, por que el ángulo aumenta)

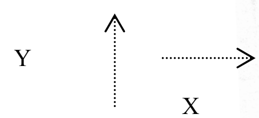
$\omega_{AC} = 4.894$ rad/seg

4-72.- El cilindro $\Re$ en la figura con cuatro agujeros gira a 200 rpm inicialmente. Se coloca en la posición mostrada un cilindro $\wp$ uniforme de 100 lb y la fricción produce un momento de frenado que detendrá a $\Re$. El coeficiente de fricción μ es 1/3 y antes de que se hicieran los agujeros, el cuerpo uniforme $\Re$ pesaba 200 lb. Para cualquier sentido de rotación de $\Re$ resulta un frenaje rápido; calcule el tiempo de frenado.

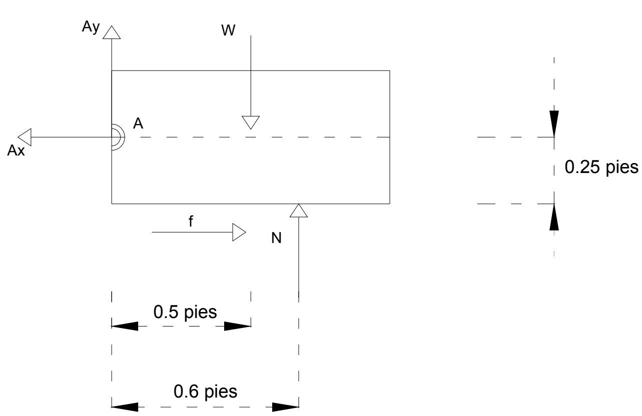


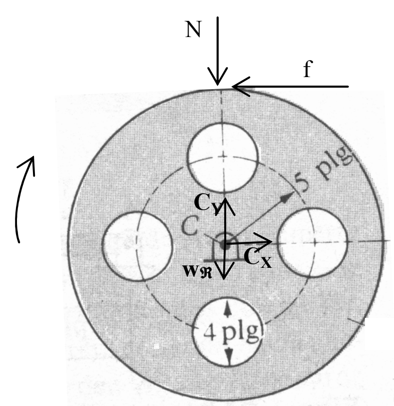
P4-72a

Solución



1).- D.C.L. (ver figura P4-72a)





(a) P4-72a (b)

2).- Relaciones cinéticas:

Si: $f = \mu\, N = \dfrac{1}{3} N$

a).- Para (a):

$$\sum M_A = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3} * N - w * \frac{1}{2} + \frac{1}{4} * f = 0 \quad \rightarrow \quad N = \frac{4}{5} * 50 = 66.67 \ \text{ lb}$$

Luego: $f = 22.22$ lb

b).- Para (b):

$$\sum M_C = I_C \ddot{\theta} \qquad (1)$$

i).- cálculo del I_C del cilindro $\Re$:

$$I_C = \frac{m_w R^2}{2} - 4\left(\frac{m_h r^2}{2} + m_h d^2\right)$$

Donde:

$$m_w = \frac{\overbrace{200}^{6.21}}{32.2} = \rho\, \pi\, R^2 \quad \rightarrow \quad \rho = 3.51 \ \text{ slug/pie}^2$$

$$m_h = \rho\, \pi\, r^2 = 3.51 * \pi * \left(\frac{2}{12}\right)^2 = 0.306 \ \text{ slug/pie}^2$$

Luego:

$$I_C = \frac{6.21 * \left(9/12\right)^2}{2} - 4\left[\frac{0.306 * \left(2/12\right)^2}{2} + 0.306 * \left(\frac{5}{12}\right)^2\right] = 1.517 \ \text{ slug-pie}^2$$

En (1):

$$-22.22 * \frac{9}{12} = 1.517\, \ddot{\theta} \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = -10.99 \ \text{ rad/seg}^2 \text{ (constante)}$$

Si; $\dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta} \quad \rightarrow \quad \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} d\dot{\theta} = \int_0^t \ddot{\theta}\, dt = \int_0^t -10.99\, dt$

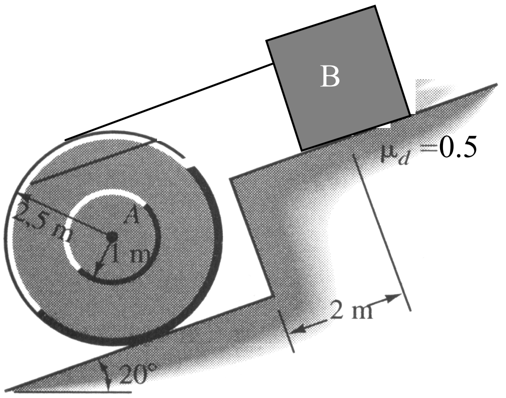
$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 - 10.99\, t \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = 200 * \frac{\pi}{30} - 10.99\, t = 20.94 - 10.99\, t \qquad (2)$$

3).- Cálculo del tiempo del frenaje:

Se detiene el cilindro, si $\dot{\theta} = 0$, luego en (2):

$$0 = 20.94 - 10.99\,t \quad \rightarrow \quad t = \frac{20.94}{10.99} = 1.9 \text{ seg}$$

4-73.- Un cilindro hueco está a punto de bajar por un plano inclinado tirando del bloque B, partiendo del reposo. Hallar la velocidad angular del cilindro que rueda, después de haber recorrido 0.5 m. Utilizar los siguientes datos: R_A (exterior) = 2.5 m, R_A (interior) = 1 m, M_A = 100 kg y M_B = 30 kg. El cordón es delgado y está enrollado alrededor del cilindro A. La energía cinética del cilindro compuesto debido a la rotación alrededor de su propio eje viene dado por 0.8 veces la del cilindro sólido exterior de radio r = 2.5 m.

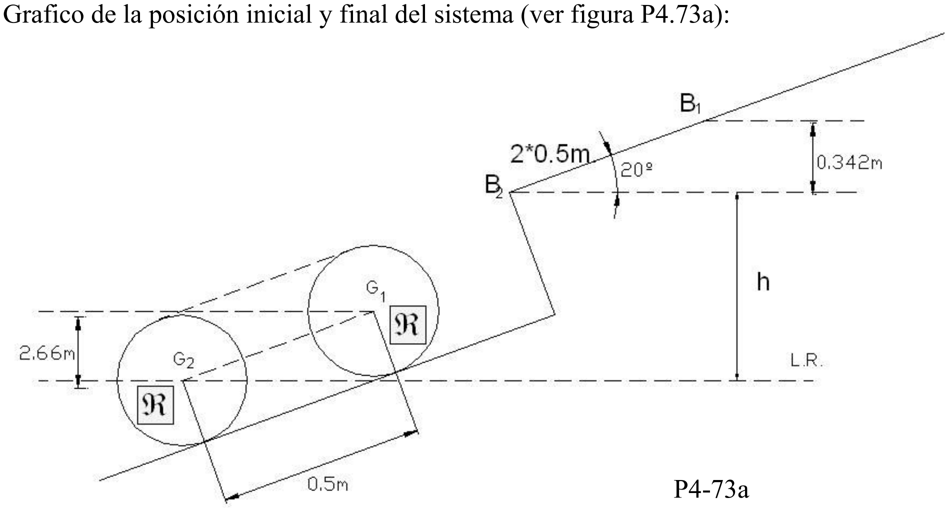


P4-73

Solución

Por el método alternativo del principio de trabajo y energía cinética en el sistema.

1).- Grafico de la posición inicial y final del sistema (ver figura P4.73a):



P4-73a

2).- Cálculo de la energía cinética del cilindro y del cuerpo B en la posición final.-

a).- Cálculo de la energía cinética del cilindro hueco (ver sistema de partículas):

$$Ek_{\Re} = \frac{1}{2} m_{\Re} V_{G2}^2 + 0.8 * \left(\frac{1}{2} \sum m_i \dot{\rho}_i^2 \right) = \frac{1}{2} m_{\Re} (\omega R)^2 + 0.8 * \left(\frac{1}{4} m_{\Re} R^2 \omega^2 \right)$$

$$Ek_{\Re} = m_{\Re} R^2 \omega^2 (0.5 + 0.2) = 100 * 2.5^2 * 0.7\ \omega^2 = 437.5\ \omega^2 \text{ J}$$

b).- Cálculo de la energía cinética del cuerpo B en la posición final:

$$Ek_B = \frac{1}{2} m_B V_B^2 = \frac{1}{2} m_B (2\ R\ \omega)^2 = 2 * 30 * 2.5^2\ \omega^2 = 375\ \omega^2 \text{ J}$$

c).- Cálculo de la energía cinética del sistema:

$$Ek = Ek_{\Re} + Ek_B = 812.5\ \omega^2$$

3).- Cálculo de la energía potencial en los dos estados:

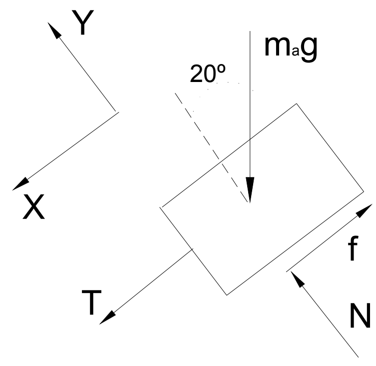
$$U_1 = m_{\Re} g\ h_{G1} + m_B g\ h_{B1} = 100 * 9.81 * 2.66 + 30 * 9.81 * (0.342 + h)$$

$$U_1 = 2710.1 + 294.3\ h$$

$$U_2 = m_B g\ h_{B2} = 30 * 9.81\ h = 294.3\ h$$

4).- Cálculo de la fuerza de fricción de B:

a).- D.C.L. de B (ver figura P4-73b):



P4-73b

b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_Y = 0 \ \rightarrow \ m_B g \cos 20º = N \ \rightarrow \ N = 276.55 \text{ N}$$

Luego; $f = \mu_d N = 0.5 * 276.55 = 138.275$ N

5).- Por el método alternativo:

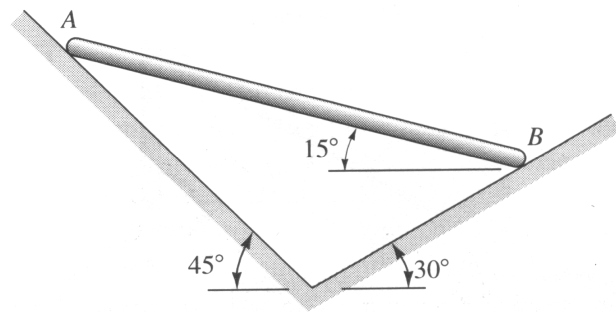
$$W_{NC} = EM_2 - EM_1$$

$$-138.275 * 1 = (812.5\ \omega^2 + 294.3\ h) - (2710.1 + 294.3\ h)$$

$$2571.825 = 812.5\ \omega^2$$

$$\omega = 1.78 \text{ rad/seg}$$

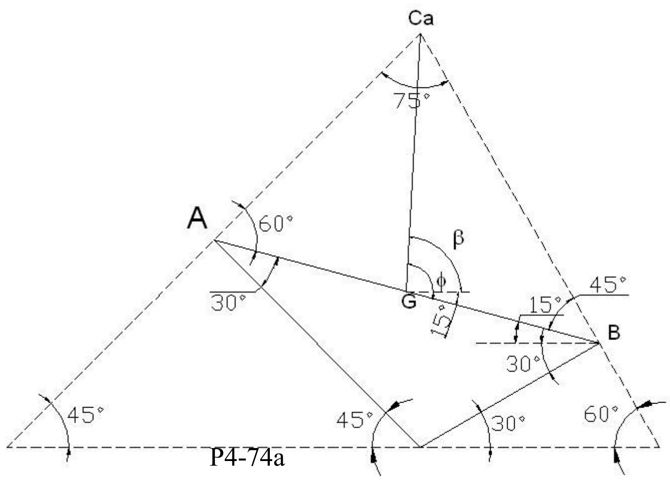
4-74.- La barra AB se suelta en la configuración que se muestra ¿Cuáles serán las fuerzas de soporte en ese instante, si despreciamos el rozamiento? La barra pesa 900 N y tiene 6 m de longitud.



P4-74a

Solución

1).- Relaciones cinemáticas.- Determinación del centro instantáneo de aceleración nulo y cálculos elementales (ver figura P4-74a):



P4-74a

Por la ley de senos:

$$\frac{6}{sen75^{\circ}} = \frac{C_aA}{sen45^{\circ}} = \frac{C_aB}{sen60^{\circ}}$$

$$C_aA = 4.392 \text{ m}$$

$$C_aB = 5.379 \text{ m}$$

Por el teorema de la mediana:

$$C_aA^2 + C_aB^2 = 2\, C_aG^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$4.392^2 + 5.379^2 = 2\, C_aG^2 + \frac{36}{2}$$

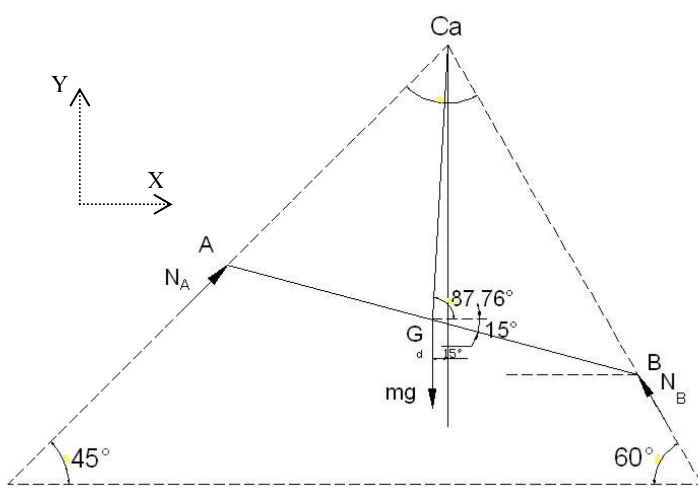
$$C_aG = 3.887 \text{ m}$$

Por ley de senos:

$$\frac{5.379}{sen\beta} = \frac{3.887}{sen45^{\circ}}$$

$$sen\beta = 0.979 \quad \rightarrow \quad \beta = 101.76^{\circ}$$

$$\phi = 101.76^{\circ} - 15^{\circ} = 86.76^{\circ}$$



P4-74b

2).- D.C.L. de la barra (ver figura P4-74b):

$d = 3.887\cos 86.76^{\circ} = 0.22$ m

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum M_{Ca} = I_{Ca}\alpha \quad \rightarrow \quad 900\, d = \left(\frac{1}{12} m\,\ell^2 + m\, C_a G^2\right)\alpha$$

$$900 * 0.22 = \frac{900}{9.81}\left(\frac{1}{12} * 36 + 3.887^2\right)\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = 0.119 \text{ rad/seg}^2$$

Luego:

$$\bar{a}_G = \alpha\,\bar{k}\ x\ \bar{r}_{CaG} = 0.119\,\bar{k}\ x\ 3.887\left(-\cos 86.76^{\circ}\,\bar{i} - sen 86.76^{\circ}\ \bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_G = 0.462\,\bar{i} - 0.026\,\bar{j} \quad (\text{m/seg}^2)$$

$$\sum F_Y = m\, a_{GX} \quad \rightarrow \quad N_A * sen 45^{\circ} + N_B sen 60^{\circ} - mg = -\frac{900}{9.81} * 0.026 \qquad (1)$$

$$\sum F_X = m\, a_{GY} \quad \rightarrow \quad N_B * \cos 45^{\circ} - N_B \cos 60^{\circ} = \frac{900}{9.81} * 0.462 \qquad (2)$$

(1) + (2):

$$-N_B\left(sen 60^{\circ} + \cos 60^{\circ}\right) + 900 = \frac{900}{9.81}\left(0.026 + 0.462\right)$$

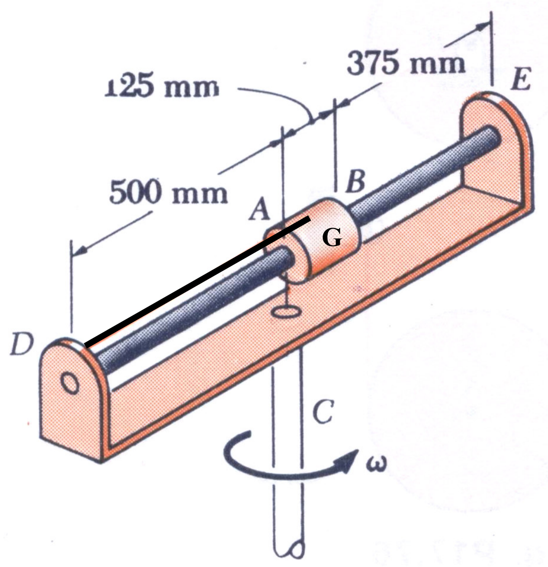
$N_B = 626.07$ N

En (2):

$$N_A * \frac{\sqrt{2}}{2} - 626.07 * \cos 60^{\circ} = \frac{900}{9.81} * 0.462$$

$N_A = 317.27$ N

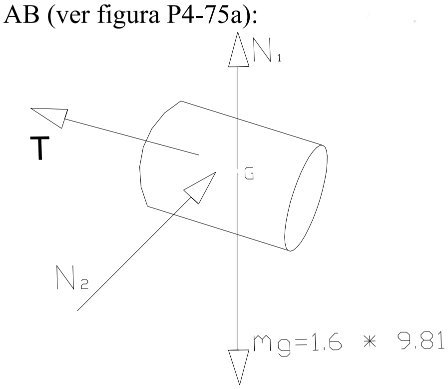
4-75.- Un tubo AB de 1.6 kg puede deslizar libremente sobre la barra DE, que puede girar libremente en un plano horizontal y el tubo se mantiene en su posición mediante una cuerda. La rapidez angular crece hasta que se rompe la cuerda (su resistencia a la tensión es de 50 N) y en ese instante el momento externo deja de actuar. Determine la velocidad angular de la barra DE y la velocidad del centro de masa de AB cuando este golpee a E. Si el momento de inercia de masa de la barra y la mensula respecto al eje de rotación vertical es de 0.30 kg-m^2 y el momento central de inercia del tubo respecto al eje vertical de rotación es de 0.0025 kg-m^2.



P4-75

Solución

1).- D.C.L. del tubo AB (ver figura P4-75a):



P4-75a

2).- Relaciones cinéticas.-

a).- La cuerda proporciona la fuerza normal, que cusa la aceleración normal (hacia el interior) hasta que se rompe. Para ese instante se calcula la velocidad angular de DE:

$$\sum F_n = m\, a_{G\,n} \quad \rightarrow \quad T = m\, \ell_1 \omega_1^2 \quad \rightarrow \quad 50 = 1.6 * \frac{0.125}{2} * \omega_1^2$$

$$\omega_1 = 22.36 \quad \text{rad/seg}$$

b).- Cuando la cuerda se rompe en el t_1, el tubo AB se desplaza hacia fuera además de girar con DE. Entre el tiempo t_1 y t_2 (cuando choca), tenemos lo siguiente para el sistema:

i).- Conservación de la cantidad de movimiento angular H_0 respecto al eje vertical, por que no hay fuerzas que produzcan momentos con respecto a ese eje.

ii).- Conservación de la energía cinética.

Por conservación de la cantidad de movimiento angular:

$$H_{0i} = H_{0f}$$

$$I_0^{AB}\omega_1 + I_0^{DE}\omega_1 = I_0^{DE}\omega_2 + H_{02}^{AB}$$

Donde:

$$H_{02}^{AB} = H_{G2}^{AB} + \left(\bar{r}_{0G} x\, m\, \bar{V}_{G2}\right) = I_G^{AB}\omega_2 + \left[\left(r_{OE} - \frac{r_{AB}}{2}\right)\bar{i}\ x\ m\,\bar{V}_G\right]_Z$$

Luego:

$$I_0^{AB}\omega_1 + I_0^{DE}\omega_1 = I_0^{DE}\omega_2 + I_G^{AB}\omega_2 + \left[\left(r_{OE} - \frac{r_{AB}}{2}\right)\bar{i}\ x\ m\,\bar{V}_G\right]_Z$$

$$\left[\left(I_G^{AB} + m * 0.0625^2\right) + I_O^{DE}\right]\omega_1 = I_0^{DE}\omega_2 + I_G^{AB} + \left(r_{OE} - \frac{r_{AB}}{2}\right) m\ \omega_2$$

$$22.36\left(0.0025 + 6.25x10^{-3} + 0.3\right) = \omega_2 (0.3 + 0.0025 + 0.375 * 1.6)$$

$$\omega_2 = 7.65 \text{ rad/seg}$$

3).- Cálculo de la velocidad de choque de AB:

a). La componente transversal de punto B es:

$$V_{\theta 2} = \omega_2 r = 7.65 * 0.375 = 2.87 \text{ m/seg}$$

b).- Por conservación de la energía cinética:

$$Ek_1 = \frac{1}{2} I_0^{DE}\omega_1^2 + \frac{1}{2} m\left(V_{\theta 1}^2\right) + \frac{1}{2} I_G^{AB}\omega_1^2$$

$$Ek_1 = \frac{0.3}{2} * 22.36^2 + \frac{1}{2} * 1.6\,(0.625 * 22.36)^2 + \frac{1}{2} * 0.0025 * 22.36^2$$

$$Ek_1 = 77.183 \text{ J}$$

$$Ek_2 = 0.15 * 7.65^2 + \frac{1}{2} * 1.6\left(V_{\rho 2}^2 + (0.375 * 7.65)^2\right) + \frac{1}{2} * 0.0025 * 7.65^2$$

$$Ek_2 = 0.8\,V_{\rho 2}^2 + 11.15 \quad \text{J}$$

Luego:

$$77.183 = 0.8\,V_{\rho 2}^2 + 11.15 \quad \rightarrow \quad V_{\rho 2}^2 = 82.54$$

$$V_{\rho 2} = 9.09 \quad \text{m/seg}$$

$$\therefore \quad V_{B2} = \sqrt{V_{\rho 2}^2 + V_{\theta 2}^2} = \sqrt{2.87^2 + 9.09^2} = 9.53 \quad \text{m/seg}$$