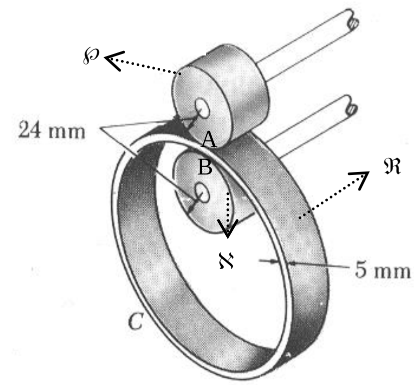
PROBLEMAS SOBRE CINEMATICA DEL CUERPO RIGIDO

2-1.- El anillo $\Re$ tiene un radio interior de 55 mm y un radio exterior de 60 mm y se encuentra colocado entre dos ruedas $\wp$ y $\aleph$, cada una de 24 mm de radio exterior. Si la rueda $\wp$ gira con una velocidad constante de 300 RPM y hay rodamiento, determine: a) la velocidad angular del anillo $\Re$ y de la rueda $\aleph$ y b) la aceleración de los puntos A y B que están en contacto con $\Re$.



P2-1

Solución

Los tres cuerpos tienen movimiento alrededor de ejes fijos (ver figura P2-1a).

1).- Cálculo de las velocidades angulares:

$$\omega_{\wp} = 300 * \frac{\pi}{30} = 10\,\pi \quad \text{(rad/seg)}$$

$$V_A = \omega_{\wp}\, r_A = 10\,\pi * 24 = 240\,\pi \quad \text{(mm/seg)}$$

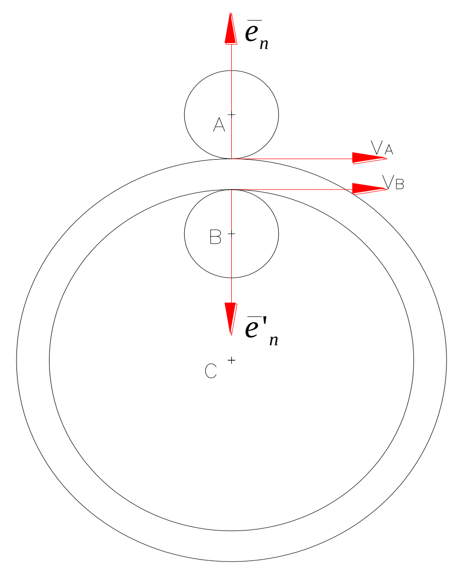
$$\omega_{\Re} = \frac{V_A}{r_{CA}} = \frac{240\pi}{60} = 4\pi = 12.57 \circlearrowright \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\omega_{\Re} = 4\pi * \frac{30}{\pi} = 120 \circlearrowright \text{ RPM}$$

$$V_B = \omega_{\Re}\, r_{CB} = 4\,\pi * 55 = 220\,\pi \quad \text{(mm/seg)}$$

$$\omega_{\aleph} = \frac{V_B}{r_B} = \frac{220\pi}{24} = 28.8 \circlearrowright \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\omega_{\aleph} = \frac{220\pi}{24} * \frac{30}{\pi} = 275 \circlearrowright \text{ RPM}$$



P2-1a

2).- Cálculo de las aceleraciones de A y B:

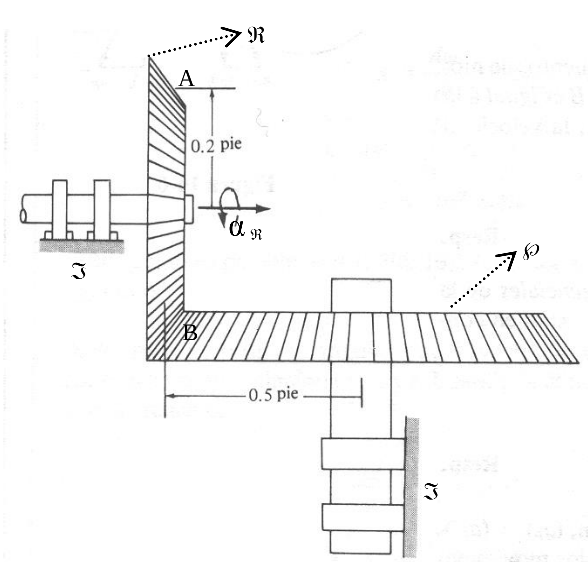
$$\bar{a}_A = \omega_{\wp}^2 r_A \; \bar{e}_n = 100\pi^2 * 0.024 \; \bar{e}_n = 23.69 \;\; \bar{e}_n \;\; \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$a_A = 23.7 \;\; \uparrow \;\; \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{a}_B = \omega_{\aleph}^2 \; \bar{r}_B \; \bar{e}'_n = 28.8^2 * 0.024 \; \bar{e}'_n = 19.9 \; \bar{e}'_n \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$a_B = 19.9 \quad \downarrow \;\; \text{(m/seg}^2\text{)}$$

2-2.- El engranaje $\Re$ está conectado con el engranaje $\wp$ como se indica. Si $\Re$ parte del reposo y tiene una aceleración angular constante de $\alpha_{\Re}$ = 2 rad/seg^2, determine el tiempo para que $\wp$ obtenga una velocidad angular de $\omega_{\wp}$ = 50 rad/seg.

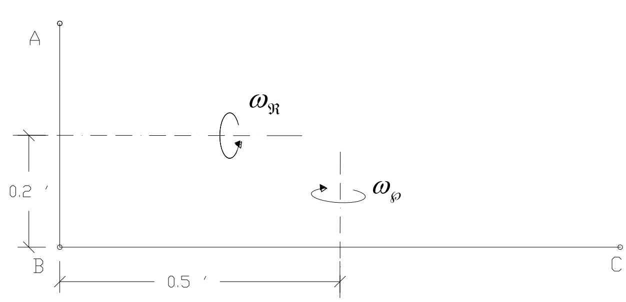


P2-2

Solución

1).- Por movimiento de rodadura de los engranajes de $\Re$ y $\wp$ (ver figura P2-2a):

$$\left.\begin{aligned} V_B &= \omega_{\Re} * 0.2 \\ V_B &= \omega_{\wp} * 0.5 \end{aligned}\right\} \;\; 0.2\omega_{\Re} = 0.5\omega_{\wp}$$



P2-2a

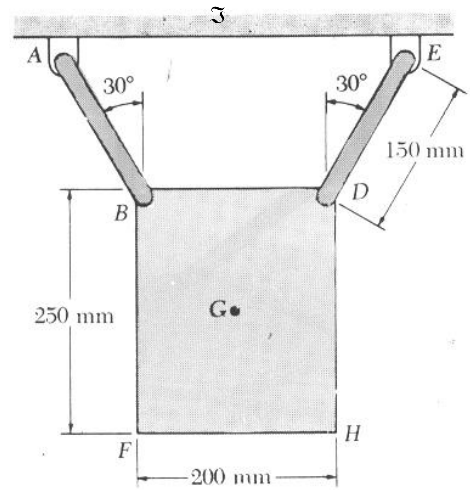
$$\omega_{\Re} = \frac{0.5}{0.2}\,\omega_{\wp} = 2.5 * 50 = 125 \;\; \text{rad/seg}$$

2).- Cálculo del tiempo para que $\omega_{\Re}$ sea igual a 125 rad/seg:

$$\omega_{\Re\, t} = \omega_{\Re\, 0} + \alpha\, t \quad \rightarrow \quad 125 = 2\, t$$

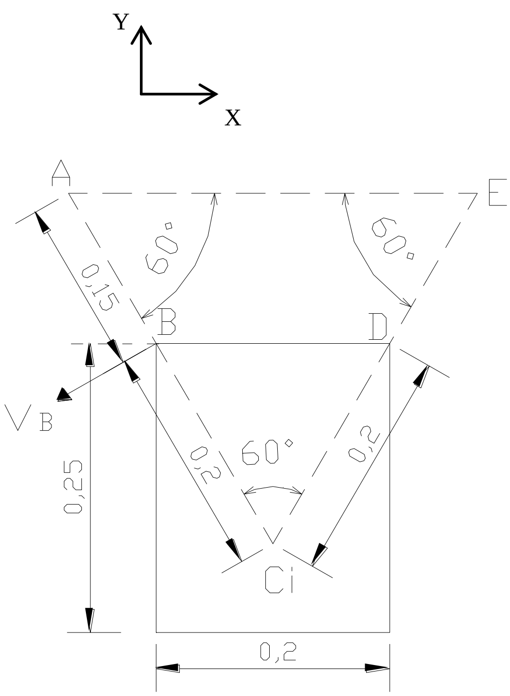
$$t = 62.5 \;\; \text{seg}$$

2-3.- Una placa rectangular se sostiene mediante dos barras de 150 mm como se muestra. Sabiendo que en el instante que se indica la velocidad angular de la barra AB es de 4 rad/seg en sentido de las manecillas del reloj. Determinar: a) la velocidad angular de la placa y b) los puntos de la placa con una velocidad igual o menor que 150 mm/seg.



P2-3

Solución



P2-3a

1).- Cálculo de la velocidad angular de la placa, utilizando el método de los centros instantáneos de velocidad nula (Ver figura P2-3a, dimensiones en m):

$$V_B = \omega_{AB} r_{AB} = 4 * 0.15 = 0.6 \text{ m/seg}$$

$$\omega_{BGD} = \frac{V_B}{r_{C\,iB}} = \frac{0.6}{0.2} = 3 \text{ rad/seg}$$

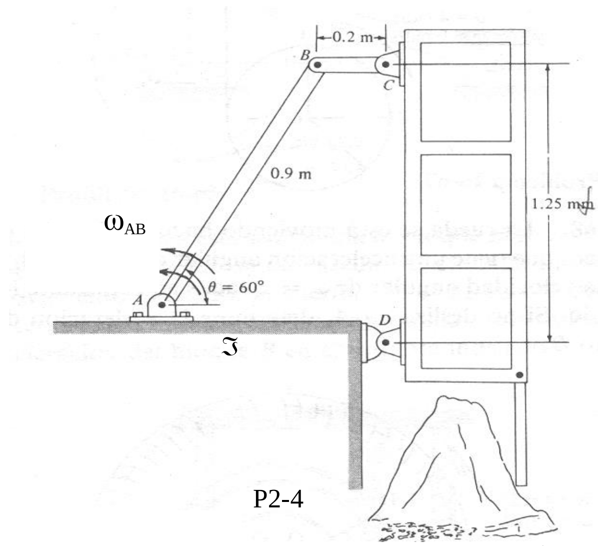
$$\overline{\omega}_{BDG} = 3\,\overline{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

2).- Cálculo de la distancia de los puntos con velocidad igual o menor a 150 mm/seg:

$$V = 0.15 = \omega_{BGD} r = 3\,r \quad \rightarrow \quad r = 0.05 \text{ m}$$

Los puntos que tienen igual o menor de 150 mm/seg de la velocidad, serán aquellos puntos que están a una distancia $r \leq 50$ mm del centro instantáneo C_i de la placa.

2-4.- En el instante indicado, el brazo AB tiene una velocidad angular ω_{AB} = 0.5 rad/seg. Determine la velocidad angular del cubo de basura en este instante, usando el método de los centros instantáneos de velocidad nula.



P2-4

Solución

1).- Determinación del centro instantáneo de velocidad nula (ver figura P2-4a, dimensiones en m):

$$r_{BC\,i} = 0.4 \text{ m}$$

$$r_{CC\,i} = 0.346 \text{ m}$$

2).- Cálculo de la velocidad angular del cubo de basura:

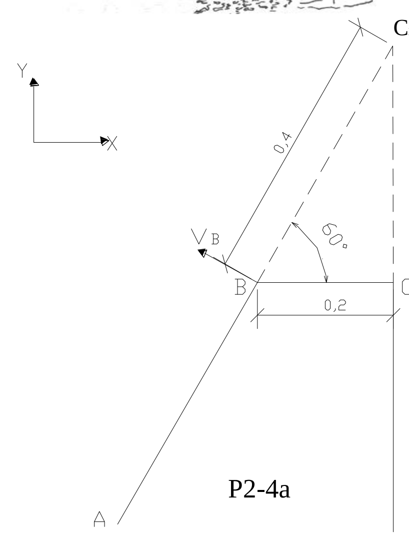
$$V_B = 0.5 * 0.9 = 0.45 \text{ m/seg}$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{r_{C\,iB}} = \frac{0.45}{0.4} = 1.125 \text{ rad/seg}$$

$$V_C = \omega_{BC} r_{C\,iC} = 1.125 * 0.346 = 0.389 \text{ m/seg}$$

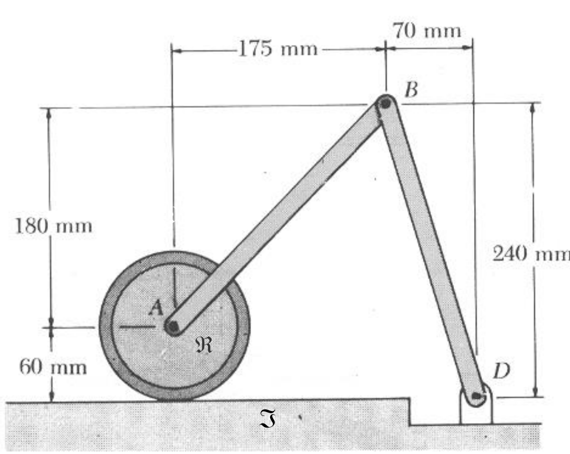
$$\omega_{CD} = \frac{V_C}{r_{DC}} = \frac{0.389}{1.25} = 0.31 \text{ rad/seg}$$

$$\bar{\omega}_{CD} = 0.31\,\bar{k} \text{ (rad/seg)}$$



P2-4a

2-5.- Una rueda de 60 mm de radio se conecta a un soporte fijo D por medio de las dos barras AB y BD. En el instante indicado, la velocidad del centro A de la rueda es de 300 mm/seg a la izquierda, determínese utilizando el método de los centros instantáneos de velocidad nula: a) la velocidad angular de cada barra y b) la velocidad del pasador B.



P2-5

Solución

1).- Obtención de los centros instantáneos de velocidad nula (ver figura P2-5a) y cálculos elementales:

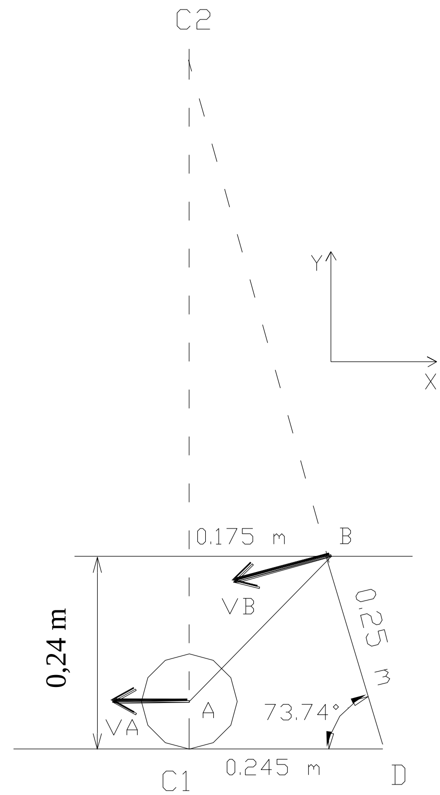
$$tg\,73.74^{o} = \frac{C_2C_1}{245} \rightarrow C_2C_1 = 840 \text{ mm}$$

$$C_2A = 780 \text{ mm}$$

$$\cos 73.74^{o} = \frac{245}{C_2D} \rightarrow C_2D = 875 \text{ mm}$$

$$C_2B = 625 \text{ mm}$$

2).- Cálculo de las velocidades:



P2-5a

$$\omega_{\Re} = \frac{300}{60} = 5 \text{ rad/seg}$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{C_2A} = \frac{300}{780} = 0.385 \text{ rad/seg} \quad \rightarrow \quad \bar{\omega}_{AB} = -0.385\,\bar{k} \text{ (rad/seg)}$$

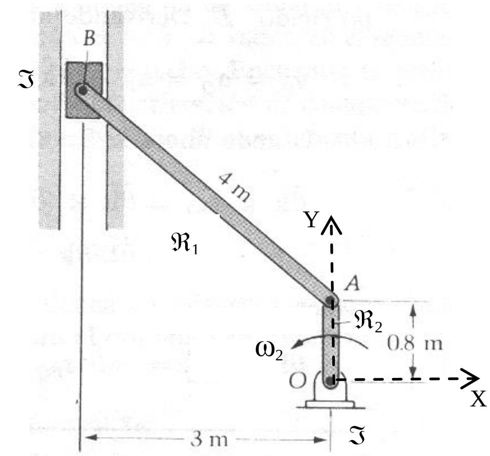
$$V_B = \omega_{AB} C_2B = 0.385 * 625 = 240.625 \text{ mm/seg}$$

$$\bar{V}_B = 240.625\left(-sen73.74°\,\bar{i} - \cos 73.74°\,\bar{j}\right) \quad \rightarrow \bar{V}_B = -231\,\bar{i} - 67.374\,\bar{j} \text{ (mm/seg)}$$

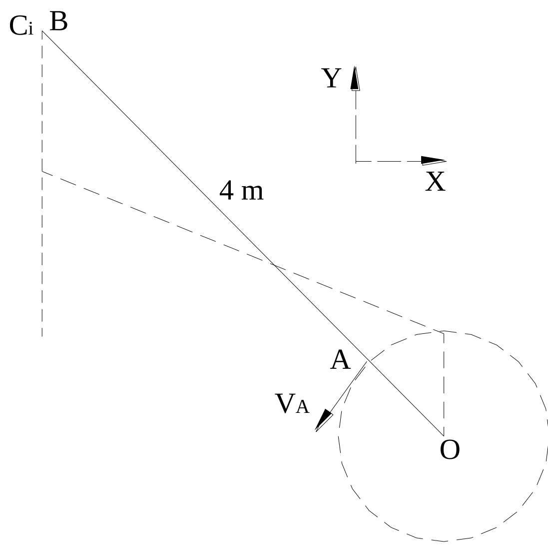
$$\omega_{BD} = \frac{V_B}{DB} = \frac{240.625}{250} = 0.963 \text{ rad/seg}$$

$$\bar{\omega}_{BD} = 0.963\,\bar{k} \text{ (rad/seg)}$$

2-6.- Las barras $\Re_1$ y $\Re_2$ (ver figura P2-6) están articulados entre si en A. Encuentre la velocidad angular de la barra $\Re_1$ y la velocidad del punto B cuando las barra estén alineados por primera vez, usando el método de los centros instantáneos de velocidad nula, si ω_2 = 0.2 rad/seg (constante). *Sugerencia: para encontrar está configuración, dibuje una serie de diagramas de $\Re_1$ y $\Re_2$, cuando $\Re_2$ gira en sentido antihorario desde la posición mostrada y se evidenciaría el alineamiento de $\Re_1$ y $\Re_2$.*



P2-6



P2-6a

Solución

1).- Diagrama para el instante de interés:

2).- De acuerdo al diagrama P2-6a, el centro instantáneo se encuentra en B, luego:

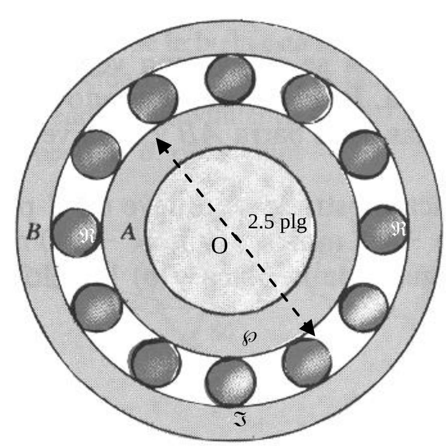
$$V_B = 0$$

$$V_A = \omega_{\Re 2} r_{OA} = 0.2 * 0.8 = 0.16 \text{ m/seg}$$

$$\omega_{\Re 1} = \frac{V_A}{r_{BA}} = \frac{0.16}{4} = 0.04 \circlearrowright \text{ rad/seg}$$

$$\bar{\omega}_{\Re 1} = -0.04\,\bar{k} \quad (\text{rad/seg}^2)$$

2-7.- En el dibujo simplificado de un rodamiento de bolas, que aquí se muestra, el diámetro del anillo interior es de 2.5 plg y el diámetro de cada bola es de 0.5 plg. El anillo exterior $\Im$ está estacionario, mientras que el anillo interior $\wp$ tiene velocidad angular de 3600 RPM. Determínese: a) la velocidad del centro de cada bola, b) la velocidad angular de cada bola y c) el número de vueltas por minuto que cada bola realiza en el anillo exterior.



P2-7

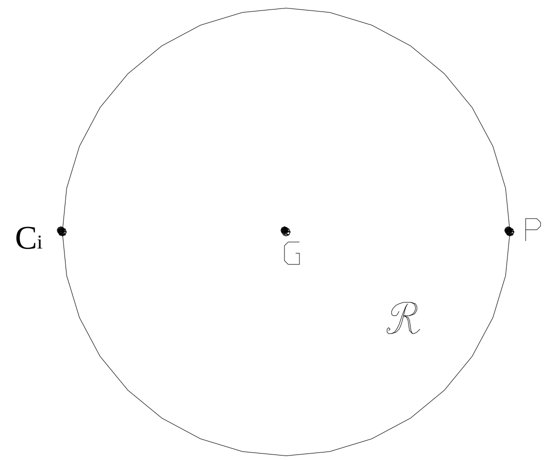
Solución

1).- Cálculo de la velocidad angular de las bolas (de uno solo, ver figura P2-7a):

$$V_P = \omega_{\wp} r_{OA} = 3600 * \frac{\pi}{30} * \frac{2.5}{2} = 471.24 \text{ plg/seg}$$

$$\omega_{\Re/\Im} = \frac{V_P}{r_{C\,iP}} = \frac{471.24}{0.5} = 942.48 \text{ rad/seg}$$

$$\omega_{\Re/\Im} = 942.48 * \frac{30}{\pi} = 9000 \text{ RPM}$$



P2-7a

2).- Cálculo de la velocidad del centro de cada bola:

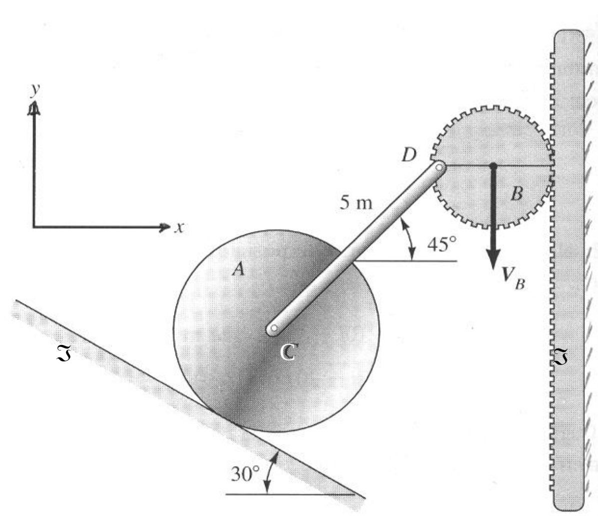
$$V_G = \omega_{\Re/\Im} r_{C\,iG} = 942.48 * \frac{0.5}{2} = 235.62 \text{ plg/seg}$$

3).- El número de vueltas que da cada bola:

$$\omega_{G/\Im} = \frac{V_G}{r_{OG}} = \frac{235.62}{1.5} = 157.08 \text{ rad/seg} \rightarrow \quad \omega_{G/\Im} = 157.08 * \frac{30}{\pi} = 1500 \text{ RPM}$$

2-8.- Para la figura, en el instante mostrado, hallar: a) Usando el método de los centros instantáneos de velocidad nula, la velocidad angular de A, b) la aceleración angular de A. Utilizar los siguientes datos r_A = 0.3 m, r_B = 0.2 m, CD = 5 m y V_B = 0.2 m/seg constante, además el disco A rueda sin deslizar

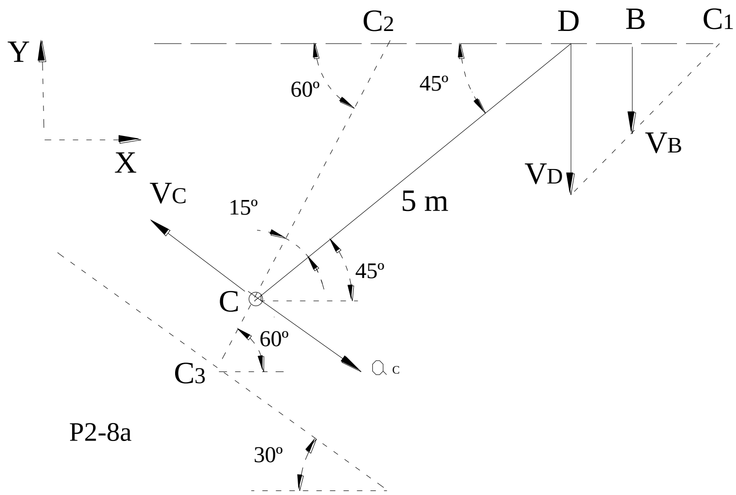
.



P2-8

Solución

1).- Determinación de los centros instantáneos (ver figura P2-8a):



P2-8a

Por ley de senos:

$$\frac{C_2D}{sen\,15°}=\frac{C_2C}{sen\,45°}=\frac{5}{sen\,120°}$$

$$C_2D=1.494 \text{ m}$$

$$C_2C=4.082 \text{ m}$$

$$C_1D=0.4 \text{ m}$$

$$C_3C=0.3 \text{ m}$$

2).- Cálculo de las velocidades:

$$\omega_B=\frac{V_B}{C_1B}=\frac{0.2}{0.2}=1 \text{ rad/seg} \quad \text{(antihorario)}$$

$$V_D=\omega_B C_1D=1*0.4=0.4 \text{ m/seg}$$

$$\omega_{CD}=\frac{V_D}{C_2D}=\frac{0.4}{1.494}=0.2677 \text{ rad/seg}$$

$$V_C=\omega_{CD}C_2C=0.2677*4.082=1.093 \text{ m/seg}$$

$$\omega_A=\frac{V_C}{C_2D}=\frac{1.093}{0.3}=3.64 \text{ rad/seg (antihorario)}$$

3).- Cálculo de la aceleración angular de A.-

a).- Cálculo de la aceleración de D, como parte de B:

$$\bar{a}_D=-\omega_B^2\,C_1B\,\bar{i}-\omega_B^2\,\bar{r}_{C1D}=\omega_B^2\left(-0.2+0.4\right)\bar{i}=1^2*0.2\,\bar{i}=0.2\,\bar{i} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

b).- Cálculo de la aceleración de C, como parte de DC:

$$\bar{a}_C=\bar{a}_D+\alpha_{CD}\bar{k}\;x\;\bar{r}_{DC}-\omega_{CD}^2\,\bar{r}_{DC}$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_D + \alpha_{CD}\bar{k}\ x\ 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{j}\right) - 0.2677^2 * 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_C = (0.453 + 3.5355\ \alpha_{CD})\,\bar{i} + (0.253 - 3.5355\ \alpha_{CD})\ \bar{j} \qquad (1)$$

c).- Cálculo de la aceleración de c, como parte de A:

$$\bar{a}_C = \alpha_A C_3 A\left(\cos 30°\ \bar{i} - sen\ 30°\ \bar{j}\right) = 0.26\ \alpha_A \bar{i} - 0.15\ \alpha_A\ \bar{j} \qquad (2)$$

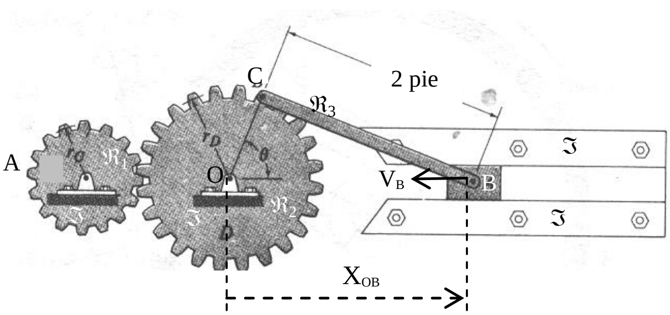
(1) = (2) e igualando componentes:

$$0.453 + 3.5355\ \alpha_{CD} = 0.26\ \alpha_A \ \rightarrow\ 3.5355\ \alpha_{CD} = 0.26\ \alpha_A - 0.453$$

$$0.253 - 0.26\ \alpha_A + 0.453 = -0.15\ \alpha_A \ \rightarrow\ -0.11\ \alpha_A = .0.706$$

$\alpha_A = 6.42$ rad/seg^2 (horario)

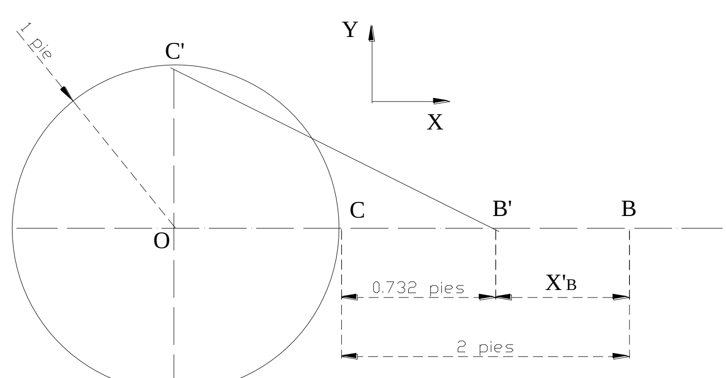
2-9.- Los engranajes $\Re_1$ y $\Re_2$ representados en la figura, tienen 25 y 50 dientes respectivamente. La barra $\Re_3$ tiene 2 pies de longitud y el radio de paso de $\Re_2$ es de 1 pie. Determine la velocidad del punto A cuando θ = 90°. Si X_{BO} = 2 sen (0.2π t) en pies, con t en seg y en t = 0, θ =0°.



P2-9

Solución

1).- Cálculo de la velocidad de B en θ = 90°:



P2-9a

$r_{OB'} = 2\cos 30° = 1.732$ pies

$X_{B'} = 2 - 0.732 = 1.268$ pies

Si:

$X_{B'} = 1.268 = 2sen(0.2\pi\, t)$

$t = 1.093$ seg

$\dot{X}_{B'} = 1.26\cos(0.2\pi\, t) \quad \rightarrow \quad \dot{X}_{B'} = 0.974$ pie/seg

2).- Cálculo de la velocidad de C cuando θ = 90°:

$$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \omega_3 \bar{k}\ x\ \bar{r}_{BC}$$

$$\bar{V}_C = -0.974\,\bar{i} + \omega_3 \bar{k}\ x(-1.732\,\bar{i} + \bar{j})$$

$$V_C\ \bar{i} = -(0.974 + \omega_3)\,\bar{i} - 1.732\omega_3\,\bar{j} \quad \text{(pie/seg)}$$

Igualando componentes:

$$\omega_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{V}_C = -0.974\,\bar{i} \quad \text{(pie/seg)}$$

3).- Cálculo de la velocidad angular de $\Re_2$:

$$\omega_2 = \frac{V_C}{r_{OC}} = \frac{0.974}{1} = 0.974 \ \text{rad/seg} \quad \rightarrow \quad \bar{\omega}_2 = 0.974\,\bar{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

4).- Cálculo de la velocidad de A:

a).- Cálculo del radio de paso del engranaje $\Re_1$:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \quad \rightarrow \quad r_1 = \frac{25}{50} * 1 = 0.5 \ \text{pies}$$

b).- Cálculo de la velocidad angular de $\Re_1$:

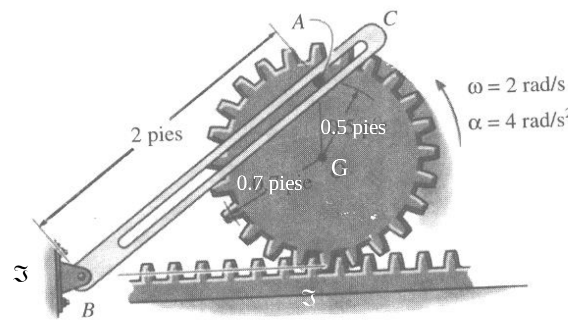
$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2 \quad \rightarrow \quad \omega_1 = \frac{0.974}{0.5} = 1.948 \ \text{rad/seg}$$

$$\bar{\omega}_1 = -1.948\,\bar{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

c).- Determinación de la velocidad del punto A:

$$\bar{V}_A = \bar{\omega}_1 x\, \bar{r}_{O'A} = -1.948\,\bar{k}\ x\left(-0.5\,\bar{i}\right) = 0.974\ \bar{j} \quad \text{(pie/seg)}$$

2-10.- El engranaje tiene un movimiento angular ω = 2 rad/seg y α = 4 rad/seg^2 en el instante mostrado en la figura. Determine la velocidad y aceleración angulares del enlace ranurado BC para el instante indicado. Si el perno A está fijo al cilindro.

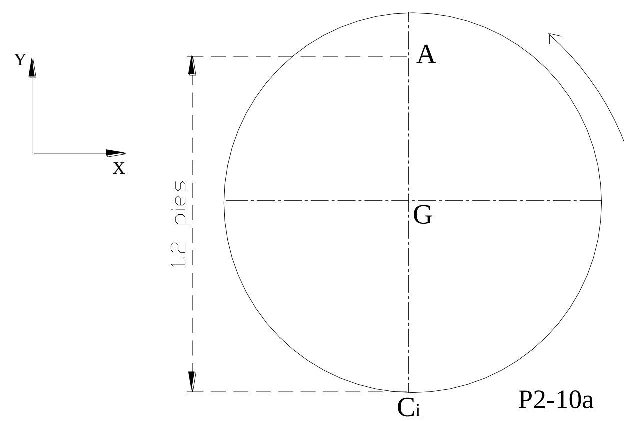


P2-10

Solución

Sea A' punto coincidente con A, pero perteneciente a CB.

1).- Cálculo de la velocidad y aceleración de A como parte del engranaje (ver figura P2-10a):



P2-10a

$$\bar{V}_{A/\Im} = \omega\,\bar{k}\ x\,\bar{r}_{C\,iA} = 2\,\bar{k}\ x1.2\,\bar{j}$$

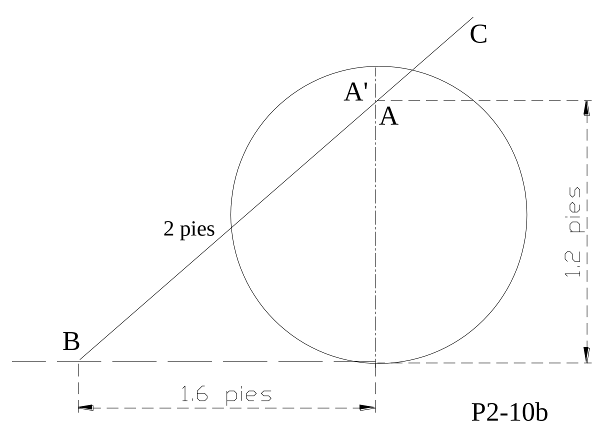
$$\bar{V}_{A/\Im} = -2.4\,\bar{i} \quad \text{(pie/seg)} \qquad (1)$$

$$\bar{a}_{A/\Im} = \bar{a}_G + \alpha\,\bar{k}\ x\,\bar{r}_{GA} - \omega^2 \bar{r}_{GA}$$

$$\bar{a}_{A/\Im} = -0.7*4\,\bar{i} + 4\,\bar{k}\ x0.5\ \bar{j} - 4\left(0.5\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_{A/\Im} = -4.8\,\bar{i} - 2\ \bar{j} \quad \text{(pie/seg}^2\text{)} \qquad (2)$$

2).- Cálculo del movimiento de A, tomando como punto base B (ver figura P2-10b):



P2-10b

$$\bar{V}_{A/\Im} = \bar{V}_{A'/\Im} + \bar{V}_{A/CB} = \omega_{BC}\bar{k}\ x\ \bar{r}_{BA} - V_{A/CB}\left(0.8\,\bar{i} + 0.6\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_{A/\Im} = \omega_{BC}\bar{k}\ x\left(1.6\,\bar{i} + 1.2\,\bar{j}\right) - V_{A/CB}\left(0.8\,\bar{i} + 0.6\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_{A/\Im} = -\left(1.2\omega_{BC} + 0.8V_{A/BC}\right)\bar{i} + \left(1.6\omega_{BC} - 0.6V_{A/CB}\right)\bar{j} \qquad (3)$$

$$\bar{a}_{A/\Im} = \bar{a}_{A'/\Im} + \bar{a}_{A/CB} + 2\omega_{BC}\,x\,\bar{V}_{A/CB}$$

Si:

$$\bar{a}_{A'/\Im} = \alpha_{CB}\bar{k}\ x\ \bar{r}_{BA} - \omega_{CB}^{2}\bar{r}_{BA} = \alpha_{CB}\bar{k}\ x\left(1.6\,\bar{i} + 1.2\,\bar{j}\right) - \omega_{CB}^{2}\left(1.6\,\bar{i} + 1.2\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_{A'/\Im} = -\left(1.2\alpha_{CB} + 1.6\omega_{BC}^{2}\right)\bar{i} + \left(1.6\alpha_{CB} - 1.2\omega_{BC}^{2}\right)\bar{j}$$

$$\bar{a}_{A/CB} = -a_{A/CB}\left(0.8\,\bar{i} + 0.6\,\bar{j}\right)$$

$$2\bar{\omega}_{BC}\,x\,\bar{V}_{A/CB} = 2\omega_{BC}\bar{k}\ x\ V_{A/CB}\left(-0.8\,\bar{i} - 0.6\,\bar{j}\right) = 1.2\omega_{BC}V_{A/CB}\,\bar{i} - 1.6\omega_{BC}V_{A/CB}\,\bar{j}$$

Luego:

$$\bar{a}_{A/\Im} = \left[1.2\omega_{BC}V_{A/CB} - \begin{pmatrix} 1.2\alpha_{CB} + 1.6\omega_{BC}^{2} + \\ 0.8\,a_{A/CB} \end{pmatrix}\right]\bar{i} + \begin{pmatrix} 1.6\alpha_{CB} - 1.2\omega_{CB}^{2} - \\ 0.6a_{A/CB} - 1.6\omega_{BC}V_{A/CB} \end{pmatrix}\bar{j} \qquad (4)$$

(1) = (3) e igualando componentes:

$$\left(2.4 = 1.2\omega_{BC} + 0.8V_{A/CB}\right) * 0.6$$

$$\left(\quad 0 = 1.6\omega_{BC} - 0.6V_{A/CB}\right) * 0.8$$

$$1.44 = 2\omega_{BC} \qquad \rightarrow \qquad \omega_{BC} = 0.72 \ \text{rad/seg}$$

También:

$$0 = 1.6 * 0.72 - 0.6 V_{A/CB} \quad \rightarrow \quad V_{A/CB} = 1.92 \quad \text{pie/seg}$$

(2) = (4) e igualando componentes:

$$-4.8 = 1.2 * 0.72 * 1.92 - \left(1.2\alpha_{CB} + 1.6 * 0.72^2 + 0.8 a_{A/CB}\right)$$

$$5.63 = 1.2\alpha_{CB} + 0.8\, a_{A/CB} \qquad (5)$$

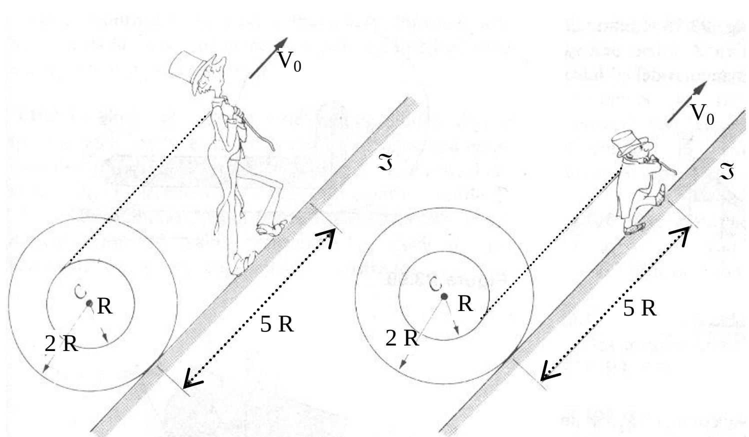
$$-2 = 1.6\alpha_{CB} - 0.6\, a_{A/CB} - 1.2 * 0.72^2 + 1.6 * 0.72 * 1.92$$

$$0.83 = 1.6\alpha_{CB} - 0.6\, a_{A/CB} \qquad (6)$$

Resolviendo (5) y (6):

$$4.042 = 2\alpha_{CB} \quad \rightarrow \quad \alpha_{CB} = 2.021 \quad \text{rad/seg}^2$$

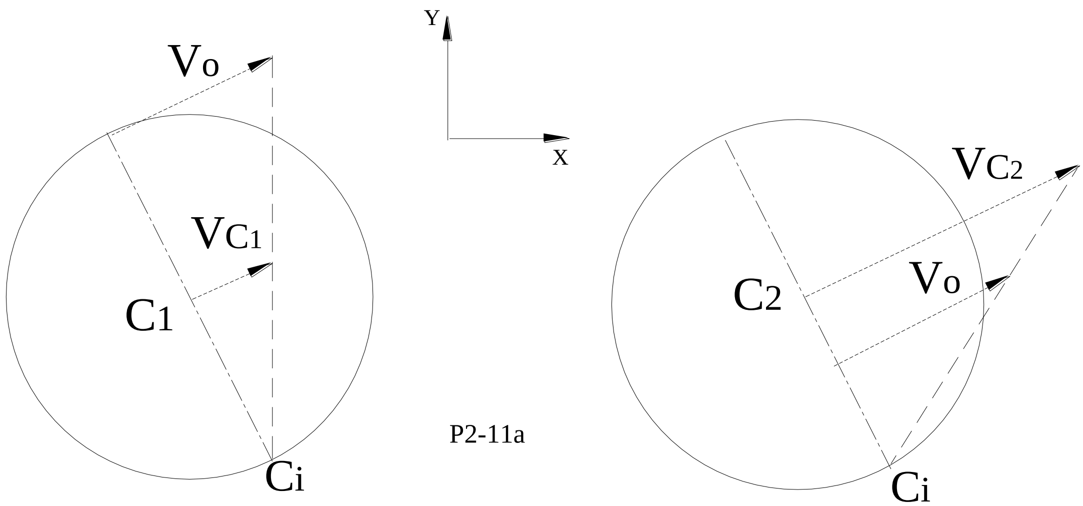
2-11.- Dos hombres, uno alto y el otro bajo, caminan hacia arriba sobre planos inclinados idénticos, tirando de carretes idénticos por medio de cuerdas enrolladas alrededor de los cubos de los carretes (ver figura). Ambos hombres caminan a las mismas velocidades constantes V_o, y las cuerdas están enrolladas en direcciones opuestas indicadas. Si los carretes no resbalan sobre el plano, uno de los hombres será atropellado por su propio carrete. Demuestre cuál es y cuando tardará el carrete en atropellarlo a partir del instante mostrado.



P2-11

Solución

1).- Si los carretes no resbalan o sea ruedan, se tiene:



P2-11a

El hombre que sería atropellado es el bajo, por que la distancia del centro del carrete al hombre disminuye gradualmente (ver figura P2-11a).

2).- Cálculo del tiempo en que tardará en atropellar al hombre bajo:

a).- Cálculo de V_{C2}:

$$\omega = \frac{V_0}{R} \quad \rightarrow \quad V_{C2} = 2R\omega = 2R\frac{V_0}{R} = 2V_0 \text{ (Unidad de velocidad)}$$

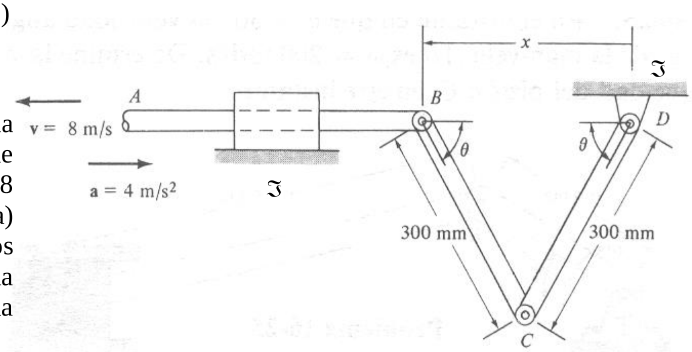
V_{C2} es constante, por que tiene magnitud y dirección constante

b).- Cálculo de tiempo en que tardará en atropellar:

$$V_{C2/H} = V_{C2} - V_0 = V_0 \quad \text{(Unidades de velocidad)}$$

$$t = \frac{r_{C2H}}{V_{C2/H}} = \frac{5R}{V_0} \quad \text{(Unidades de tiempo)}$$

2-12.- En el instante indicado θ = 60° y la barra AB está sujeta a una aceleración de 4 m/seg^2 cuando la velocidad es de 8 m/seg. Determine en ese instante: a) usando el método de los centros instantáneos de velocidad nula, la velocidad angular de la barra CD y b) la aceleración angular de la barra CD.



P2-12

Solución

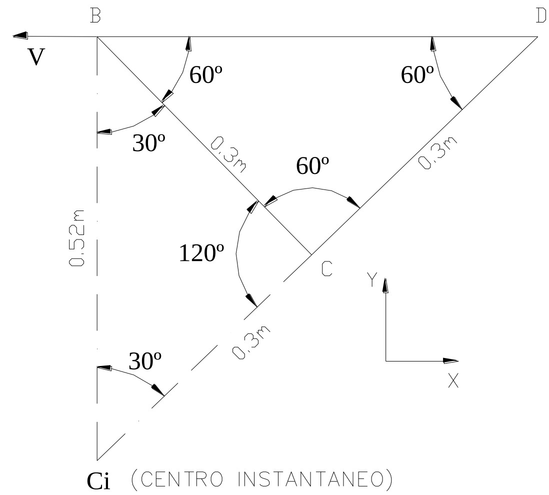
1).- Cálculo de la velocidad angular de la barra CD usando el método de los centros instantáneo de velocidad nula (ver figura P2-12a):

$$\omega_{BC} = \frac{V}{CiB} = \frac{8}{0.52} = 15.385 \quad \text{rad/seg}$$

$$V_C = \omega_{BC} CiC = 15.385 * 0.3 = 4.62 \text{ m/seg}$$

$$\omega_{CD} = \frac{V_C}{DC} = \frac{4.62}{0.3} = 15.385 \quad \text{rad/seg}$$

$$\bar{\omega}_{CD} \cong -15.4\,\bar{k} \quad \text{(rad/seg)}$$



P2-12a

2).- Cálculo de la aceleración angular de CD:

a).- Cálculo de la aceleración de C, tomando como punto base B:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \alpha_{BC}\bar{k}\ x\ \bar{r}_{BC} - \omega_{BC}^2 \bar{r}_{BC}$$

$$\bar{a}_C = 4\,\bar{i} + \alpha_{BC}\bar{k}\ x\ 0.3\left(\cos 60°\bar{i} - sen60°\,\bar{j}\right) - 15.4^2 * 0.3\left(\cos 60°\bar{i} - sen60°\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_C = \left(4 + 0.26\alpha_{BC} - 35.57\right)\bar{i} + \left(0.15\alpha_{BC} + 61.62\right)\bar{j} \qquad (1)$$

b).- Cálculo de la aceleración de C, tomando como punto base D:

$$\bar{a}_C = \alpha_{DC}\bar{k}x\bar{r}_{DC} - \omega_{DC}^2\bar{r}_{DC} = \alpha_{DC}\bar{k}x0.3\begin{pmatrix}-\cos 60°\bar{i} \\ -sen60°\,\bar{j}\end{pmatrix} - 15.4^2 * 0.3\begin{pmatrix}-\cos 60°\bar{i} \\ -sen60°\,\bar{j}\end{pmatrix}$$

$$\bar{a}_C = \left(0.26\alpha_{DC} + 35.57\right)\bar{i} - \left(0.15\alpha_{BC} - 61.62\right)\bar{j} \qquad (2)$$

(1) = (2) e igualando componentes:

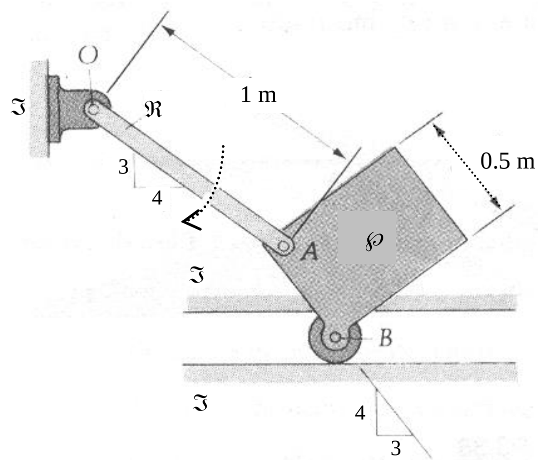
$$-31.57 + 0.26\alpha_{BC} = 0.26\alpha_{DC} + 35.57 \quad \rightarrow \quad 0.26\alpha_{BC} = 0.26\alpha_{DC} + 67.14 \qquad (3)$$

$$61.62 + 0.15\alpha_{BC} = -0.15\alpha_{DC} + 61.62 \quad \rightarrow \quad \alpha_{BC} = -\alpha_{DC} \qquad (4)$$

En (3) reemplazando (4):

$$-0.52\alpha_{DC} = 67.14 \quad \rightarrow \quad \alpha_{DC} = -129.11 \quad \text{rad/seg}^2$$

$\bar{\alpha}_{DC} = -129.11\,\bar{k}$ (rad/seg^2)



P2-13

2-13.- Usando el método de los centros instantáneos de velocidad nula, encuentre la velocidad del punto B en la figura, que está obligado a moverse en la guía mostrada. La velocidad de 𝔑 es 0.3 rad/seg (horario) en el instante indicado.

Solución

1).- Determinación del centro instantáneo de velocidad nula del bloque (ver figura P2-13a):

$r_{C\,iA} = 0.375$ m

$r_{C\,iB} = 0.175$ m

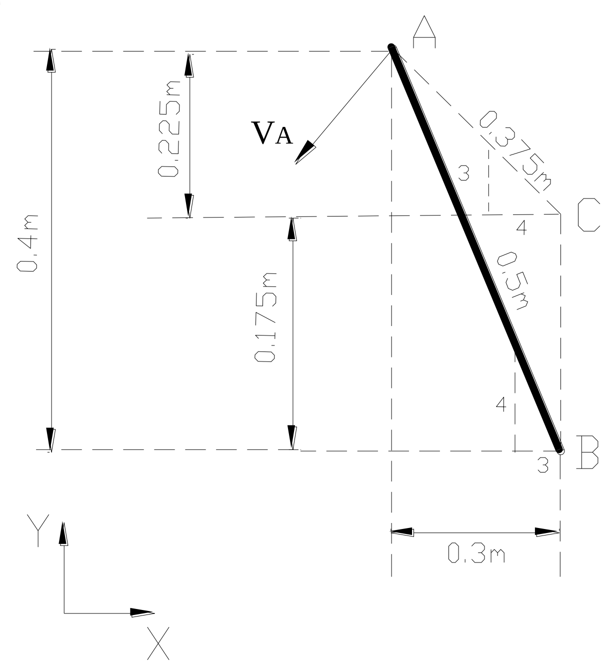
2).- Cálculo de la velocidad de A:

$V_A = \omega_1 r_{0A} = 0.3 * 1 = 0.3$ m/seg

3).- Cálculo de la velocidad angular de ℘:

$$\omega_2 = \frac{V_A}{r_{C\,iA}} = \frac{0.3}{0.375} = 0.8 \text{ rad/seg}$$

$\bar{\omega}_2 = 0.8\,\bar{k}$ (rad/seg)



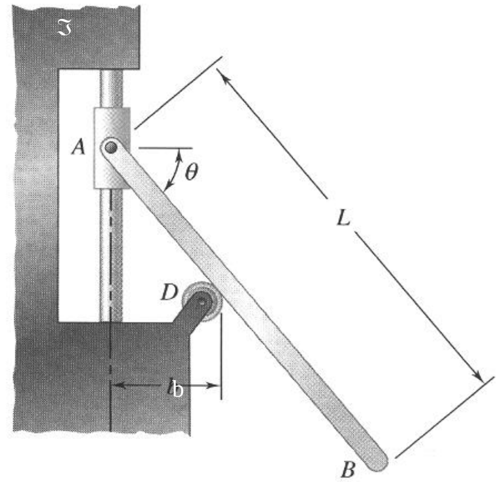
P2-13a

4).- Cálculo de la velocidad de B:

$V_B = r_{C\,iB}\ \omega_2 = 0.175 * 0.8 = 0.14$ m/seg

$\bar{V}_B = 0.14\,\bar{i}$ (m/seg)

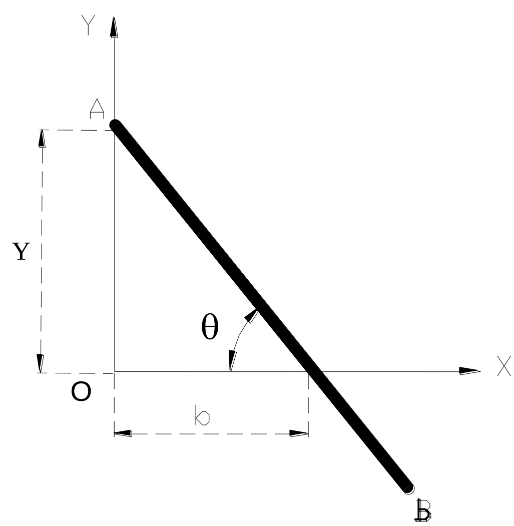
2-14.- En la figura representada, la corredera A sube con una velocidad constante V_A. Por el método escalar o análisis del movimiento plano en términos de un parámetro, deducir la expresión de la aceleración angular de la barra AB.



P2-14

Solución

1).- Representación grafica (ver figura P2-14a), para un instante cualquiera:



P2-14a

2).- Cálculo de la aceleración de la barra AB.-

Si:

$$tg\,\theta = \frac{Y_A}{b} \quad \rightarrow \quad Y_A = b\,tg\,\theta \qquad (1)$$

Derivando (1), dos veces respecto al tiempo:

$$\dot{Y}_A = b\sec^2\theta\,\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{V_A}{b}\cos^2\theta$$

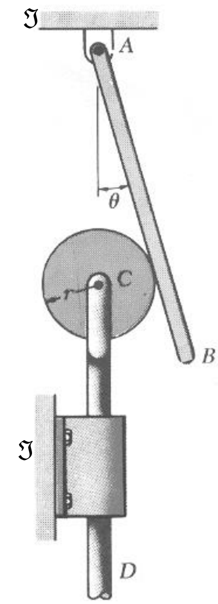
$$\ddot{Y}_A = b*2\sec^2\theta\,tg\,\theta\,\dot{\theta}^2 + b\sec^2\theta\,\ddot{\theta}$$

Para $\ddot{Y}_A = 0$:

$$2tg\,\theta\,\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} = -2\left(\frac{V_A}{b}\right)^2 \cos^4\theta\,\frac{sen\,\theta}{\cos\theta}$$

$$\alpha_{AB} = 2\left(\frac{V_A}{b}\right)^2 sen\theta \cos^3\theta \circlearrowleft$$ (Unid. de aceleración angular)



P2-15

2-15.- La posición de la barra AB se controla por medio de un disco de radio "r" que está unido a la horquilla CD. Si la horquilla se mueve verticalmente hacia arriba con una velocidad constante V_0, deduzca, una expresión para la velocidad angular de la barra y otra para la aceleración angular de la misma barra.

Solución

1).- Representación grafica (ver figura P2-15a), para un instante cualquiera:

$$sen\theta = \frac{r}{Y} \quad \rightarrow \quad Y = r\csc\theta \qquad (1)$$

2).- Derivando dos veces (1), respecto al tiempo:

$$\dot{Y} = -r\csc\theta\cot\theta\,\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \left(\frac{V_0}{r}\right) sen\theta\, tg\theta$$ (Unidades de velocidad angular)

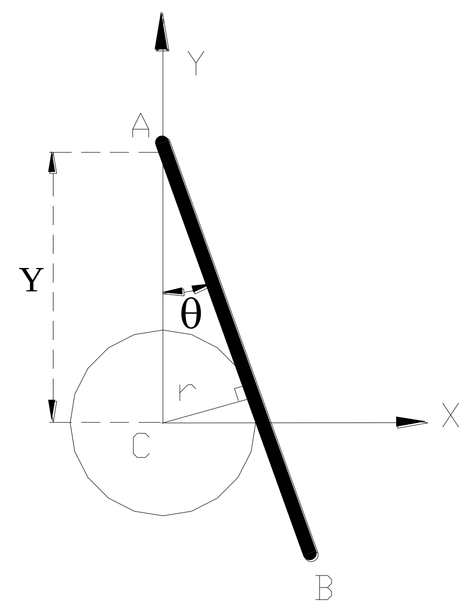
$$\ddot{Y} = r\csc\theta\cot^2\theta\,\dot{\theta}^2 + r\csc^3\theta\,\dot{\theta}^2 - r\csc\theta\cot\theta\,\ddot{\theta}$$

Para $\ddot{Y} = 0$:

$$0 = -\cot\theta\,\ddot{\theta} + \left(\cot^2\theta + \csc^2\theta\right)\left(\frac{V_0}{r} sen\theta\, tg\theta\right)^2$$

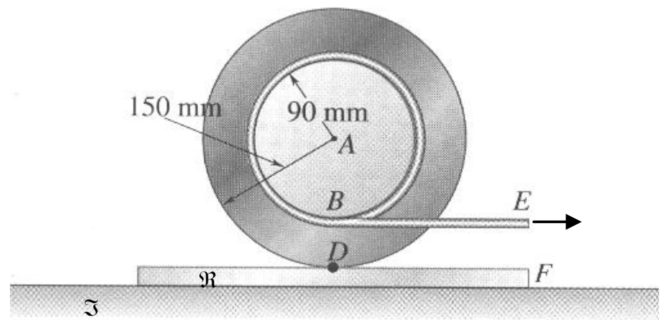
$$\ddot{\theta} = \left(\frac{V_0}{r}\right)^2 sen^2\theta\, tg^2\theta \left(\frac{\cos^2\theta + 1}{sen^2\theta}\right) tg\theta$$

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{V_0}{r}\right)^2 tg^3\theta\left(\cos^2\theta + 1\right)$$ (Unidades de aceleración angular)



P2-15a

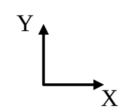
2-16.- Un tambor de radio 90 mm está montado sobre un cilindro de radio 150 mm, se arrolla sobre él una cuerda de cuyo extremo E se tira con una velocidad constante de 300 mm/seg, haciendo que el cilindro ruede sobre la placa $\mathfrak{R}$. Sabiendo que ésta se mueve hacia a la derecha con una velocidad constante de 180 mm/seg, calcular: a) la velocidad del centro del cilindro y b) la aceleración del punto D del cilindro.



P2-16

Solución

1).- Cálculo de la velocidad de A (movimiento de rodamiento):



Si:

$$\bar{V}_E = 0.3\,\bar{i} \text{ (m/seg)} \quad \text{y} \quad \bar{V}_D = 0.18\,\bar{i} \text{ (m/seg)}$$

$$\bar{V}_E = \bar{V}_D + \omega\,\bar{k}\ x\ \bar{r}_{DE}$$

$$0.3\,\bar{i} = 0.18\,\bar{i} + \omega\,\bar{k}\ x\ 0.06\,\bar{j} = (0.18 - 0.06\omega)\,\bar{i}$$

Igualando la componente en $\bar{i}$:

$$0.3 = 0.18 - 0.06\omega \qquad \rightarrow \qquad \omega = -2 \text{ rad/seg}$$

Luego:

$$\bar{V}_A = \bar{V}_D + \omega\,\bar{k}\ x\ \bar{r}_{DA} = 0.18\,\bar{i} - 2\bar{k}\ x\ 0.15\,\bar{j}$$

$$\bar{V}_A = 0.18\,\bar{i} + 0.3\,\bar{i} \quad \rightarrow \quad \bar{V}_A = 0.48\,\bar{i} \text{ (m/seg)} \quad \rightarrow \quad \left|\bar{V}_A\right| = 0.48 \text{ m/seg}$$

2).- Cálculo de la aceleración de D; si : $a_{Bt} = 0$ ($V_E \rightarrow$ cte) y $a_{Dt} = 0$ ($V_D \rightarrow$ cte):

$$\bar{a}_B = \overbrace{a_{B\,t}}^{0}\ \bar{e}_t + a_{B\,n}\bar{e}_n$$

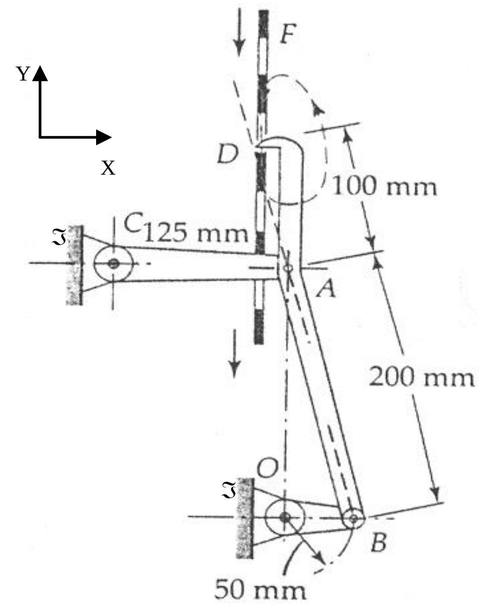
$$\bar{a}_D = \overbrace{a_{D\,t}}^{0}\ \bar{e}_t + a_{D\,n}\bar{e}_n$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_D + \alpha\,\bar{k}\ x\ \bar{r}_{DA} - \omega^2\bar{r}_{DA} \qquad \rightarrow \qquad a_A\,\bar{i} = a_{D\,n}\,\bar{j} - 0.15\alpha\,\bar{i} - 0.15x4\,\bar{j}$$

Igualando componentes:

$$a_{Dn} = 0.6 \text{ m/seg}^2 \quad \rightarrow \quad \bar{a}_D = 0.6\ \bar{j} \quad (\text{m/seg}^2)$$

2-17.- Un mecanismo intermitente para arrastre de cinta perforada consiste en la pieza DAB (B, A y D se encuentran en una línea) accionada por la manivela OB. La línea de trazos representa la trayectoria de la uña D. Hallar la aceleración de está, en el instante representada, en que OB y CA están ambos horizontales; si OB tiene una velocidad de rotación horaria constante de 120 RPM.



P2-17

Solución

1).- Cálculo de la velocidad de A y velocidad angular de DAB (ver figura P2-17a):

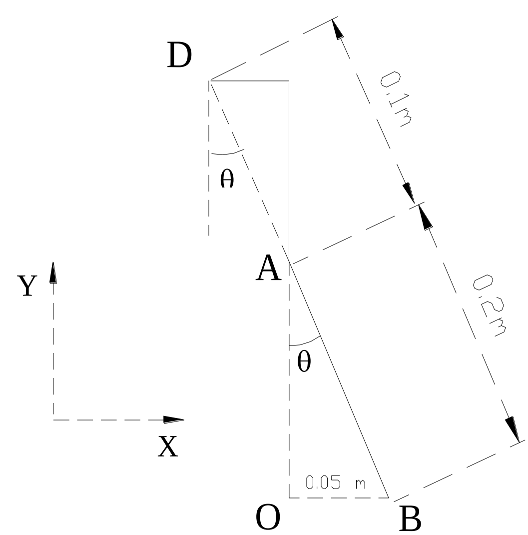
$$sen\theta = \frac{0.05}{0.2} \quad \rightarrow \quad \theta = 14.48°$$

$$\omega_{OB} = 120 * \frac{\pi}{30} = 4\pi = 12.566 \text{ rad/seg}$$

$$\bar{V}_B = -4\pi * 0.05\ \bar{j} = -0.6283\ \bar{j} \quad (\text{m/seg})$$

$$V_A \bar{j} = \bar{V}_B + \omega_{DAB}\bar{k}\ x\left(-0.05\,\bar{i} + 0.194\ \bar{j}\right)$$

$$V_A \bar{j} = -0.194\omega_{DAB}\bar{i} - \left(0.6283 + 0.05\omega_{DAB}\right)\bar{j}$$



P2-17a

Igualando componentes y operando:

$$0 = -0.194\omega_{DAB} \quad \rightarrow \quad \omega_{DAB} = 0$$

$$\therefore \quad \bar{V}_A = \bar{V}_B = -0.6283\ \bar{j} \quad (\text{m/seg})$$

$$\bar{\omega}_{CA} = -\frac{0.6283}{0.125}\bar{k} = -5.0264\ \bar{k} \quad (\text{ rad/seg })$$

2).- Cálculo de la aceleración angular de DAB y aceleración de D:

Si:

$$\bar{a}_B = -\frac{0.6283^2}{0.05}\,\bar{i} = -7.895\,\bar{i} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\vec{a}_A = \bar{a}_B + \alpha_{DAB}\bar{k}\ x\ \bar{r}_{BA}$$

$$-5.0264^2 * 0.125\,\bar{i} + a_{At}\,\bar{j} = -7.895\,\bar{i} + \alpha_{DAB}\bar{k}\ x\left(-0.05\,\bar{i} + 0.194\ \bar{j}\right)$$

$$-3.16\,\bar{i} + a_{At}\,\bar{j} = -\left(7.895 + 0.194\alpha_{DAB}\right)\bar{i} - 0.05\alpha_{DAB}\,\bar{j}$$

Igualando componentes y operando:

$$3.16 = 7.895 + 0.194\alpha_{DAB} \quad \rightarrow \quad \alpha_{DAB} = -24.4 \ \text{rad/seg}^2$$

$$a_{At} = 0.05 * 24.4 = 1.22 \ \text{m/seg}^2$$

$$\bar{a}_A = -3.16\,i + 1.22\ \bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

Luego:

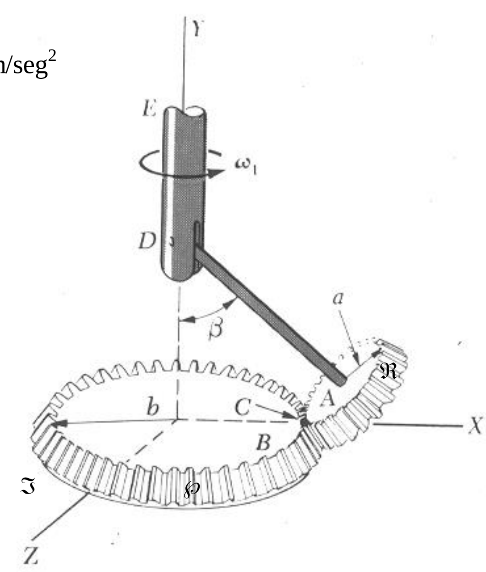
$$\bar{a}_D = \bar{a}_A + \alpha_{DAB}\bar{k}\ x\ \bar{r}_{AD}$$

$$\bar{a}_D = \left(-3.16\,\bar{i} + 1.22\ \bar{j}\right) - 24.4\,\bar{k}\ x\ 0.1\left(-sen14.48°\bar{i} + \cos 14.48°\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_D = \left(-3.16 + 2.36\right)\bar{i} + \left(1.22 + 0.61\right)\bar{j}$$

$$\bar{a}_D = -0.8\,\bar{i} + 1.83\ \bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)} \quad \rightarrow \quad \left|\bar{a}_D\right| = 1.997 \ \text{m/seg}^2$$

2-18.- El engranaje $\Re$ rueda sobre el engranaje fijo $\wp$ y gira alrededor del eje AD que está sujeto rígidamente en D al eje vertical DE. Sabiendo que el eje DE gira con una velocidad angular constante ω_1, determínese: a) la velocidad de giro del engranaje $\Re$ alrededor del eje AD, b) la aceleración angular del engranaje de $\Re$ y c) la aceleración del diente C del engranaje $\Re$.



Solución

1).- Cálculo de la velocidad angular del engranaje $\Re$ en $\Im$:

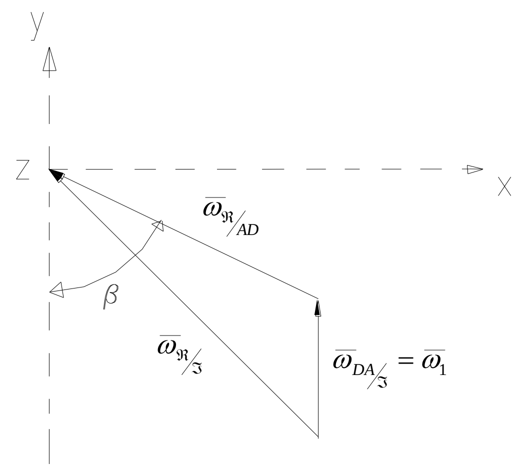
P2-18

Si:

$$\overline{V}_C = \overline{\omega}_{\Re/\Im} \, x \, \overline{r}_{DC} = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad \overline{\omega}_{\Re/\Im} \, // \, \overline{r}_{DC}$$

Por el teorema de adición (ver figura P2-18a):

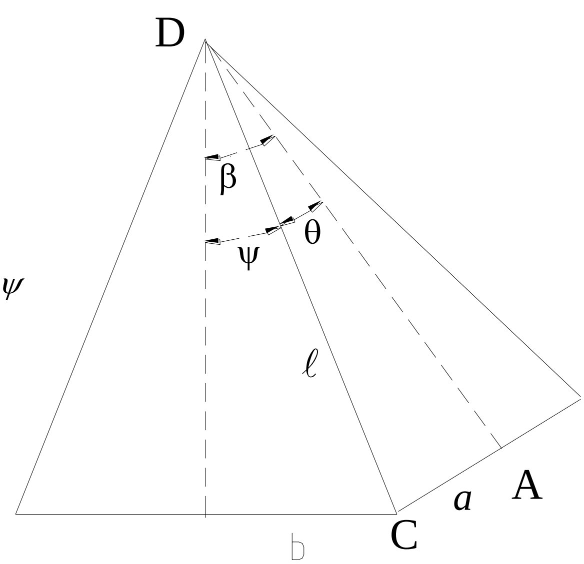
$$\overline{\omega}_{\Re/\Im} = \overline{\omega}_{DA/\Im} + \overline{\omega}_{\Re/AD} \qquad (1)$$



P2-18a

a).- Cálculos elementales (ver figura P2-18b):

$$\left. \begin{array}{l} sen\theta = \dfrac{a}{\ell} \ \rightarrow \ \ell = \dfrac{a}{sen\theta} \\ sen\psi = \dfrac{b}{\ell} \ \rightarrow \ \ell = \dfrac{b}{sen\psi} \end{array} \right\} \dfrac{a}{sen\theta} = \dfrac{b}{sen\psi}$$



P2-18b

y:

$$\beta = \psi + \theta$$

$$b \ sen\theta = a \ sen\psi \ \rightarrow \ b \ sen(\beta - \psi) = a \ sen\psi$$

Desarrollándole trigonométricamente:

$$b \ sen\beta \cos\psi - b \cos\beta \ sen\psi = a \ sen\psi$$

$$b \ sen\beta \cos\psi = sen\psi \, (b \cos\beta + a)$$

Luego:

$$tg\,\psi = \frac{b \ sen\beta}{(b \cos\beta + a)}$$

$$\therefore \quad sen\psi = b \ sen\beta \quad y \quad \cos\psi = b \cos\beta + a$$

b).- En (1):

$$\omega_{\Re/\Im}\left(-sen\psi\ \bar{i}+\cos\psi\ \bar{j}\right)=\omega_1\bar{j}+\omega_{\Re/DA}\left(-sen\beta\ \bar{i}+\cos\beta\ \bar{j}\right) \qquad (2)$$

Igualando componentes y operando:

$$-\omega_{\Re/\Im}sen\psi=-\omega_{\Re/DA}sen\beta \quad\rightarrow\quad \omega_{\Re/\Im}b\ sen\beta=\omega_{\Re/DA}sen\beta$$

$$b\ \omega_{\Re/\Im}=\omega_{\Re/DA} \qquad (3)$$

$$\omega_{\Re/\Im}\cos\psi=\omega_1+\omega_{\Re/DA}\cos\beta$$

$$\frac{\omega_{\Re/DA}}{b}\left(b\cos\beta+a\right)=\omega_1+\omega_{\Re/DA}\cos\beta \quad\rightarrow\quad \frac{a}{b}\omega_{\Re/DA}=\omega_1$$

$$\omega_{\Re/DA}=\frac{b}{a}\omega_1 \quad \text{(Unidades de velocidad angular)}$$

Luego de (3) y (2):

$$\bar{\omega}_{\Re/\Im}=\frac{\omega_1}{a}\left(-sen\psi\ \bar{i}+\cos\psi\ \bar{j}\right) \quad \text{(Unidades de velocidad angular)}$$

$$\bar{\omega}_{\Re/\Im}=-\frac{b}{a}\omega_1 sen\beta\ \bar{i}+\omega_1\left(\frac{b}{a}\cos\beta+1\right)\bar{j} \quad \text{(Unidades de velocidad angular)}$$

2).- Cálculo de la aceleración angular del engranaje $\Re$ en $\Im$:

Derivando (1), respecto al tiempo:

$$\dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im}=\overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{DA/\Im}}^{0}+\bar{\omega}_{DA/\Im}\ x\ \bar{\omega}_{\Re/DA}+\overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{\Re/DA}}^{0}$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{\Re/DA}=\bar{0} \quad \text{(por estar en función de } \omega_1 \text{ constante)}$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im}=\omega_1\bar{j}\ x\ \frac{b}{a}\omega_1\left(-sen\beta\ \bar{i}+\cos\beta\ \bar{j}\right)$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im} = \frac{b}{a}\omega_1^2 sen\beta\ \bar{k} \quad \text{(Unidades de aceleración)}$$

3).- Cálculo de la aceleración del diente C del engrane $\Re$.-

Si el movimiento de C es alrededor de un punto fijo D:

$$\bar{a}_C = \dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im}\, x\, \bar{r}_{DC} + \bar{\omega}_{\Re/\Im}\, x \left(\overbrace{\bar{\omega}_{\Re/\Im}\, x\, \bar{r}_{DC}}^{0} \right)$$

Si:

$$\bar{r}_{DC} = \ell \left(sen\psi\ \bar{i} - \cos\psi\ \bar{j} \right) \quad y \quad \ell = \frac{b}{sen\psi}$$

$$\bar{r}_{DC} = b\ \bar{i} - b\cot\psi\ \bar{j}$$

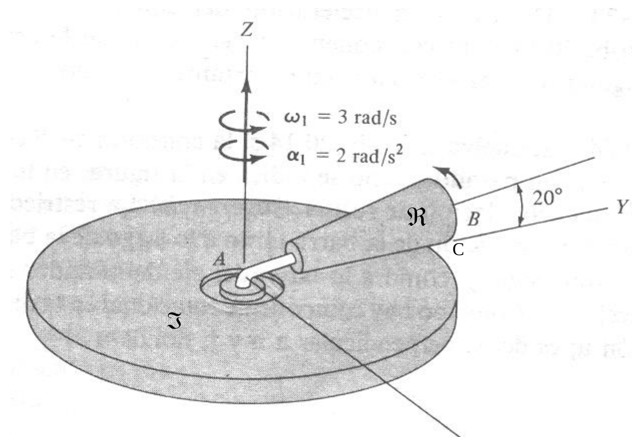
Luego:

$$\bar{a}_C = \frac{b}{a}\omega_1^2 sen\beta\ \bar{k}\ x \left(b\ \bar{i} - b\cot\psi\ \bar{j} \right)$$

$$\bar{a}_C = \frac{b^2}{a}\omega_1^2 sen\beta \left[\frac{(b\cos\beta + a)}{b\ sen\beta}\bar{i} + \bar{j} \right]$$

$$\bar{a}_C = \frac{b}{a}\omega_1^2 \left[(a + b\cos\beta)\ \bar{i} + b\ sen\beta\ \bar{j} \right] \quad \text{(Unidades de aceleración)}$$

2-19.- El carrete cónico $\Re$ rueda sobre la superficie de la placa. Si el eje AB tiene una velocidad angular de ω_1 = 3 rad/seg y una aceleración angular α_1 = 2 rad/seg^2 en el instante indicado, determine la velocidad angular y la aceleración angular del carrete en este instante.



P2-19

Solución

1).- Cálculo de la velocidad angular de $\Re$ respecto a $\Im$.-

a).- Si:

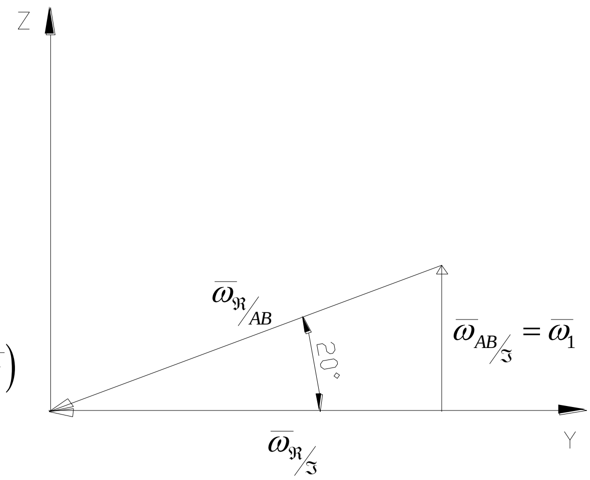
$$\bar{V}_C = \bar{0} = \bar{\omega}_{\Re/\Im} \; x \; \bar{r}_{AC} \quad \Rightarrow \quad \bar{\omega}_{\Re/\Im} \; // \; \bar{r}_{AC}$$

b).- Por el teorema de adición (ver figura P2-19a):

$$\bar{\omega}_{\Re/\Im} = \bar{\omega}_{AB/\Im} + \bar{\omega}_{\Re/AB} \qquad (1)$$

En (1):

$$-\omega_{\Re/\Im} \; \bar{j} = \omega_1 \; \bar{k} + \omega_{\Re/AB} \left(-\cos 20° \, \bar{j} - sen 20° \bar{k} \right)$$



P2-19a

Igualando componentes:

$$\omega_{\Re/\Im} = \omega_{\Re/AB} \cos 20° \quad \text{y} \quad \omega_1 = \omega_{\Re/AB} \, sen 20°$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{\Re/AB} = \frac{\omega_1}{sen 20°}$$

Luego:

$$\omega_{\Re/\Im} = \omega_1 \cot 20° = 3 \cot 20° = 8.2424 \quad \text{rad/seg} \quad \rightarrow \quad \bar{\omega}_{\Re/\Im} = -8.24 \; \bar{j} \quad \text{(rad/seg)}$$

2).- Cálculo de la aceleración angular de $\Re$ respecto a $\Im$:

Derivando (1) respecto al tiempo:

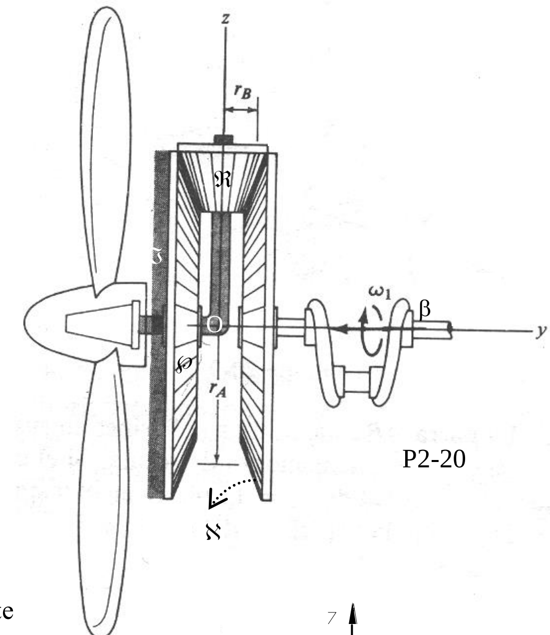
$$\dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im} = \dot{\bar{\omega}}_{AB/\Im} + \bar{\omega}_{AB/\Im} \; x \; \bar{\omega}_{\Re/AB} + \dot{\bar{\omega}}_{\Re/AB}$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im} = \alpha_1 \bar{k} + \omega_1 \bar{k} \; x \; \frac{\omega_1}{sen 20°} \left(-\cos 20° \, \bar{j} - sen 20° \bar{k} \right) + \frac{\alpha_1}{sen \, 20°} \left(-\cos 20° \, \bar{j} - sen 20° \bar{k} \right)$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im} = 2 \; \bar{k} + 3\bar{k} \; x \; 3\left(-\cot 20° \, \bar{j} - \bar{k} \right) - 2 \cot 20° \, \bar{j} - 2 \; \bar{k} = 9 \cot 20° \bar{i} - 2 \cot 20° \, \bar{j}$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im} = 24.73 \, \bar{i} - 5.495 \, \bar{j} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)} \quad \rightarrow \quad \left| \dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im} \right| = 25.33 \quad \text{rad/seg}^2$$

2-20.- El engranaje ℵ está fijo al cigüeñal β, mientras que el engranaje ℘ está fijo a ℑ, y el engranaje ℜ está libre para girar. Si el cigüeñal está girando con ω_1 = 80 rad/seg alrededor de su eje, determine las magnitudes de la velocidad angular de la hélice y la aceleración angular de ℜ. Si r_A = 0.4 pies y r_B = 0.1 pies.



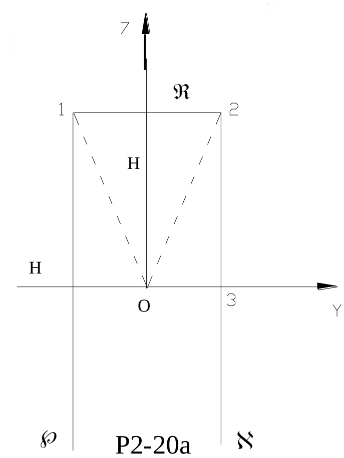
P2-20

Solución

1).- Cálculo de la velocidad angular de la hélice:

Si el engranaje ℜ, tiene un movimiento alrededor de un punto fijo "O" (ver figura P2-20a):

a).- Cálculo de la velocidad de "1" y "2" como parte de ℜ :



P2-20a

$$\bar{V}_1 = \bar{0} = \bar{\omega}_{\Re/\Im}\, x\, \bar{r}_{01} = \left(\bar{\omega}_{\Re/H} + \bar{\omega}_{H/\Im}\right) x\, \bar{r}_{01}$$

$$\bar{V}_1 = \left(\omega_{\Re/H}\,\bar{k} + \omega_{H/\Im}\,\bar{j}\right) x \left(-0.1\bar{j} + 0.4\,\bar{k}\right)$$

$$\bar{V}_1 = \left(0.1\omega_{\Re/H} + 0.4\omega_{H/\Im}\right)\bar{i}$$

Luego:

$$0.1\omega_{\Re/H} + 0.4\omega_{H/\Im} = 0 \qquad (1)$$

$$\bar{V}_2 = \bar{\omega}_{\Re/\Im}\, x\, \bar{r}_{02} = \left(\bar{\omega}_{\Re/H} + \bar{\omega}_{H/\Im}\right) x\, \bar{r}_{02} \quad \rightarrow \quad \bar{V}_2 = \left(\omega_{\Re/H}\,\bar{k} + \omega_{H/\Im}\,\bar{j}\right) x \left(0.1\bar{j} + 0.4\bar{k}\right)$$

$$\bar{V}_2 = \left(-0.1\omega_{\Re/H} + 0.4\omega_{H/\Im}\right)\bar{i} \qquad (2)$$

b).- Cálculo de la velocidad de "2" como parte de ℵ:

$$\bar{V}_2 = \bar{\omega}_{\aleph/\Im}\, x\, \bar{r}_{32} = -\omega_1\,\bar{j}\ x\ r_A\bar{k} = -80\,\bar{j}\ x\ 0.4\,\bar{k} = -32\,\bar{i} \quad \text{(pie/seg)} \qquad (3)$$

(2) = (3):

$$-0.1\omega_{\Re/H} + 0.4\omega_{H/\Im} = -32 \qquad (4)$$

c).- Resolviendo las ecuaciones (1) y (4):

$$0.1\omega_{\Re/H} + 0.4\omega_{H/\Im} = 0$$

$$\underline{-0.1\omega_{\Re/H} + 0.4\omega_{H/\Im} = -32}$$

$$0.8\omega_{H/\Im} = -32 \quad \rightarrow \quad \omega_{H/\Im} = -40 \ \text{rad/seg}$$

En (1):

$$\omega_{\Re/H} = -4\omega_{H/\Im} = 160 \ \text{(rad/seg); luego} \ \bar{\omega}_{\Re/\Im} = -40\ \bar{j} + 160\ \bar{k} \ \text{(rad/seg)}$$

La velocidad angular de la hélice es:

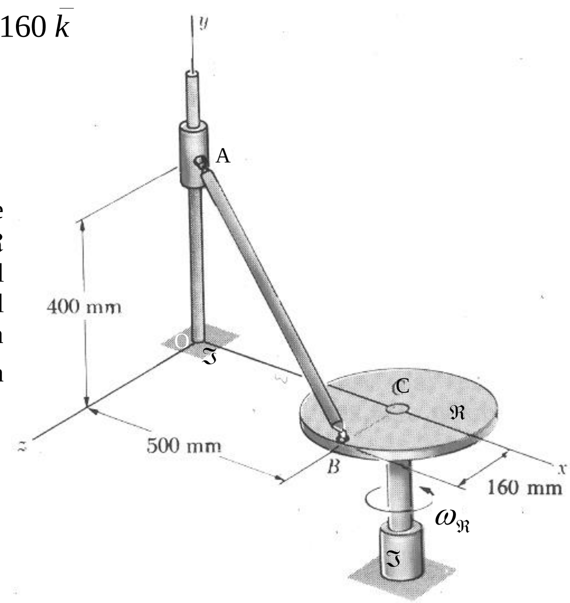
$$\bar{\omega}_{H/\Im} = -40\ \bar{j} \ \text{(rad/seg)}$$

2).- Cálculo de la aceleración angular del engranaje $\Re$ en $\Im$:

$$\dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im} = \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{\Re/H}}^{0} + \bar{\omega}_{H/\Im}\ x\ \bar{\omega}_{\Re/H} + \overbrace{\bar{\omega}_{H/\Im}}^{0} = -40\ \bar{j}\ x\ 160\ \bar{k}$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im} = -6400\ \bar{i} \ \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

2-21.- La barra AB está unida mediante articulaciones esféricas al collarín A y al disco $\Re$ giratorio de 320 mm de diámetro. Sabiendo que el disco gira en el plano ZX en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, a una velocidad constante $\omega_{\Re}$ = 4 rad/seg, determine la velocidad del collarín A.



P2-21

Solución

De la figura $A(0,0.4,0) \ \ y \ \ B(0.5,0,0.16)$

1).- Cálculo de la velocidad de B:

$\bar{V}_B = \bar{\omega}_{\Re} x\ \bar{r}_{CB} = 4\bar{j}\ x\ 0.16\ \bar{k} = 0.64\ \bar{i}$ (m/seg)

2).- Cálculo de la velocidad de A:

Si: $\bar{V}_A = V_A\ \bar{j}$

a).- La velocidad angular de AB, considerando que ω_n es la única que actúa en AB:

$$\bar{V}_A = \bar{V}_B + \bar{\omega}_n x\ \bar{r}_{BA} = 0.64\ \bar{i} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_X & \omega_Y & \omega_Z \\ -0.5 & 0.4 & -0.16 \end{vmatrix}$$

$$V_A \bar{j} = (0.64 - 0.16\omega_Y - 0.4\omega_Z)\,\bar{i} - (0.5\omega_Z - 0.16\omega_X)\,\bar{j} + (0.4\omega_X + 0.5\omega_Y)\,\bar{k}$$

Igualando componentes y operando:

$$0.16\omega_Y + 0.4\omega_Z = 0.64 \quad \rightarrow \quad \omega_Z = 1.6 - 0.4\omega_Y \qquad (1)$$

$$0.16\omega_X - 0.5\omega_Z = V_A \qquad (2)$$

$$0.4\omega_X + 0.5\omega_Y = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_X = -\frac{5}{4}\omega_Y \qquad (3)$$

b).- Si: $\bar{\omega}_n . \bar{r}_{BA} = 0$

$$(\omega_X \bar{i} + \omega_Y \bar{j} + \omega_Z \bar{k}) \cdot (-0.5\ \bar{i} + 0.4\bar{j} - 0.16\ \bar{k}) = 0$$

$$-0.5\omega_X + 0.4\omega_Y - 0.16\omega_Z = 0 \qquad (4)$$

(1) y (3) en (4):

$$0.625\omega_Y + 0.4\omega_Y - 0.256 + 0.064\omega_Y = 0$$

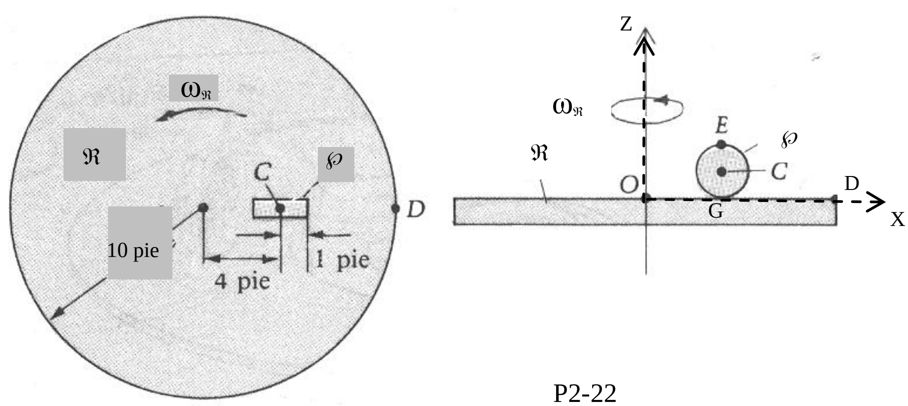
$1.089\omega_Y = 0.256 \quad \rightarrow \quad \omega_Y = 0.235$ rad/seg

En (1): $\omega_Z = 1.506$ rad/seg

En (3): $\omega_X = -0.294$ rad/seg

En (2): $V_A = -0.8$ m/seg $\rightarrow$ $\bar{V}_A = -0.8\ \bar{j}$ (m/seg)

2-22.- El disco $\Re$ en la figura gira a $\omega_{\Re}$ = 10 rad/seg en sentido antihorario (mirando desde arriba su superficie horizontal). Un disco $\wp$ más pequeño rueda radialmente hacia fuera a lo largo de un radio OD de $\Re$. En el instante mostrado, el centro C de $\wp$ está a 4 pies del eje de rotación de $\Re$, y está distancia crece a razón de 2 pies/seg. Determine la velocidad y aceleración del punto E que se encuentra en la parte superior de $\wp$ en el instante dado.



P2-22

Solución

El cuerpo $\wp$ tiene un movimiento general en el espacio:

1).- Cálculo del movimiento angular de $\wp$.-

a).- Cálculo de la velocidad angular de $\wp$ respecto al marco inercial:

i).- $\bar{V}_G = \bar{\omega}_{\Re} x\ \bar{r}_{OG} = 10\ \bar{k}\ x\ 4\ \bar{i} = 40\ \bar{j}$ (pie/seg)

ii).- $\bar{V}_C = \dot{\rho}\ \bar{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\ \bar{e}_\phi = 2\ \bar{i} + 4*10\ \bar{j} = 2\ \bar{i} + 40\ \bar{j}$ (pie/seg) (1)

$$\bar{V}_C = \bar{V}_G + \bar{\omega}_{\wp/\Im} x\ \bar{r}_{GC} = 40\bar{j} + \left(\bar{\omega}_{\Re} + \bar{\omega}_{\wp/\Re}\right) x\bar{k}$$

$$\bar{V}_C = 40\ \bar{j} + \left(10\ \bar{k} + \omega_{\wp/\Re}\ \bar{j}\right) x\ \bar{k} = \omega_{\wp/\Re}\ \bar{i} + 40\ \bar{j} \qquad (2)$$

(1) = (2):

$\omega_{\wp/\Re} = 2 \quad \rightarrow \quad \bar{\omega}_{\wp/\Re} = 2\ \bar{j}$ (rad/seg)

$\therefore \quad \bar{\omega}_{\wp/\Im} = 2\ \bar{j} + 10\ \bar{k}$ (rad/seg) b).- Cálculo de la aceleración angular de $\wp$:

$$\dot{\bar{\omega}}_{\wp/\Im} = \bar{\alpha}_{\wp} = \underbrace{\dot{\bar{\omega}}_{\Re}}_{0} + \bar{\omega}_{\Re} x\ \bar{\omega}_{\wp/\Re} + \underbrace{\dot{\bar{\omega}}_{\wp/\Re}}_{0} = 10\ \bar{k}\ x\ 2\ \bar{j} = -20\ \bar{i} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

2).- Cálculo de la velocidad de E, respecto al marco inercial:

$$\bar{V}_E = \bar{V}_C + \bar{\omega}_{\wp/\Im} x\ \bar{r}_{CE} = 2\ \bar{i} + 40\ \bar{j} + \left(2\ \bar{j} + 10\ \bar{k}\right) x\ \bar{k}$$

$$\bar{V}_E = 4\ \bar{i} + 40\ \bar{j} \quad \text{(pie/seg)}$$

3).- Cálculo de la aceleración de E.-

Si:

$$\bar{a}_C = \left(\underbrace{\ddot{\rho}}_{0} - \rho\dot{\phi}^2\right)\bar{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\underbrace{\ddot{\phi}}_{0}\right)\bar{e}_\phi = -400\ \bar{i} + 40\ \bar{j} \quad \text{(pie/seg}^2\text{)}$$

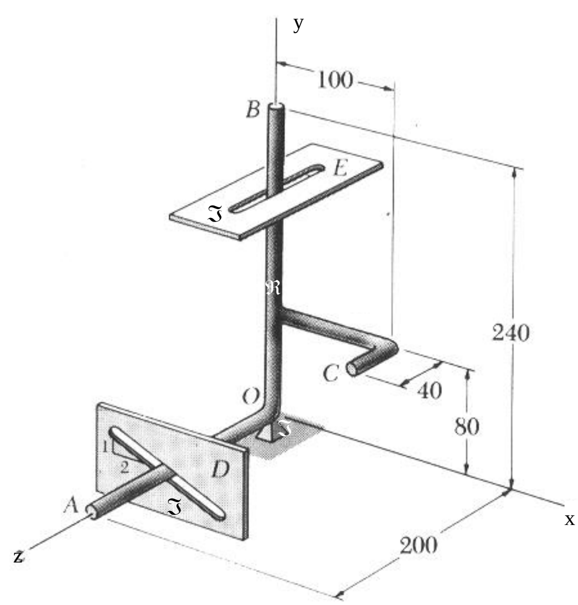
Luego:

$$\bar{a}_E = \bar{a}_C + \bar{\alpha}_{\Re} x\ \bar{r}_{CE} + \bar{\omega}_{\wp/\Im} x \left(\bar{\omega}_{\wp/\Im} x\ \bar{r}_{CE}\right)$$

$$\bar{a}_E = -400\ \bar{i} + 40\ \bar{j} - 20\ \bar{i}\ x\ \bar{k} + \left(2\ \bar{j} + 10\ \bar{k}\right) x \left[\underbrace{\left(2\ \bar{j} + 10\ \bar{k}\right) x\ \bar{k}}_{2\bar{i}}\right]$$

$$\bar{a}_E = -400\ \bar{i} + 80\ \bar{j} - 4\ \bar{k} \quad \text{(pie/seg}^2\text{)}$$

2-23.- Varias barras se sueldan juntas para formar el brazo guía del robot mostrado en la figura, que está unido a una articulación esférica en O. La barra OA desliza en una ranura recta inclinada, mientras la barra OB desliza en una ranura paralela al eje Z. Sabiendo que en el instante mostrado $\bar{V}_B = 180\ \bar{k}$ (mm/seg) constante, determine: a) la velocidad angular del brazo guía, b) la aceleración angular del brazo guía y c) la aceleración de C. (dimensiones en mm).



P2-23

Solución

Se trata de un movimiento del cuerpo rígido alrededor de un punto fijo en $\Im$:

1).- Cálculo de la velocidad angular del cuerpo:

Si:

$$\bar{V}_B = 0.18\,\bar{k} = \bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{OB}$$

$$\bar{V}_B = \left(\omega_X\,\bar{i} + \omega_Y\,\bar{j} + \omega_Z\,\bar{k}\right) x\ 0.24\ \bar{j} \quad \rightarrow \quad 0.18\,\bar{k} = -0.24\omega_Z\,\bar{i} + 0.24\omega_X\,\bar{k}$$

Igualando componentes y operando:

$$0 = -0.24\omega_Z \quad \rightarrow \quad \omega_Z = 0$$

$$0.18 = 0.24\omega_X \quad \rightarrow \quad \omega_X = 0.75 \ \text{rad/seg}$$

También:

$$\bar{V}_A = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2\,\bar{i} + \bar{j}\right)V_A \quad \text{y} \quad \bar{V}_A = \bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{OA}$$

$$\bar{V}_A = \left(0.75\,\bar{i} + \omega_Y\,\bar{j}\right) x\ 0.2\,\bar{k}$$

Igualando componentes y operando:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}V_A = -0.2x0.75 \quad \rightarrow \quad V_A = -0.335 \ \text{m/seg}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}V_A = 0.2\omega_Y \quad \rightarrow \quad \omega_Y = 1.5 \ \text{rad/seg}$$

Luego:

$$\bar{\omega} = 0.75\,\bar{i} + 1.5\,\bar{j} \quad \text{(rad/seg)}$$

2).- Cálculo de la aceleración angular del brazo guía $\Re$:

a).- Si: $\bar{a}_B = -\dfrac{0.18^2}{0.24}\,\bar{j} = -0.135\,\bar{j}$ (m/seg^2) (1)

Además:

$$\bar{a}_B = \bar{\alpha}\ x\ \bar{r}_{OB} + \bar{\omega}\ x\left(\bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{OB}\right) \quad (2)$$

$$\bar{\alpha} \ x \ \bar{r}_{OB} = \left(\alpha_X \bar{i} + \alpha_Y \bar{j} + \alpha_Z \bar{k}\right) x \ 0.24 \ \bar{j} = -0.24\alpha_Z \bar{i} + 0.24\alpha_X \bar{k}$$

$$\bar{\omega} \ x \left(\overbrace{\bar{\omega} \ x \ \bar{r}_{OB}}^{\bar{V}_B} \right) = \left(0.75 \ \bar{i} + 1.5 \ \bar{j}\right) x \ 0.18 \ \bar{k} = 0.27 \ \bar{i} - 0.135 \ \bar{j}$$

En (1) y (2):

$$-0.135 \ \bar{j} = \left(0.27 - 0.24\alpha_Z\right)\bar{i} - 0.135 \ \bar{j} + 0.24\alpha_X \bar{k}$$

Igualando componentes y operando:

$$0 = 0.27 - 0.24\alpha_Z \qquad \rightarrow \qquad \alpha_Z = 1.125 \ \text{rad/seg}^2$$

$$0 = 0.24\alpha_X \qquad \rightarrow \qquad \alpha_X = 0$$

b).-Si: $\bar{a}_A = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(-2 \ \bar{i} + \bar{j}\right) a_t - a_n \bar{k}$ (3)

Además:

$$\bar{a}_A = \bar{\alpha} \ x \ \bar{r}_{OA} + \bar{\omega} \ x \left(\bar{\omega} \ x \ \bar{r}_{OB}\right) \tag{4}$$

$$\bar{\alpha} \ x \ \bar{r}_{OA} = \left(\alpha_Y \bar{j} + 1.125 \ \bar{k}\right) x \ 0.2 \ \bar{k} = 0.2\alpha_Y \ \bar{i}$$

$$\bar{\omega} \ x \ \bar{r}_{OA} = \left(0.75 \ \bar{i} + 1.5 \ \bar{j}\right) x \ 0.2 \ \bar{k} = 0.3 \ \bar{i} - 0.15 \ \bar{j}$$

$$\bar{\omega} \ x \ \overbrace{\left(\bar{\omega} \ x \ \bar{r}_{OA}\right)}^{\bar{V}_A} = \left(0.75 \ \bar{i} + 1.5 \ \bar{j}\right) x \left(0.3 \ \bar{i} - 0.15 \ \bar{j}\right) = -0.5625 \ \bar{k}$$

En (3) y (4):

$$a_t \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2 \ \bar{i} + \bar{j}\right) - a_n \bar{k} = 0.2\alpha_Y \bar{i} - 0.5625 \ \bar{k}$$

Igualando componentes y operando:

$$\frac{a_t}{\sqrt{5}} = 0 \quad \rightarrow \quad a_t = 0 \quad \text{y} \quad -\frac{2a_t}{\sqrt{5}} = 0.2\alpha_Y \quad \rightarrow \quad \alpha_Y = 0 \ \text{rad/seg}^2$$

$$\therefore \ \bar{\alpha} = 1.125 \ \bar{k} \ (\text{rad/seg}^2)$$

3).- Cálculo de la aceleración de C:

$$\bar{a}_C = \bar{\alpha}\ x\ \bar{r}_{OC} + \bar{\omega}\ x\ (\bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{OC}) \qquad (5)$$

$$\bar{\alpha}\ x\ \bar{r}_{OC} = 1.125\ \bar{k}\ x\ (0.1\,\bar{i} + 0.08\,\bar{j} + 0.04\ \bar{k}) = -0.09\ \bar{i} + 0.1125\ \bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{OC} = (0.75\ \bar{i} + 1.5\,\bar{j})\ x\ (0.1\,\bar{i} + 0.08\,\bar{j} + 0.04\ \bar{k})$$

$$\bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{OC} = 0.06\,\bar{i} - 0.03\ \bar{j} - 0.09\ \bar{k} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{\omega}\ x(\bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{OC}) = (0.75\ \bar{i} + 1.5\ \bar{j})\ x\ (0.06\ \bar{i} - 0.03\ \bar{j} - 0.09\ \bar{k})$$

$$\bar{\omega}\ x(\bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{OC}) = -0.135\,\bar{i} + 0.0675\ \bar{j} - 0.1125\,\bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

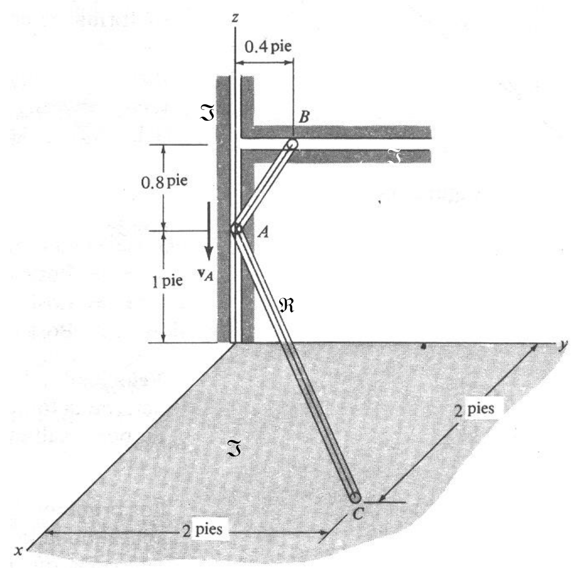
Luego:

$$\bar{a}_C = (-0.09 - 0.135)\,\bar{i} + (0.1125 + 0.0675)\ \bar{j} - 0.1125\,\bar{k}$$

$$\bar{a}_C = -0.225\ \bar{i} + 0.18\ \bar{j} - 0.1125\,\bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$|\bar{a}_C| = 0.309 \quad \text{m/seg}^2$$

2-24.- El extremo C de la barra doblada se apoya sobre el plano horizontal mientras que los puntos extremos A y B están restringidos a moverse a lo largo de ranuras. Si en el instante indicado A se está moviendo hacia abajo con una rapidez de V_A = 4 pies/seg, determine la velocidad angular de la barra y las velocidades de los puntos B y C.



P2-24

Solución

1).- Cálculo de la velocidad de B, tomando como punto base o conveniente a A:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{\omega}_{\Re/\Im}\ x\ \bar{r}_{AB} = -4\ \bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_X & \omega_Y & \omega_Z \\ 0 & 0.4 & 0.8 \end{vmatrix}$$

$$V_B \bar{j} = (0.8\omega_Y - 0.4\omega_Z)\bar{i} - 0.8\omega_X \bar{j} + (0.4\omega_X - 4)\bar{k}$$

Igualando componentes y operando:

$$0.8\omega_Y - 0.4\omega_Z = 0 \qquad (1)$$

$$-0.8\omega_X = V_B \qquad (2)$$

$$0.4\omega_X - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_X = 10 \text{ rad/seg}$$

En (2):

$$V_B = -8 \text{ pie/seg} \quad \rightarrow \quad \bar{V}_B = -8\,\bar{j} \text{ (pie/seg)}$$

2).- Cálculo de la velocidad de C, tomando como punto base o conveniente A:

$$\bar{V}_C = \bar{V}_A + \bar{\omega}_{\Re/\Im} x\, \bar{r}_{AC} = -4\,\bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_X & \omega_Y & \omega_Z \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$V_{CX}\bar{i} + V_{CY}\bar{j} = -(\omega_Y + 2\omega_Z)\bar{i} + (2\omega_Z + \omega_X)\,\bar{j} + (2\omega_X - 2\omega_Y - 4)\bar{k}$$

Igualando componentes y operando:

$$V_{CX} = -(\omega_X + 2\omega_Z) \qquad (3)$$

$$V_{CY} = 2\omega_Z + \omega_X \qquad (4)$$

$$0 = 2\omega_X - 2\omega_Y - 4 = 20 - 2\omega_Y - 4 \quad \rightarrow \quad \omega_Y = 8 \text{ rad/seg}$$

En (1):

$$0.8 * 8 = 0.4\omega_Z \quad \rightarrow \quad \omega_Z = 16 \text{ rad/seg}$$

Luego:

$$\bar{\omega}_{\Re/\Im} = 10\,\bar{i} + 8\,\bar{j} + 16\,\bar{k} \text{ (rad/seg)}$$

En (3):

$$V_{CX} = -(8+32) = -40 \text{ pie/seg}$$

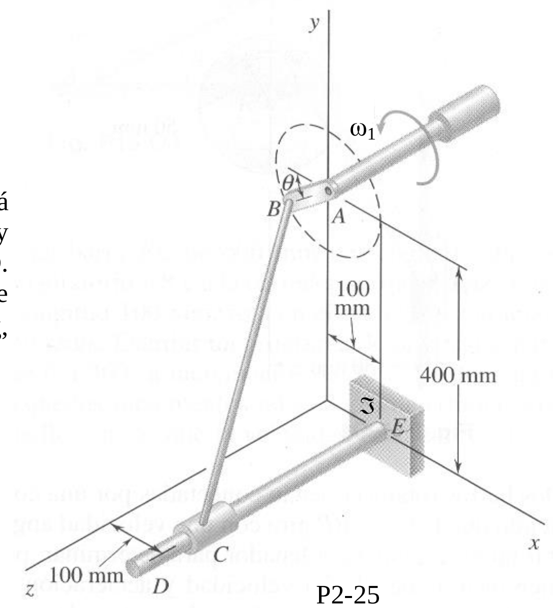
En (4):

$$V_{CY} = 2*16+10 = 42 \text{ pie/seg}$$

Luego:

$$\bar{V}_C = -40\,\bar{i} + 42\,\bar{j} \text{ (pie/seg)}$$

2-25.- La varilla BC de longitud 600 mm está conectada mediante rótulas a un brazo rotatorio AB y a una corredera C que desliza por la guía fija ED. Sabiendo que la longitud de AB es 100 mm y que éste gira a la velocidad constante ω_1 = 10 rad/seg, hallar la velocidad de la corredera C cuando θ = 90°.



P2-25

Solución

De la figura, para θ = 90°:

$$B(0{,}0.3{,}0) \;\; y \;\; C(0.1{,}0{,}Z) \text{ m}$$

$$\overline{CB} = 0.1\,\bar{i} - 0.3\,\bar{j} + Z\,\bar{k}$$

$$0.6^2 = 0.1^2 + 0.3^2 + Z^2$$

$$Z = 0.51 \text{ m}$$

1).- Cálculo de la velocidad de B:

$$\bar{V}_B = \bar{\omega}_1 x\,\bar{r}_{AB} = 10\,\bar{k}\; x(-0.1\,\bar{j}) = \bar{i} \text{ (m/seg)}$$

2).- Cálculo de la velocidad de C, tomando como punto base o conveniente B:

a).- Si:

$$\bar{V}_C = V_C\bar{k} = \bar{V}_B + \bar{\omega}_{AB} x\,\bar{r}_{BC} = \bar{i} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_X & \omega_Y & \omega_Z \\ 0.1 & -0.3 & 0.51 \end{vmatrix}$$

Resolviendo e igualando componentes:

$$0 = 1 + 0.51\omega_Y + 0.3\omega_Z \quad (1)$$

$$0 = 0.1\omega_Z - 0.51\omega_X \quad \rightarrow \quad \omega_Z = 5.1\omega_X \quad (2)$$

$$V_C = -0.3\omega_X - 0.1\omega_Y \quad (3)$$

(2) en (1):

$$\omega_Y = -3\omega_X - 1.96 \quad (4)$$

b).- Si el movimiento angular es perpendicular a CB:

$$\bar{\omega}_{AB} \cdot \bar{r}_{BC} = 0$$

$$\left(\omega_X \bar{i} + \omega_Y \bar{j} + \omega_Z \bar{k}\right) \cdot \left(0.1\,\bar{i} - 0.3\,\bar{j} + 0.51\,\bar{k}\right) = 0$$

$$0.1\omega_X - 0.3\omega_Y + 0.51\omega_Z = 0 \quad (5)$$

Reemplazando en (5), (2) y (4):

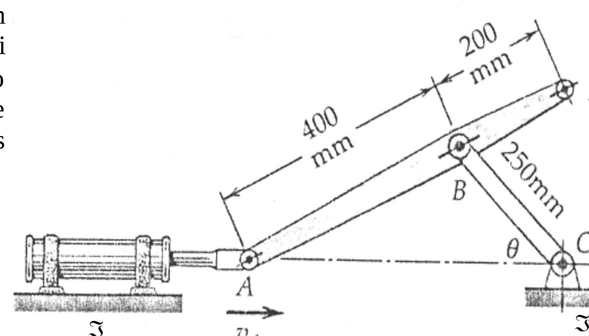
$$0.1\omega_X + 0.9\omega_X + 0.588 + 2.601\omega_X = 0 \quad \rightarrow \quad 3.601\omega_X = -0.588$$

$\omega_X = -0.163$ rad/seg

En (4):
$\omega_Y = 0.489 - 1.96 = -1.471$ rad/seg

En (3):
$V_C = 0.3 * 0.163 + 0.1 * 1.471 = 0.196$ m/seg $\rightarrow$ $\bar{V}_C = 0.196\,\bar{k}$ (m/seg)

2-26.- El cilindro hidráulico produce un movimiento horizontal limitado del punto A. Si V_A = 4 m/seg cuando θ = 45°, hallar el módulo de la velocidad de D y la velocidad angular de ABD para está posición; usando el método de los centros instantáneos de velocidad nula.



P2-26

Solución

1).- Determinación del centro instantáneo de velocidad nula y cálculos elementales (ver figura P2-26a).-

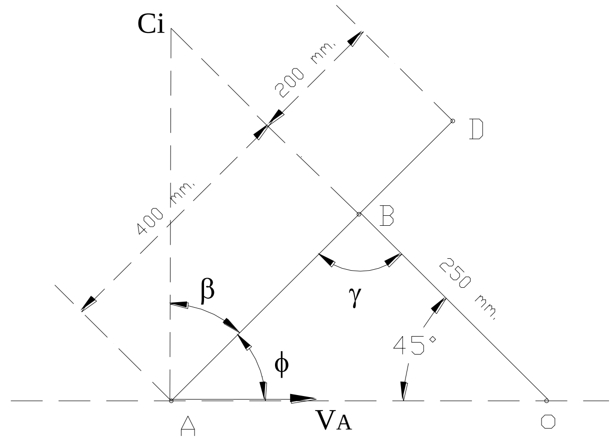
a).- Por la ley de senos:

$$\frac{sen\phi}{0.25} = \frac{sen45°}{0.4} \quad \rightarrow \quad sen\phi = \frac{0.25}{0.4} * \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \quad \phi = 26.23° \quad y \quad \gamma = 108.77°$$

Luego:

$$\beta = 90 - 26.23 = 63.77°$$



P2-26a

b).- Por ley de cósenos:

$$AO^2 = 0.4^2 + 0.25^2 - 2 * 0.4 * 0.25 \cos 108.77°$$

$$AO = 0.536 \text{ m}$$

$$C_i A = 0.536 \text{ m}$$

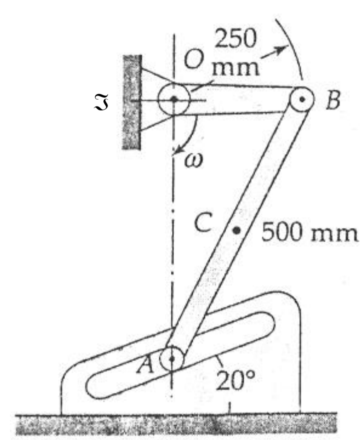
$$C_i D^2 = 0.536^2 + (0.4 + 0.2)^2 - 2 * 0.536 * 0.6 \cos 63.77° \quad \rightarrow \quad C_i D = 0.603 \text{ m}$$

2).- Cálculo de los movimientos pedidos:

$$\omega_{ABD} = \frac{V_A}{C_i A} = \frac{4}{0.536} = 7.46 \text{ rad/seg}$$

$$V_D = \omega_{ABD} C_i D = 7.46 * 0.603 = 4.5 \text{ m/seg}$$

2-27.- En el instante representado, la manivela OB tiene una velocidad angular horaria ω = 0.8 rad/seg y se encuentra en posición horizontal. Hallar las correspondientes magnitudes de la velocidad del rodillo A en la ranura de 20° y de la velocidad del punto C equidistante de A y B, usando el método de los centros instantáneos de velocidad nula.



P2-27

Solución

1).- Determinación del centro instantáneo (ver figura P2-27a) y cálculos elementales:

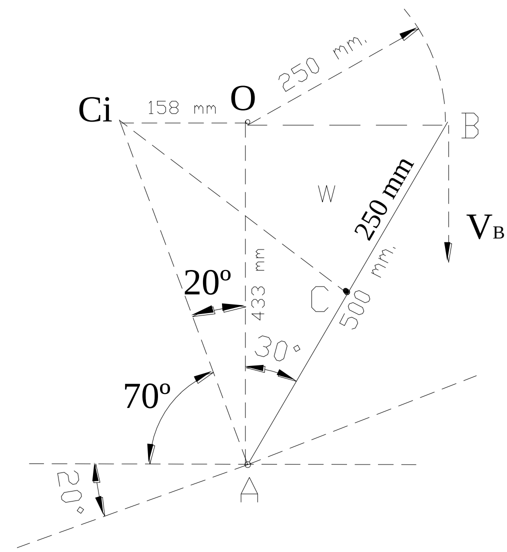
$$AO = \sqrt{0.5^2 - 0.25^2} = 0.433 \text{ m}$$

$$CiO = 0.433\, tg\, 20° = 0.158 \text{ m}$$

$$CiA = \sqrt{0.433^2 + 0.158^2} = 0.461 \text{ m}$$

$$CiC^2 = 0.25^2 + 0.408^2 - 2*0.408*0.25\cos 60°$$

$$CiC = 0.356 \text{ m}$$



P2-27a

2).- Cálculo de las velocidades:

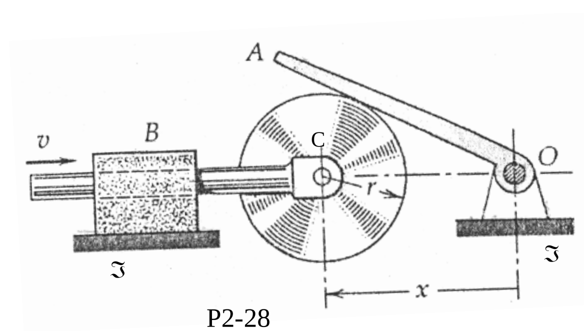
$$V_B = \omega\, r_{OB} = 0.8*0.25 = 0.2 \text{ m/seg}$$

$$\omega_{BA} = \frac{V_B}{r_{C\,iB}} = \frac{0.2}{0.408} = 0.49 \text{ rad/seg}$$

$$V_A = \omega_{BA} r_{C\,iA} = 0.49*0.461 = 0.226 \text{ m/seg}$$

$$V_C = \omega_{BA} r_{C\,iC} = 0.49*0.356 = 0.174 \text{ m/seg}$$

2-28.- La rotación de la palanca OA gobierna el movimiento del disco circular en contacto con ella, a cuyo centro se le comunica una velocidad horizontal V. Hallar la expresión de la velocidad angular ω de OA en función de X.

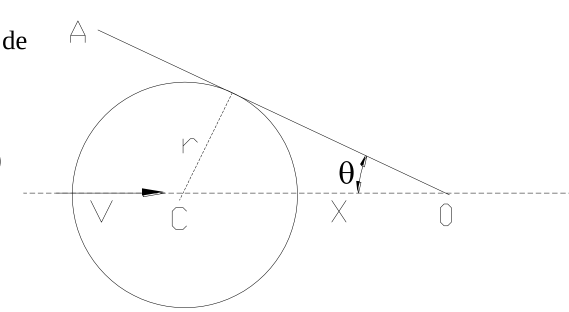


P2-28

Solución

1).- Determinación de la posición de C en función de un parámetro (ver figura P2-28a):

$$sen\theta = \frac{r}{X} \quad \rightarrow \quad X = r\csc\theta \qquad (1)$$



P2-28a

Derivando (1) dos veces respecto al tiempo:

$$\dot{X} = -r\csc\theta\cot\theta\,\dot{\theta}$$

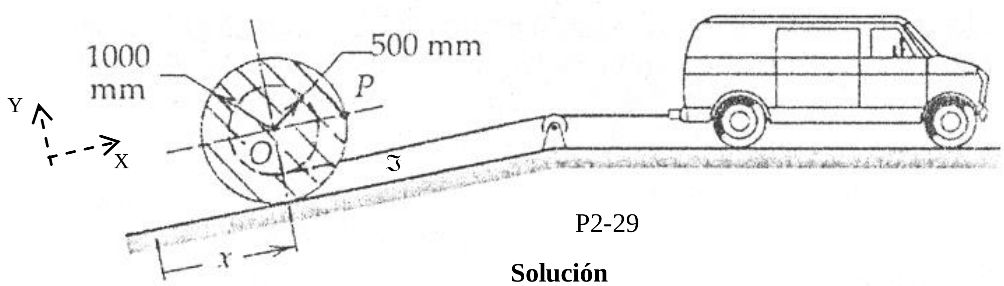
$$\dot{\theta} = \frac{-\dot{X} sen^2\theta}{r\cos\theta}$$

Reemplazando: $\dot{X} = -V$

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{V}{r} sen\theta\, tg\theta$$ (Unidades de velocidad angular)

$$\omega = \frac{V}{r} * \frac{r}{X} * \frac{r}{\sqrt{X^2 - r^2}} = \frac{V\,r}{X\sqrt{X^2 - r^2}}$$ (Unidades de velocidad angular)

2-29.- El gran carrete de cable para transporte de energía rueda cuesta arriba por acción del vehículo de servicio del modo que se muestra. El vehículo parte del reposo con X = 0 respecto al carrete y se acelera uniformemente a 0.6 m/seg^2. Calcular, para el instante en que X = 1.8 m, la aceleración del punto P del carrete que se indica.



P2-29

Solución

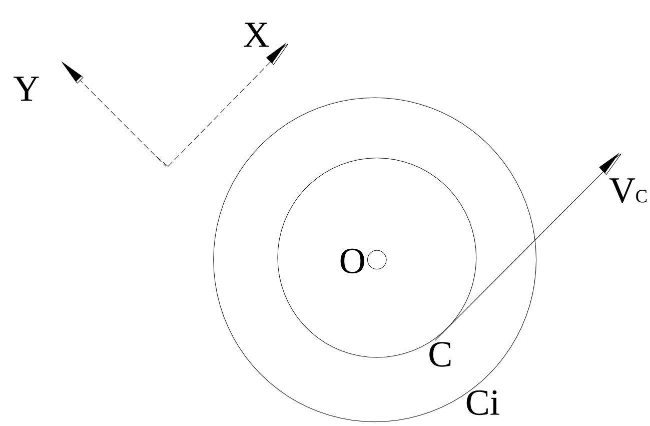
1).- Cálculo de la velocidad de "C" (del cable):

Si:

$$V_C = \omega\, r_{C\,i\,C} \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{V_C}{r_{C\,i\,C}}$$

$$V_O = \omega\, r_{C\,i\,O} \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{V_O}{r_{C\,i\,O}}$$

$$\therefore \quad V_C = \frac{r_{C\,i\,C}}{r_{C\,i\,O}} V_O$$



P2-29a

Luego:

$$X_C = \frac{500}{1000} X = 0.5\; X$$

También:

$V_C^2 = 2aX_C = 2*0.6*0.5*1.8 = 1.08$ (m/seg)^2 $\rightarrow$ $V_C = 1.04$ m/seg

2).- Cálculo del movimiento angular del gran carrete:

$$\omega = \frac{V_C}{C_i C} = \frac{1.04}{0.5} = 2.08 \text{ rad/seg} \Rightarrow \bar{\omega} = -2.08\,\bar{k} \text{ (rad/seg)}$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{Ci} + \alpha\,\bar{k} x\,\bar{r}_{C\,iC} - \omega^2 \bar{r}_{C\,iC} = 2.08^2(\bar{j}) + \alpha\,\bar{k} x 0.5\bar{j} - 2.08^2(0.5\bar{j})$$

$$a_{Ct}\bar{i} + a_{Cn}\bar{j} = -0.5\alpha\,\bar{i} + 2.16\,\bar{j}$$

Igualando componentes en $\bar{i}$:

$$0.6 = -0.5\,\alpha \rightarrow \alpha = -1.2 \text{ rad/seg} \rightarrow \bar{\alpha} = -1.2\,\bar{k} \text{ (rad/seg}^2\text{)}$$

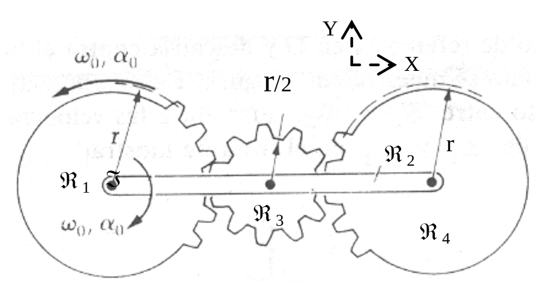
3).- Cálculo de la aceleración de P:

$$\bar{a}_P = \bar{a}_{Ci} + \alpha\,\bar{k} x \bar{r}_{C\,iP} - \omega^2 \bar{r}_{C\,iP} = 4.326\,\bar{j} - 1.2\,\bar{k}\ x\,(\bar{i} + \bar{j}) - 4.326(\bar{i} + \bar{j})$$

$$\bar{a}_P = 4.326\bar{j} - 1.2\bar{j} + 1.2\,\bar{i} - 4.326\,\bar{i} - 4.326\bar{j}$$

$$\bar{a}_P = -3.126\,\bar{i} - 1.2\,\bar{j} \text{ (m/seg}^2\text{)} \rightarrow |\bar{a}_P| = 3.348 \text{ m/seg}^2$$

2-30.- El engranaje $\Re_1$ y la manivela $\Re_2$ tienen velocidades angulares ω_0 (rad/seg) y aceleraciones angulares α_0 (rad/seg^2) en el instante mostrado en la figura, en las direcciones indicadas. Encuentre los vectores, velocidad angular y aceleración angular de los engranajes $\Re_3$ y $\Re_4$ en el mismo instante, si $\Re_2$ esta articulada a $\Re_1$, $\Re_3$ y $\Re_4$.



P2-30

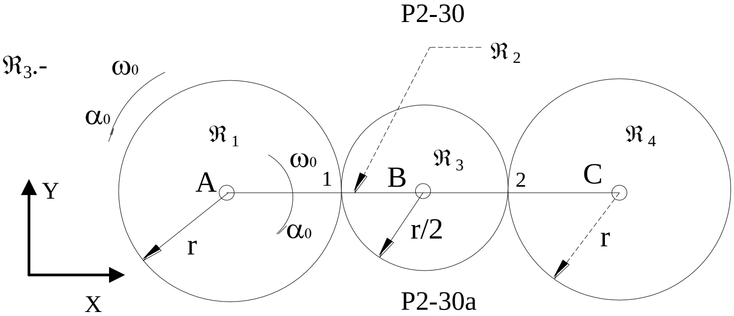
Solución

1).-Cálculo del movimiento angular de $\Re_3$.-

a).- Por rodamiento:

$$\bar{V}_1 = \bar{\omega}_1 x\,\bar{r}_{A1} = \omega_0 \bar{k}\ x\ r\ \bar{i} = r\omega_0\,\bar{j}$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_1 + \bar{\omega}_3\ x\ \bar{r}_{1B}$$



P2-30a

Luego:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_1 + \omega_3 \bar{k}\ x\ \frac{r}{2}\ \bar{i} = r\omega_0\, \bar{j} + \frac{r}{2}\omega_3\, \bar{j} \qquad (1)$$

También:

$$\bar{V}_B = \bar{\omega}_2 x \bar{r}_{AB} = -\omega_0 \bar{k} x \frac{3}{2} r\ \bar{i} = -\frac{3}{2} r\omega_0\, \bar{j} \qquad (2)$$

(1) = (2):

$$r\omega_0 + \frac{r}{2}\omega_3 = -\frac{3}{2} r\omega_0 \quad \rightarrow \quad \omega_3 = -5\ \omega_0$$

$\bar{\omega}_3 = -5\ \omega_0 \bar{k}$ rad/seg

b).- Se sabe, que la aceleración tangencial del engranaje $\Re_1$ en 1 es igual a la aceleración tangencial del engranaje $\Re_3$ en 1:

$$\bar{a}_{11} = \bar{\alpha}_1 x \bar{r}_{A1} - \omega_1^2 \bar{r}_{A1} = \alpha_0 \bar{k} x r\ \bar{i} - \omega_0^2 r\ \bar{i} = \alpha_0 r\ \bar{j} - \omega_0^2 r\ \bar{i}$$

$$\bar{a}_{11t} = \alpha_0 r\ \bar{j} \qquad (3)$$

También:

$$\bar{a}_B = -\alpha_0 \bar{k}\ x \left(\frac{3}{2} r\ \bar{i}\right) - \omega_0^2 \left(\frac{3}{2} r\ \bar{i}\right)$$

$$\bar{a}_{13} = \bar{a}_B + \alpha_3 \bar{k}\ x\ \bar{r}_{B1} - \omega_3^2 \bar{r}_{B1}$$

$$\bar{a}_{13} = -\frac{3}{2} r\alpha_0\, \bar{j} - \frac{3}{2} r\omega_0^2\ \bar{i} + \alpha_3 \bar{k} x \left(-\frac{r}{2}\ \bar{i}\right) - 25\omega_0^2 \left(-\frac{r}{2}\ \bar{i}\right)$$

$$\bar{a}_{13} = -\left(\frac{3}{2} r\alpha_0 + \frac{r}{2}\alpha_3\right) \bar{j} + 11\, r\omega_0^2\ \bar{i}$$

$$\bar{a}_{13t} = -\left(\frac{3}{2} r\alpha_0 + \frac{r}{2}\alpha_3\right) \bar{j} \qquad (4)$$

(3) = (4):

$$\alpha_0 r = -\frac{3}{2} r\alpha_0 - \frac{r}{2}\alpha_3 \quad \rightarrow \quad \frac{5}{2}\alpha_0 = -\frac{1}{2}\alpha_3$$

$\overline{\alpha}_3 = -5\,\alpha_0\,\overline{k}$ (rad/seg^2)

3).- Cálculo del movimiento angular de $\Re_4$.-

a).- Si:

$$\overline{V}_2 = \overline{V}_B + \overline{\omega}_3 x \overline{r}_{B2} = -\frac{3}{2} r\omega_0 \overline{j} - 5\,\omega_0 \overline{k}\ x\ \frac{r}{2}\overline{i}$$

$$\overline{V}_2 = -4\,r\,\omega_0\ \overline{j}$$

Luego:

$$\overline{V}_C = \overline{V}_2 + \omega_4 \overline{k} x \overline{r}_{2C} = -4\,r\omega_0 \overline{j} + \omega_4 \overline{k} x\ r\ \overline{i} = 4\,r\omega_0 \overline{j} + r\omega_4 \overline{j} \qquad (5)$$

También:

$$\overline{V}_C = \overline{\omega}_2 x \overline{r}_{AC} = -\omega_2 \overline{k} x 3r\ \overline{i} = -3\omega_0 r\ \overline{j} \qquad (6)$$

(5) = (6):

$$r\omega_4 - 4\,r\omega_0 = -3\,r\omega_0 \quad \rightarrow \quad \omega_4 = \omega_0$$

$\overline{\omega}_4 = \omega_0 \overline{k}$ (rad/seg)

b).- Si:

$$\overline{a}_{23} = \overline{a}_B + \overline{\alpha}_3 x \overline{r}_{B2} - \omega_3^2 \overline{r}_{B2} = -\frac{3}{2} r\left(\omega_0^2 \overline{i} + \alpha_0\, j\right) - 5\alpha_0 \overline{k} x \frac{r}{2}\overline{i} - 25\omega_0^2\ \frac{r}{2}\overline{i}$$

$$\overline{a}_{23t} = \left(-\frac{3}{2} r\alpha_0 - \frac{5}{2} r\alpha_0\right)\overline{j} = -4\,r\alpha_0\ \overline{j} \qquad (7)$$

También:

$$\bar{a}_C = \bar{\alpha}_2 x \bar{r}_{AC} - \omega_2^2 \bar{r}_{AC} = -\alpha_0 \bar{k} x (3r\,\bar{i}) - \omega_0^2 (3r\,\bar{i}) = -3r\omega_0^2\,\bar{i} - 3r\alpha_0\,\bar{j}$$

$$\bar{a}_{24} = \bar{a}_C + \alpha_4 \bar{k} x \bar{r}_{C2} - \omega_4^2 \bar{r}_{C2} = \bar{a}_C + \alpha_4 \bar{k} x (-r\,\bar{i}) - \omega_0^2 (-r\,\bar{i})$$

$$\bar{a}_{24} = (-3\,r\omega_0^2 + \omega_0^2 r)\,\bar{i} + (-\alpha_4 r - 3\,r\alpha_0)\,\bar{j}$$

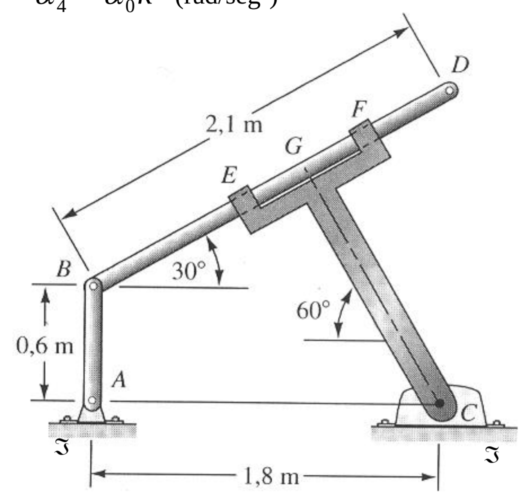
$$\bar{a}_{24t} = -(\alpha_4 r + 3\,r\alpha_0)\,\bar{j} \qquad (8)$$

(7) = (8):

$$-4\,r\alpha_0 = -(\alpha_4 r + 3\,r\alpha_0) \quad \rightarrow \quad \alpha_4 = \alpha_0 \quad \rightarrow \quad \bar{\alpha}_4 = \alpha_0 \bar{k} \ \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

Nota.- Para engranajes se demuestra (una vez más): $\alpha_3 = \dot{\omega}_3$ y $\alpha_4 = \dot{\omega}_4$; por que son funciones completamente generales del tiempo en movimientos en el plano.

2-31.- En el dispositivo que se muestra, la barra AB está girando con una velocidad angular de 5 rad/seg en el sentido de las agujas del reloj: ¿Cuáles serán las velocidades angulares de la barra BD y del cuerpo EFC? Determinar la velocidad de H respecto a EFC. *Sugerencia: Todo los puntos de BD se trasladan en EFC; ¿qué implica esto para los movimientos angulares de BD y EFC?*



P2-31

Solución

Sea H’ un punto del cuerpo EFC coincidente con H de la barra BD.

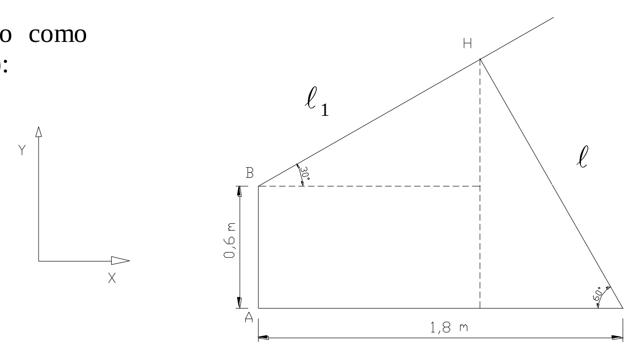
1).- Cálculo de la velocidad de H, tomando como punto base o conveniente C (ver figura P2-31a):

$$\ell\, sen 60° = 0.6 + \ell_1 sen 30°$$

$$\ell \cos 60° = 1.8 - \ell_1 \cos 30°$$

$$tg\, 60° = \frac{0.6 + \ell_1 sen 30°}{1.8 - \ell_1 \cos 30°}$$

$$3.12 - 1.5\,\ell_1 = 0.6 + 0.5\,\ell_1 \quad \rightarrow \quad \ell_1 = 1.26 \text{ m y } \ell = 1.42 \text{ m}$$



P2-31a

$$\ell\, sen 60° = 1.23 \text{ m y } \ell \cos 60° = 0.71 \text{ m}$$

Luego:

$$\bar{V}_{H/\Im} = V_{H/EFC}\left(\cos 30°\,\bar{i} + sen30°\,\bar{j}\right) + \omega_{EFC/\Im}\bar{k}x\left(-0.71\,\bar{i} + 1.23\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_{H/\Im} = \left(0.866\,V_{H/EFC} - 1.23\omega_{EFC/\Im}\right)\bar{i} + \left(0.5\,V_{H/EFC} - 0.71\omega_{EFC/\Im}\right)\bar{j} \qquad (1)$$

2).- Cálculo de la velocidad de H, tomando como punto base o conveniente A:

$$\bar{V}_{H/\Im} = \bar{V}_B + \omega_{BD/\Im}\bar{k}x\bar{r}_{BH} = -5\,\bar{k}x0.6\,\bar{j} + \omega_{BD/\Im}\bar{k}x1.26\left(\cos 30°\,\bar{i} + sen30°\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_{H/\Im} = \left(3 - 0.63\,\omega_{BD/\Im}\right)\bar{i} + 1.09\,\omega_{BD/\Im}\,\bar{j} \qquad (2)$$

$\omega_{BD/\Im} = \omega_{EFC/\Im}$ por que ambos cuerpos no cambian de orientación entre ellos.

(1) = (2), igualando componentes y operando:

$$\left(0.866\,V_{H/EFC} - 1.23\omega_{BD/\Im} = 3 - 0.63\omega_{BD/\Im}\right) * 0.5 \qquad (3)$$

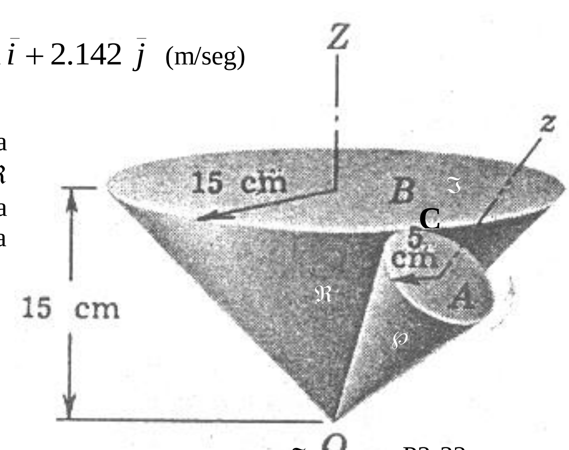
$$\left(0.5\,V_{H/EFC} - 0.71\omega_{BD/\Im} = 1.09\omega_{BD/\Im}\right) * (-0.866) \qquad (4)$$

$$-1.26x10^{-4}\,\omega_{BD/\Im} = 1.5 - 1.26\omega_{BD/\Im} \quad \rightarrow \quad \omega_{BD/\Im} = 1.19 \text{ rad/seg}$$

$$0.5\,V_{H/EFC} - 0.71x1.19 = 1.09x1.19 \quad \rightarrow \quad V_{H/EFC} = 4.284 \text{ m/seg}$$

$$\bar{V}_{H/EFC} = 4.284\left(\cos 30°\,\bar{i} + sen30°\,\bar{j}\right) = 3.71\,\bar{i} + 2.142\,\bar{j} \text{ (m/seg)}$$

2-32.- El cono de revolución $\wp$ rueda uniformemente sobre el cono de revolución fijo $\Re$ y realiza una vuelta completa alrededor de $\Re$ cada cuatro segundos. Calcular el módulo de la aceleración angular α del cono $\wp$.



P2-32

Solución

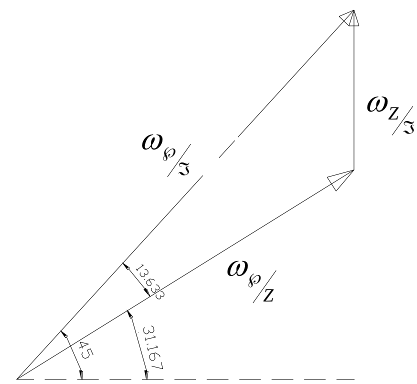
1).- Cálculo de las velocidades angulares:

Si:

$$\overline{V}_C = \overline{0} = \overline{\omega}_{\wp/\Im} x \overline{r}_{OC} \quad \Rightarrow \quad \overline{\omega}_{\wp/\Im} \; // \; \overline{r}_{OC}$$

Por el teorema de adición (ver figura P2-32a):

$$\overline{\omega}_{\wp/\Im} = \overline{\omega}_{\wp/Z} + \overline{\omega}_{z/\Im} \qquad (1)$$



P2-32a

$$\omega_{\wp/\Im} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overline{j} + \overline{k}\right) = \omega_{\wp/z}\left(\cos 31.367° \; \overline{j} + sen 31.367° \; \overline{k}\right) + \omega_{z/\Im} \overline{k} \qquad (2)$$

Por enunciado del problema:

$$\omega_{z/\Im} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \text{rad/seg}$$

En (2), igualando componentes y operando:

$$\omega_{\wp/\Im} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.854 \omega_{\wp/z} \qquad (3)$$

$$\omega_{\wp/\Im} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.52 \omega_{\wp/z} + \frac{\pi}{2} \qquad (4)$$

(3) en (4):

$$0.854 \omega_{\wp/z} = 0.52 \omega_{\wp/z} + \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \omega_{\wp/z} = 4.703 \quad \text{rad/seg}$$

En (3):

$$\omega_{\wp/\Im} = 5.68 \quad \text{rad/seg}$$

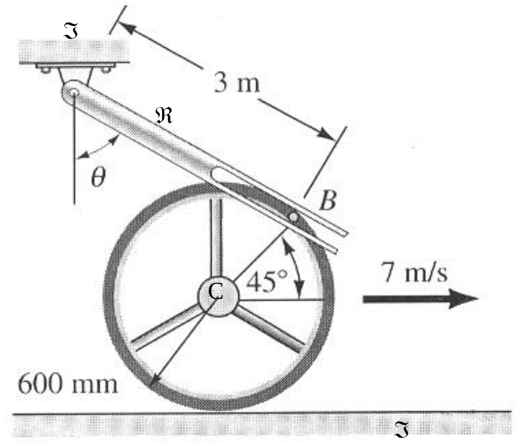
2).- Cálculo de la aceleración angular de $\wp$, derivando (1) respecto al tiempo :

$$\dot{\bar{\omega}}_{\wp/\Im} = \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{\wp/z}}^{0} + \bar{\omega}_{z/\Im}\, x\, \bar{\omega}_{\wp/\Im} + \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{z/\Im}}^{0} = \frac{\pi}{2}\bar{k}\ x\ 4.703\left(0.854\ \bar{j} + 0.52\ \bar{k}\right)$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{\wp/\Im} = -6.31\,\bar{i} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

$$\alpha = 6.31 \quad \text{rad/seg}^2$$

2-33.- Hallar la velocidad y la aceleración del pasador B de la rueda en ℑ. Además hallar la velocidad angular de la barra en la que desliza el pasador B, cuando: θ = 30°, la velocidad de C es constante e igual a 7 m/seg, y la rueda rueda sin deslizar.



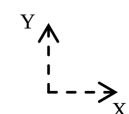
P2-33

Solución

1).- Cálculo de la velocidad y aceleración angulares de la rueda:

$$\omega = \frac{V_C}{r_{AC}} = \frac{7}{0.6} = 11.667 \quad \text{rad/seg}$$

$$\bar{\omega} = -11.667\ \bar{k} \quad \text{(rad/seg)}$$



$$\bar{a}_C = \alpha\ r\ \bar{i} = \bar{0} \quad \rightarrow \quad \alpha = 0$$

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de B en ℑ:

$$\bar{V}_{B/\Im} = \bar{V}_C + \bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{CB} = 7\ \bar{i} - \frac{7}{0.6}\bar{k}\ x\ 0.6\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\bar{i} + \bar{j}\right) = 11.949\ \bar{i} - 4.942\,\bar{j} \quad \text{(m/seg)} \qquad (1)$$

$$\bar{a}_{B/\Im} = -\omega^2 \bar{r}_{CB} = -11.667^2 * 0.6\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\bar{i} + \bar{j}\right) = -57.747\ \bar{i} - 57.747\ \bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

3).- Cálculo de la velocidad angular de ℜ en ℑ.-

Sea: B’ punto perteneciente a la barra ℜ, coincidente con el punto B de la rueda.

$$\bar{V}_{B/\Im} = \bar{V}_{B/\Re} + \bar{V}_{B'/\Im} = V_{B/\Re}\left(sen30°\bar{i} - \cos 30°\ \bar{j}\right) + \omega_{\Re}\bar{k}\ x\ 3\left(sen30°\bar{i} - \cos 30°\ \bar{j}\right)$$

$$\overline{V}_{B/\Im} = \left(V_{B/\Re}\, sen30° + 3\omega_{\Re} \cos 30° \right) \overline{i} + \left(-V_{B/\Re} \cos 30° + 3\omega_{\Re}\, sen30° \right) \overline{j} \qquad (2)$$

(1) = (2):

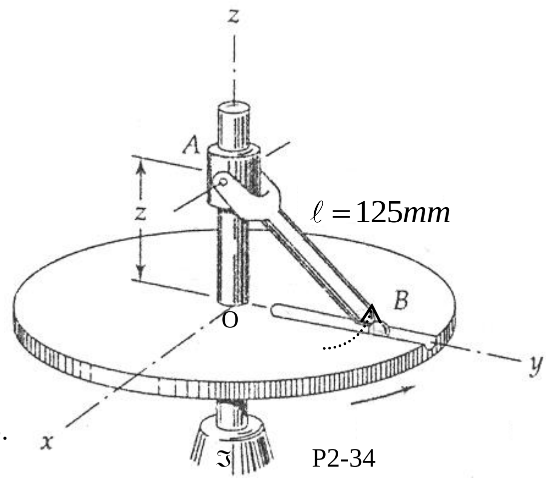
$$\left(V_{B/\Re}\, sen30° + 3\omega_{\Re} \cos 30° = 11.949 \right) * \cos 30°$$

$$\left(-V_{B/\Re} \cos 30° + 3\omega_{\Re}\, sen30° = -4.949 \right) * sen30°$$

$$3\omega_{\Re} = 7.8737 \quad \rightarrow \quad \omega_{\Re} = 2.625 \text{ rad/seg}$$

$$\overline{\omega}_{\Re} = 2.625\, \overline{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

2-34.- El cursor y la horquilla A reciben una velocidad ascendente de 0.2 m/seg durante un intervalo de su movimiento, produciendo el deslizamiento del extremo B por la ranura del disco giratorio. Hallar la aceleración angular de la barra cuando pasa por la posición z = 75 mm. El disco gira a la velocidad angular constante de 2 rad/seg.



P2-34

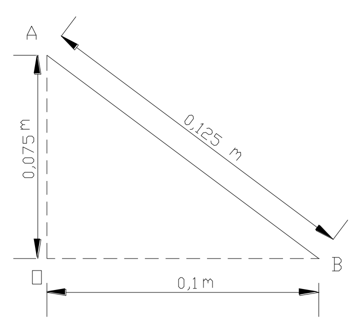
Solución

La barra AB tiene un movimiento general en el espacio.

1).- Cálculo de la velocidad angular de la barra AB:

Si:

$$\overline{\omega}_{AB/\Im} = \overline{\omega}_{AB/A} + \overline{\omega}_{A/\Im} = \omega_{AB/A}\, \overline{i} + 2\, \overline{k} \qquad (1)$$



P2-34a

a).- Cálculo de la velocidad de B, respecto a O en $\Im$:

$$\overline{V}_B = \dot{\rho}\, \overline{j} - \rho\dot{\phi}\, \overline{i} = -0.1 * 2\, \overline{i} + \dot{\rho}\, \overline{j} \qquad (2)$$

b).- Cálculo de la velocidad de B, como parte de la barra AB:

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{\omega}_{AB/\Im} x \overline{r}_{AB} = 0.2\, \overline{k} + \left(\omega_{AB/A}\, \overline{i} + 2\, \overline{k} \right) x \left(0.1\, \overline{j} - 0.075\, \overline{k} \right)$$

$$\overline{V}_B = -0.2\, \overline{i} + 0.075\omega_{AB/A}\, \overline{j} + \left(0.2 + 0.1\omega_{AB/A} \right) \overline{k} \qquad (3)$$

(2) = (3) igualando componentes y operando:

$$0.2+0.1\omega_{AB/A}=0 \quad \rightarrow \quad \omega_{AB/A}=-2 \ \text{ rad/seg}$$

$$\dot{\rho}=0.075(-2)=-0.15 \ \text{ m/seg}$$

Luego en (1):

$$\bar{\omega}_{AB/\Im}=-2\,\bar{i}+2\,\bar{k} \ \text{ (rad/seg)} \quad \rightarrow \quad \omega_{AB/\Im}=2.83 \ \text{ rad/seg}$$

2).- Cálculo de la aceleración angular de AB:

Derivando (1) respecto al tiempo:

$$\dot{\bar{\omega}}_{AB/\Im}=\dot{\bar{\omega}}_{AB/A}+\bar{\omega}_{A/\Im}x\bar{\omega}_{AB/A}+\overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{A/\Im}}^{0}=\dot{\omega}_{AB/A}\bar{i}+2\,\bar{k}x(-2\,\bar{i})$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{AB/\Im}=\dot{\omega}_{AB/A}\bar{i}-4\,\bar{j} \ \text{ (rad/seg}^2\text{)} \qquad (4)$$

a).- Cálculo de la aceleración de B, respecto a O:

$$\bar{a}_B=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2\right)\bar{j}-2\dot{\rho}\dot{\phi}\,\bar{i}=\left(\ddot{\rho}-0.1*4\right)\bar{j}-2*(-0.15)*2\,\bar{i}$$

$$\bar{a}_B=0.6\,\bar{i}+\left(\ddot{\rho}-0.4\right)\bar{j} \qquad (5)$$

b).- Cálculo de la aceleración de B, como parte de la barra AB:

$$\bar{a}_B=\overbrace{\bar{a}_A}^{0}+\dot{\bar{\omega}}_{AB/\Im}x\bar{r}_{AB}+\bar{\omega}_{AB/\Im}x\left(\bar{\omega}_{AB/\Im}x\bar{r}_{AB}\right)$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{AB/\Im}x\,\bar{r}_{AB}=\left(\dot{\omega}_{AB/A}\bar{i}-4\,\bar{j}\right)x\left(0.1\,\bar{j}-0.075\,\bar{k}\right)$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{AB/\Im}x\bar{r}_{AB}=0.3\,\bar{i}+0.075\dot{\omega}_{AB/A}\bar{j}+0.1\dot{\omega}_{AB/A}\bar{k}$$

$$\bar{\omega}_{AB/\Im}x\bar{r}_{AB}=\left(-2\,\bar{i}+2\,\bar{k}\right)x\left(0.1\,\bar{j}-0.075\,\bar{k}\right)=-0.2\,\bar{i}-0.15\,\bar{j}-0.2\,\bar{k}$$

$$\bar{\omega}_{AB/\Im} x\left(\bar{\omega}_{AB/\Im} x\bar{r}_{AB}\right) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 0 & 2 \\ -0.2 & -0.15 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.3\,\bar{i} - 0.8\,\bar{j} + 0.3\,\bar{k}$$

$$\bar{a}_B = 0.6\,\bar{i} + \left(-0.8 + 0.075\dot{\omega}_{AB/A}\right)\bar{j} + \left(0.3 + 0.1\dot{\omega}_{AB/A}\right)\bar{k} \qquad (6)$$

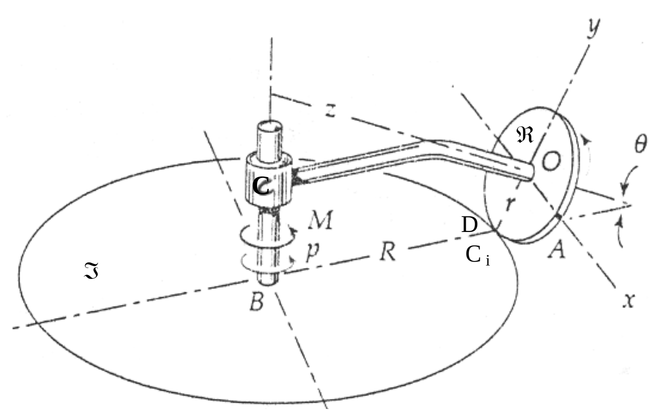
(5) = (6), igualando componentes en "z" y operando:

$$0 = 0.3 + 0.1\dot{\omega}_{AB/A} \quad \rightarrow \quad \dot{\omega}_{AB/A} = -3 \quad \text{rad/seg}^2$$

En (4):

$$\dot{\bar{\omega}}_{AB/\Im} = -3\,\bar{i} - 4\,\bar{j} \quad (\text{rad/seg}^2) \quad \rightarrow \quad \dot{\omega}_{AB/\Im} = 5 \quad \text{rad/seg}^2$$

2-35.- La rueda de radio r puede girar alrededor del eje acodado CO, el cual gira a su vez en torno al eje vertical a la velocidad constante de "p" rad/seg. Si la rueda rueda sin deslizamiento a lo largo de la circunferencia horizontal de radio R, determinar las expresiones de la velocidad angular $\bar{\omega}$ y de la aceleración angular $\bar{\alpha}$ de la rueda. El eje "x" permanece siempre horizontal.



P2-35

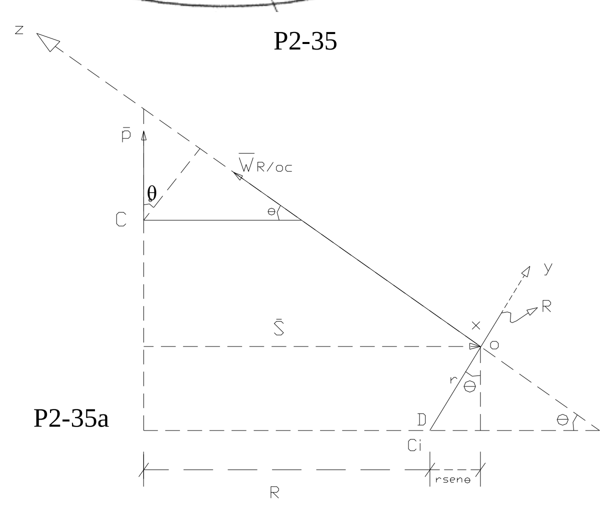
Solución

1).- Cálculo de la velocidad angular de ℜ en ℑ :

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_{\Re/CO} + \bar{\omega}_{CO/\Im} = \bar{\omega}_{\Re/CO} + \bar{p} \qquad (1)$$

a).- cálculo de la velocidad de "O", en el cuerpo rígido ℜ (en rodamiento):

$$\bar{V}_O = \bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{DO} = \left(\bar{\omega}_{\Re/CO} + \bar{p}\right) x\ r\ \bar{j}$$



P2-35a

$$\overline{V}_O = \left[\omega_{\Re/CO}\,\overline{k} + p\left(\cos\theta\ \overline{j} + sen\theta\ \overline{k}\right)\right] x\ r\ \overline{j}$$

$$\overline{V}_O = -\left(r\ \omega_{\Re/CO} + r\ p\ sen\theta\right) x\ \overline{i} \qquad (2)$$

b).- Cálculo de la velocidad de “O”, respecto al eje vertical:

$$\overline{V}_O = \overline{p}\ x\ \overline{s} = p\left(\cos\theta\ \overline{j} + sen\theta\ \overline{k}\right) x\left[\left(R + r\ sen\theta\right)\left(sen\theta\ \overline{j} - \cos\theta\ \overline{k}\right)\right]$$

$$\overline{V}_O = -p\cos\theta\left(R + r\ sen\theta\right)\cos\theta\ \overline{i} - psen\theta\left(R + r\ sen\theta\right)sen\theta\ \overline{i}$$

$$\overline{V}_O = -p\left(R + r\ sen\theta\right)\left(\cos^2\theta + sen^2\theta\right)\overline{i} = -p\left(R + r\ sen\theta\right)\overline{i} \qquad (3)$$

(2) = (3):

$$r\ \omega_{\Re/CO} + r\ psen\theta = pR + r\ psen\theta$$

$$\omega_{\Re/CO} = \frac{R}{r}\ p \quad \rightarrow \quad \overline{\omega}_{\Re/CO} = \frac{R}{r}\ p\ \overline{k}$$ (Unid. de velocidad angular)

Luego en (1):

$$\overline{\omega} = \frac{R}{r}\ p\ \overline{k} + p\left(\cos\theta\ \overline{j} + sen\theta\ \overline{k}\right)$$

$$\overline{\omega} = p\left[\cos\theta\ \overline{j} + \left(\frac{R}{r} + sen\theta\right)\overline{k}\right]$$ (Unidades de velocidad angular)

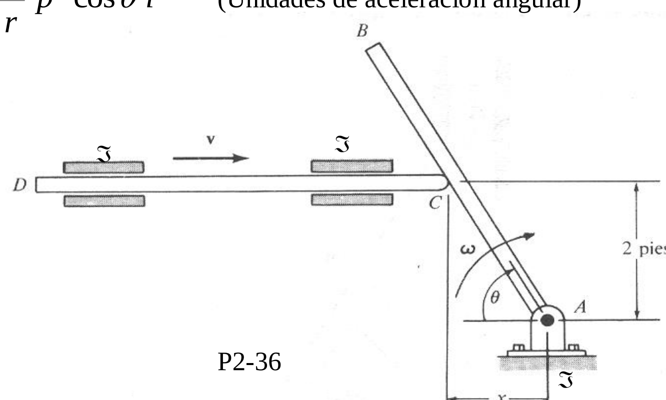
2).- Cálculo de la aceleración angular de $\Re$ en $\Im$:

Derivando (1) respecto al tiempo en $\Im$:

$$\overline{\alpha} = \dot{\overline{\omega}} = \overbrace{\dot{\overline{\omega}}_{\Re/CO}}^{0} + \overline{p} x \overline{\omega}_{\Re/CO} + \overbrace{\dot{\overline{p}}}^{0}$$ ($\dot{\overline{\omega}}_{\Re/CO}$ = 0 por que depende de “p”)

$$\overline{\alpha} = p\left(\cos\theta\ \overline{j} + sen\theta\ \overline{k}\right) x\ \frac{R}{r}\ \overline{k} = \frac{R}{r}\ p^2\cos\theta\ \overline{i}$$ (Unidades de aceleración angular)

2-36.- La barra CD presiona contra AB dándole una velocidad angular. Si la velocidad angular de AB en ω = 5 rad/seg, determine la rapidez necesaria V de CD, para cualquier ángulo.



P2-36

Solución

DC, se encuentra en movimiento de traslación, cuyos puntos tienen una trayectoria rectilínea X y AB tiene un movimiento alrededor de un eje fijo, cuyo movimiento angular es la variación de θ en el tiempo.

1).- Poniendo el movimiento de C en función de un parámetro θ:

$$tg\theta = \frac{2}{X}$$

$$X = \frac{2}{tg\theta} \quad ó \quad 2 = X\ tg\theta \qquad (1)$$

2).- Derivando (1), respecto al tiempo:

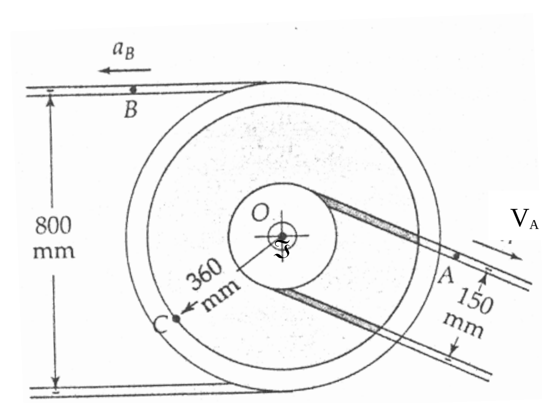
$$0 = \dot{X}\ tg\theta + X\ \sec^2\theta\,\dot{\theta}$$

$$\dot{X} = \frac{-X\ \sec^2\theta\,\omega}{tg\theta} = \frac{-2\sec^2\theta}{tg^2\theta}\omega$$

Luego:

$$V = \frac{-2\,\omega}{sen^2\theta} = -\frac{10}{sen^2\theta} \quad \rightarrow \quad V = -10\csc^2\theta \quad \text{(Unid. de velocidad)}$$

2-37.- Las dos poleas de correas trapezoidales forman un conjunto único que gira alrededor de O. En cierto instante, el punto A de la correa pequeña lleva una velocidad V_A = 1.5 m/seg, el punto B de la polea grande posee una aceleración a_B = 45 m/seg^2, tal como se indica en la figura P2-37. Hallar el módulo de la aceleración de C en ese instante.



P2-37

Solución

Las poleas se están moviendo alrededor de un eje fijo.

1).- Cálculo de la velocidad angular y aceleración angular de las poleas:

$$\omega = \frac{V_A}{r} = \frac{1.5}{0.075} = 20 \ \text{rad/seg}$$

$$\alpha = \frac{a_B}{R} = \frac{45}{0.4} = 112.5 \ \text{rad/seg}^2$$

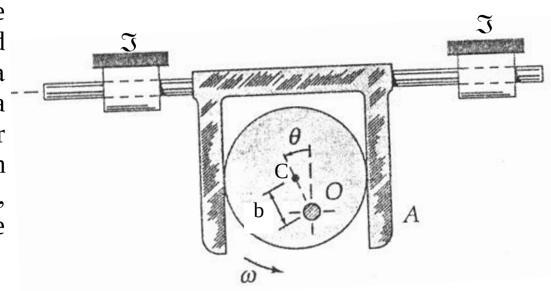
2).- Cálculo del módulo de la aceleración de C:

$$a_C = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(\alpha \, r_{OC})^2 + (\omega^2 \, r_{OC})^2}$$

$$a_C = \sqrt{(112.5 * 0.36)^2 + (20^2 * 0.36)^2} = 149.587 \ \text{m/seg}^2$$

$$a_C = 149.6 \ \text{m/seg}^2$$

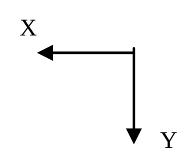
2-38.- La leva circular se monta excéntricamente respecto al cojinete fijo en O y gira con velocidad angular constante ω en sentido antihorario. La leva hace que la horquilla A y la barra de mando unida a ella oscilen en la dirección horizontal X. Escribir las expresiones de la velocidad V_X y la aceleración a_X de la barra de mando en función del ángulo θ, medido éste desde la vertical. Las superficies de contacto de la horquilla son verticales.



P2-38

Solución

La horquilla y la barra de mando tiene un movimiento de traslación, y la leva tiene un movimiento alrededor de un eje fijo, además nos están pidiendo la componente en X del movimiento de C, que viene a ser el movimiento de la barra de mando.



1).- Cálculo de la componente en la dirección X de la velocidad de C:

$$\bar{V}_C = \bar{\omega} \ x \ \bar{r}_{OC} = \omega \, \bar{k} \ x \ b(sen\theta \, \bar{i} - \cos\theta \, \vec{j})$$

$$\bar{V}_C = b\omega \left(\cos\theta \, \bar{i} + sen\theta \, \bar{j}\right)$$

Luego:

$$V_X = b\omega \cos\theta \quad \text{(Unid. de Velocidad)}$$

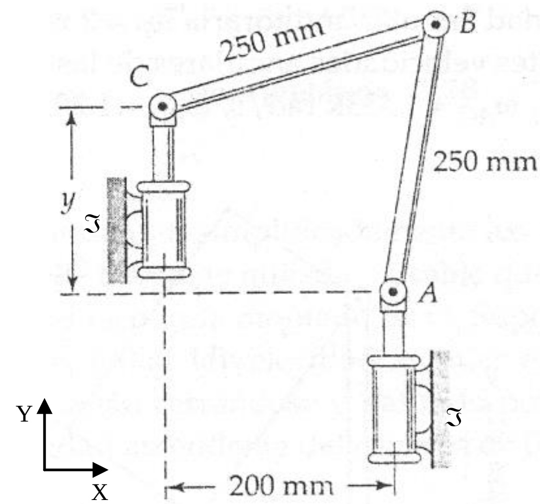
2).- Cálculo de la componente en la dirección X de la aceleración de C:

$$\bar{a}_C = -\omega^2 \bar{r}_{OC} = -\omega^2 b \left(sen\theta\, \bar{i} - \cos\theta\, \bar{j} \right)$$

Luego:

$a_X = -b\omega^2\ sen\theta$ (Unid. de aceleración)

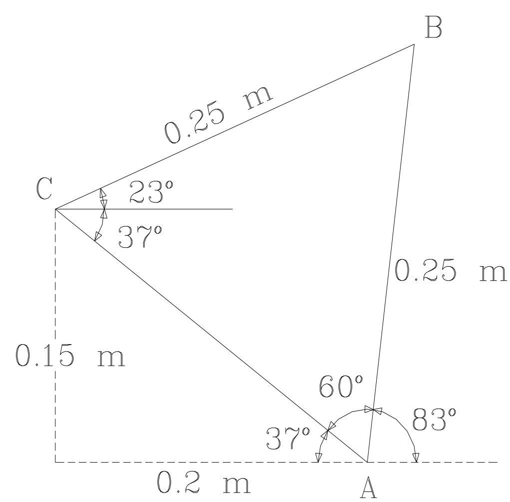
2-39.- Los extremos A y C de las barras articuladas están controlados por el movimiento vertical de los vástagos de los émbolos de los cilindros hidráulicos. Durante un corto intervalo del movimiento, A posee una velocidad ascendente de 3 m/seg y C una descendente de 2 m/seg. Hallar la velocidad de B en el instante en que Y = 150 mm.



P2-39

Solución

Los extremos A y C pertenecen a cuerpos que están en movimiento de traslación, y las barras CB y AB están en movimiento general en el plano:



P2-39a

1).- Cálculo de la velocidad de B tomando como punto base C:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_C + \omega_{CB} \bar{k}\ x\ \bar{r}_{CB}$$

$$\bar{V}_B = -2\ \bar{j} + \omega_{CB} \bar{k}\ x\ 0.25 \left(\cos 23°\ \bar{i} + sen 23°\ \bar{j} \right)$$

$$\bar{V}_B = 0.25\ \omega_{CB} sen 23°\ \bar{i} + \left(0.25 \omega_{CB} \cos 23° - 2 \right) \bar{j} \quad (1)$$

2).- Cálculo de la velocidad de B tomando como punto base A:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \omega_{AB} \bar{k}\ x\ \bar{r}_{AB}$$

$$\bar{V}_B = 3\bar{j} + \omega_{AB} \bar{k}\ x\ 0.25 \left(\cos 83°\ \bar{i} + sen 83° \bar{j} \right)$$

$$\bar{V}_B = -0.25 \omega_{AB} sen 83° \bar{i} + \left(3 + 0.25 \omega_{AB} \cos 83° \right) \bar{j} \quad (2)$$

(1)=(2) e igualando componentes:

$$-0.25\ \omega_{CB}\ sen 23° = -0.25\ \omega_{AB}\ sen 83° \quad \rightarrow \quad \omega_{CB} = 2.54\ \omega_{AB} \quad (3)$$

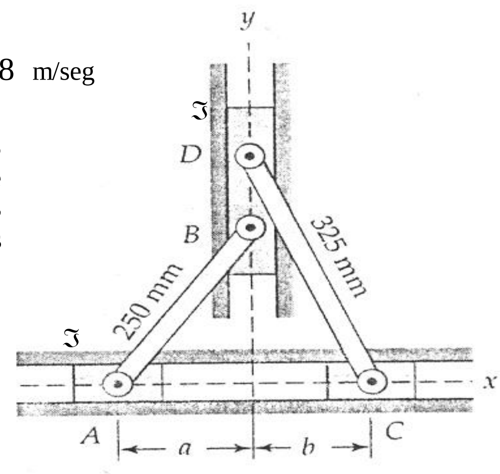
$$0.25\cos 23° * 2.54\ \omega_{AB} - 2 = 3 + 0.25\omega_{AB}\cos 83°$$

$$0.554\ \omega_{AB} = 5 \quad \rightarrow \quad \omega_{AB} = 9.024 \ \text{rad/seg}$$

En (2) ó (1):

$$\bar{V}_B = -2.24\ \bar{i} + 3.275\ \bar{j} \quad \text{(m/seg)} \quad \rightarrow \quad |\bar{V}_B| = 3.968 \ \text{m/seg}$$

2-40.- En el instante representado a = 150 mm y b = 125 mm y la distancia a + b entre A y C disminuye a razón de 0.2 m/seg. Hallar la velocidad común V de los puntos B y D en ese instante, usando el método de los centros instantáneos de velocidad nula.



P2-40

Solución

El cuerpo BD se encuentra en movimiento de traslación, y las barras AB y CD en movimiento general en el plano.

1).- Por condición del problema:

$$\bar{V}_{A/C} = 0.2\ \bar{i} \quad \Rightarrow \quad \bar{V}_A = \bar{V}_C + \bar{V}_{A/C}$$

$$V_A\bar{i} = -V_C\bar{i} + 0.2\ \bar{i} \quad \Rightarrow \quad V_A = 0.2 - V_C \qquad (1)$$

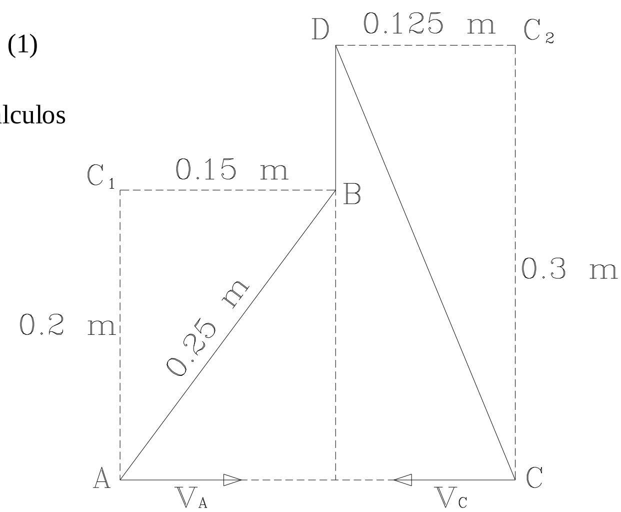
2).- Determinación del centro instantáneo y cálculos elementales (ver figura P2-40a):

3).- Cálculo de la velocidad de C y de B:

Si:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{0.2} \quad \text{y} \quad \omega_{CD} = \frac{V_C}{0.3}$$

$$\left.\begin{aligned} V_B &= \omega_{AB} * a = \frac{V_A}{0.2} * 0.15 \\ V_D &= \omega_{CD} * b = \frac{V_C}{0.3} * 0.125 \end{aligned}\right\} \quad V_B = V_D$$



P2-40a

$$0.75\,V_A = 0.4167\,V_C \qquad (2)$$

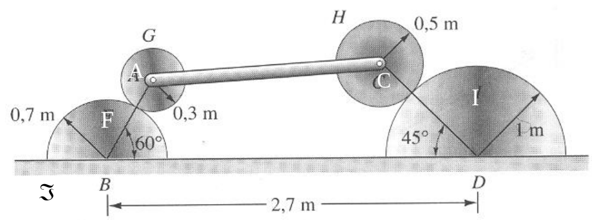
(1) en (2):

$$0.15 - 0.75\,V_C = 0.4167\,V_C \quad \rightarrow \; V_C = 0.1286 \text{ m/seg}$$

Luego:

$$\omega_{CD} = \frac{0.1286}{0.3} = 0.4286 \text{ rad/seg y } \; V_B = V = 0.4286 * 0.125 = 0.0536 \text{ m/seg}$$

2-41.- Se muestra dos semicilindros estacionarios F e I, sobre los cuales ruedan los cilindros G y H. Si el movimiento es tal que la recta CA tiene una velocidad angular constante de 2 rad/seg en el sentido de las agujas del reloj. a) Usando el método de los centros instantáneos de velocidad nula, encuentre la velocidad angular del cilindro H relativo al terreno y b) Determine la aceleración angular del cilindro H relativo al terreno.



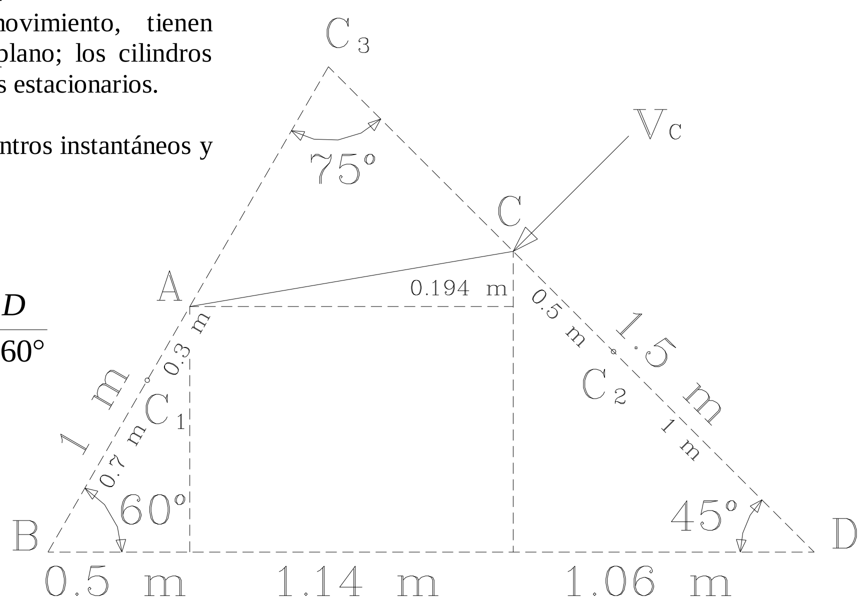
P2-41

Solución

Los tres cuerpos en movimiento, tienen movimiento general en el plano; los cilindros están rodando sobre cilindros estacionarios.

1).- Determinación de los centros instantáneos y cálculos elementales:

Por ley de senos:



$$\frac{2.7}{sen75°} = \frac{c_3B}{sen45°} = \frac{c_3D}{sen60°}$$

$$c_3B = 1.977 \text{ m}$$

$$c_3D = 2.42 \text{ m}$$

$$c_3A = 0.977 \text{ m}$$

$$c_3C = 0.92 \text{ m}$$

P2-41a

2).- Cálculo de la velocidad de C y A:

$$V_C = \omega_{AC} c_3C = 2 * 0.92 = 1.84 \text{ m/seg}$$

$$V_A = \omega_{AC} c_3A = 2 * 0.977 = 1.954 \text{ m/seg}$$

3).- Cálculo de la velocidad angular de H y G:

$$\omega_H = \frac{V_C}{r_{c2C}} = \frac{1.84}{0.5} = 3.68 \text{ rad/seg} \quad \rightarrow \quad \bar{\omega}_H = 3.68\,\bar{k} \text{ (rad/seg)}$$

$$\omega_G = \frac{V_A}{r_{c1A}} = \frac{1.954}{0.3} = 6.513 \text{ rad/seg}$$

$$\bar{\omega}_G = 6.513\,\bar{k} \text{ (rad/seg)}$$

4).- Cálculo de la aceleración de A y C, por rodamientos:

$$\bar{a}_C = \dot{\omega}_H \bar{k} \; x \; \bar{r}_{c2C} + \frac{(0.5\omega_H)^2}{1.5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\right) = \dot{\omega}_H \bar{k} \; x \; 0.5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\right) + 1.6\,\bar{i} - 1.6\,\bar{j}$$

$$\bar{a}_C = (1.6 - 0.3535\dot{\omega}_H)\,\bar{i} - (1.6 + 0.3535\dot{\omega}_H)\,\bar{j} \qquad (1)$$

$$\bar{a}_A = \dot{\omega}_G \bar{k} \; x \; \bar{r}_{c1C} + \frac{(0.3\;\omega_G)^2}{1}\left(-\cos 60°\,\bar{i} - sen60°\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_A = \dot{\omega}_G \bar{k} \; x \; 0.3(\cos 60°\,\bar{i} + sen60°\,\bar{j}) - 1.9\,\bar{i} - 3.31\,\bar{j}$$

$$\bar{a}_A = -(1.9 + 0.26\dot{\omega}_G)\,\bar{i} + (-3.31 + 0.15\dot{\omega}_G)\,\bar{j} \qquad (2)$$

5).- Cálculo de la aceleración de C, como parte de la barra AC, y reemplazando (2):

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A - \omega_{AC}^2\;\bar{r}_{AC} = \bar{a}_A - 4\,(1.14\,\bar{i} + 0.194\,\bar{j})$$

$$\bar{a}_C = -(6.46 + 0.26\,\dot{\omega}_G)\,\bar{i} + (-4.086 + 0.15\,\dot{\omega}_G)\,\bar{j} \qquad (3)$$

(1) = (3) e igualando componentes:

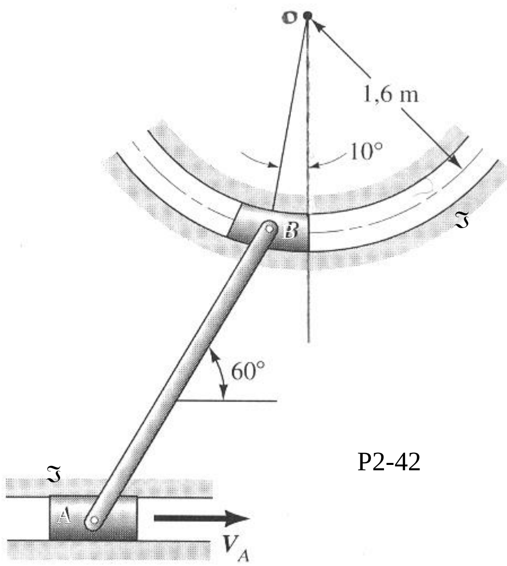
$$-(0.3535\dot{\omega}_H - 1.6) = -(6.46 + 0.26\dot{\omega}_G) \quad \rightarrow \quad \dot{\omega}_G = 1.36\,\dot{\omega}_H - 31 \qquad (4)$$

$$-(1.6 + 0.3535\,\omega_H) = -4.086 + 0.15\,(1.36\,\dot{\omega}_H - 31)$$

$$-0.3535\,\dot{\omega}_H - 0.204\,\dot{\omega}_H = -7.136$$

$$\dot{\omega}_H = 12.8 \text{ rad/seg}^2 \quad \rightarrow \quad \dot{\bar{\omega}}_H = 12.8\,\bar{k} \text{ (rad/seg}^2\text{)}$$

2-42.- Se muestra un mecanismo con dos deslizadores. En el instante de interés el deslizador A tiene una velocidad de 3 m/seg y está acelerado a 1.7 m/seg^2. Si la barra AB tiene 2.5 m de longitud, determine: a) La velocidad angular de la barra AB, usando el método de los centros instantáneos de velocidad nula y b) La aceleración angular de la barra AB.



P2-42

Solución

Los dos deslizadores se encuentran en movimiento de traslación y la barra A en movimiento general en el plano.

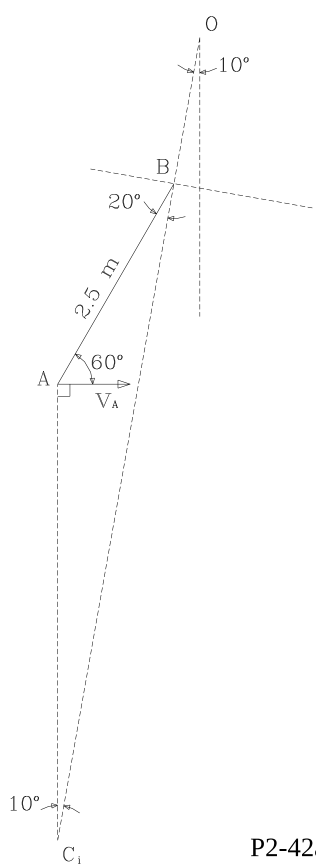
1).- Determinación del centro instantáneo y cálculos elementales (ver figura P2-42a):

Por ley de senos:

$$\frac{2.5}{sen10°} = \frac{c_1A}{sen20°} = \frac{c_1B}{sen150°}$$

$$c_1A = 4.92 \text{ m}$$

$$c_1B = 7.2 \text{ m}$$



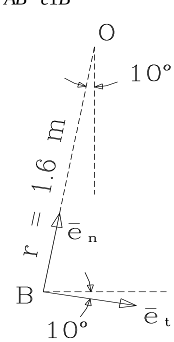
P2-42a

2).- Cálculo de la velocidad angular de AB y velocidad de B:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{c_1A} = \frac{3}{4.92} = 0.609 \text{ rad/seg}$$

$$\bar{\omega}_{AB} = -0.609\,\bar{k} \text{ (rad/seg)}$$

$$V_B = \omega_{AB} r_{c1B} = 4.385 \text{ m/seg}$$



P2-42b

3).- Cálculo de la aceleración angular de AB.-

a).- Aceleración de B, tomando como punto de referencia O (ver figura P2-42b):

$$\bar{a}_B = \alpha_{BO} r\ \bar{e}_t + \omega_{BO}^2 r\ \bar{e}_n$$

$$\bar{a}_B = \alpha_{BO} * 1.6(\cos 10°\ \bar{i} - sen10°\ \bar{j}) + \frac{V_B^2}{r}(sen10°\ \bar{i} + \cos 10°\ \bar{j})$$

$$\bar{a}_B = (1.576\ \alpha_{BO} + 2.09)\ \bar{i} + (-0.278\ \alpha_{BO} + 11.84)\ \bar{j} \quad (1)$$

b).- Aceleración de B, tomando como punto base a A:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \alpha_{AB}\bar{k}\ x\ \bar{r}_{AB} - \omega_{AB}^2 \bar{r}_{AB}$$

$$\bar{a}_B = 1.7\ \bar{i} + \alpha_{AB}\bar{k}\ x\ 2.5(\cos 60°\bar{i} + sen60°\ \bar{j}) - 0.371 * 2.5(\cos 60°\bar{i} + sen60°\ \bar{j})$$

$$\bar{a}_B = (1.7 - 2.17\alpha_{AB} - 0.464)\ \bar{i} + (1.25\alpha_{AB} - 0.803)\ \bar{j} \quad (2)$$

(1)=(2) e igualando componentes:

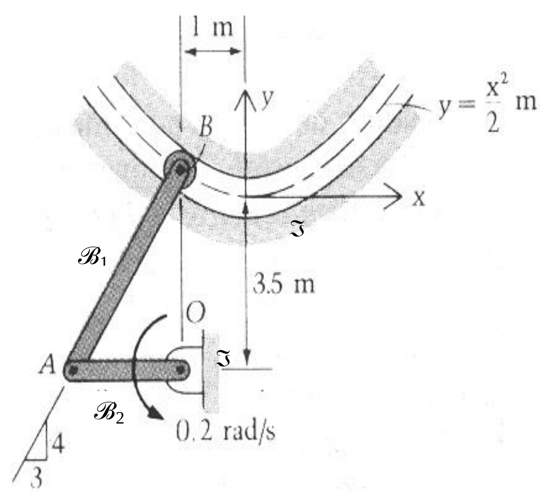
$$-0.278\alpha_{BO} + 11.84 = 1.25\alpha_{AB} - 0.803 \quad \rightarrow \quad \alpha_{BO} = -4.496\alpha_{AB} + 45.48$$

$$1.236 - 2.17\alpha_{AB} = 1.576(45.48 - 4.496\alpha_{AB}) + 2.09$$

$\alpha_{AB} = 14.75$ rad/seg^2

$\bar{\alpha}_{AB} = 14.75\ \bar{k}$ (rad/seg^2)

2-43.- El rodillo en B que se mueve en la guía parabólica está articulada a la barra $\mathscr{B}_1$, como se muestra en la figura. La barra $\mathscr{B}_1$ está articulada a $\mathscr{B}_2$ en A. La velocidad angular de $\mathscr{B}_2$ se muestra en este instante. Encuentre la velocidad de B en ese momento; usando: a) El método de los centros instantáneos de velocidad nula y b) El método vectorial.



P2-43

Solución

El rodillo en B se comporta como una partícula, la barra OA tiene un movimiento alrededor de un eje fijo y la barra AB tiene un movimiento general en el plano.

1).- Usando el método de los centros instantáneos de velocidad nula.-

a).- Determinación el centro instantáneo (ver figura P2-43a) y cálculos elementales:

Si:

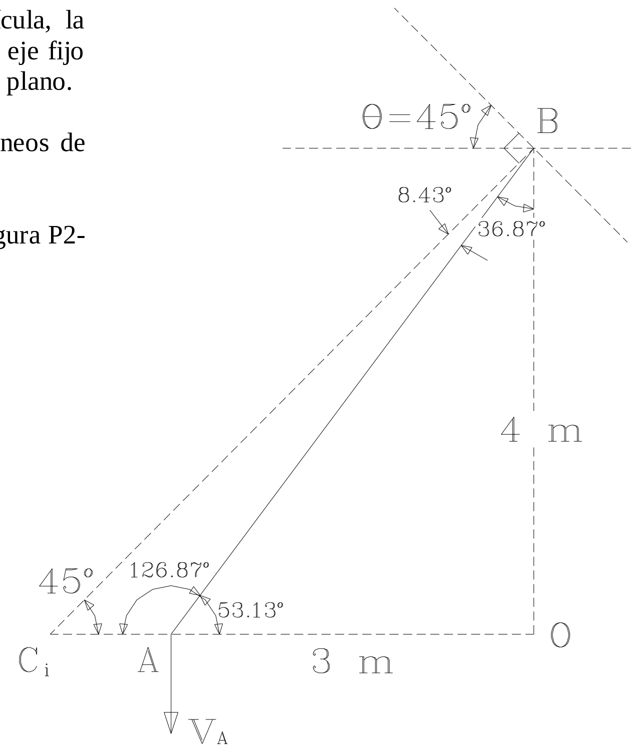
$$\frac{dY}{dX} = X \quad \text{y} \quad X = 1 \Rightarrow \quad tg\theta = \frac{dY}{dX} = 1$$

$$\therefore \quad \theta = 45°$$

Por ley de senos:

$$\frac{5}{sen45°} = \frac{c_i A}{sen8.13°} = \frac{c_i B}{sen126.87°}$$

$$c_i A = 1 \text{ m} \quad \text{y} \quad c_i B = 5.657 \text{ m}$$



P2-43a

b).- Cálculo de las velocidades de A y B:

$$V_A = \omega_{OA} r_{0a} = 0.2 * 3 = 0.6 \text{ m/seg}$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{c_i A} = \frac{0.6}{1} = 0.6 \text{ rad/seg}$$

$$V_B = \omega_{AB} c_i B = 0.6 * 5.657 = 3.394 \text{ m/seg}$$

$$\bar{V}_B = 3.394\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{j}\right) = 2.4\,\bar{i} - 2.4\,\bar{j} \text{ (m/seg)}$$

2). - Usando el método vectorial:

$$\bar{V}_A = 0.2\,\bar{k}\; x\left(-3\,\bar{i}\right) = -0.6\,\bar{j}$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \omega_{AB}\bar{k} \ x \ \bar{r}_{AB} = \bar{V}_A + \omega_{AB}\bar{k} \ x \ 5\left(\frac{3}{5}\bar{i} + \frac{4}{5}\bar{j}\right) \rightarrow \bar{V}_B = -4\,\omega_{AB}\,\bar{i} - \left(0.6 - 3\,\omega_{AB}\right)\bar{j} \quad (1)$$

Si:

$$V_B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\right) = -4\,\omega_{AB}\,\bar{i} - \left(0.6 - 3\,\omega_{AB}\right)\bar{j}$$

Igualando componentes y operando:

$$-V_B\frac{\sqrt{2}}{2} = -\left(0.6 - 3\,\omega_{AB}\right)$$

$$V_B\frac{\sqrt{2}}{2} = -4\,\omega_{AB}$$

$$-1 = \frac{0.6 - 3\,\omega_{AB}}{4\,\omega_{AB}} \quad \rightarrow \quad -4\,\omega_{AB} = 0.6 - 3\,\omega_{AB}$$

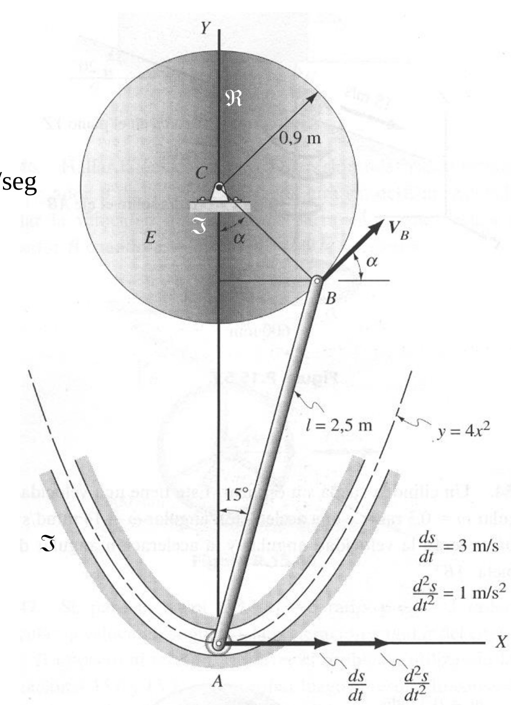
$$\omega_{AB} = -0.6 \ \text{rad/seg}$$

Luego en (1):

$$\bar{V}_B = -4*\left(-0.6\right)\bar{i} - \left(0.6 + 3*0.6\right)\bar{j}$$

$$\bar{V}_B = 2.4\,\bar{i} - 2.4\,\bar{j} \ \text{(m/seg)} \ \rightarrow \left|\bar{V}_B\right| = 3.394 \ \text{m/seg}$$

2-44.- El rodillo A se mueve por una ranura parabólica con una velocidad $\dot{s}$ = 3 m/seg y $\ddot{s}$ = 1 m/seg^2 en el instante mostrado en el diagrama. El cilindro $\Re$ está conectado con A mediante la biela AB. Hallar: a) Usando el método de los centros instantáneos de velocidad nula, la velocidad angular de la barra AB y b) Usando la ecuación general de la cinemática del cuerpo rígido, para cada caso; las aceleraciones angulares del cilindro $\Re$ y de la barra AB.

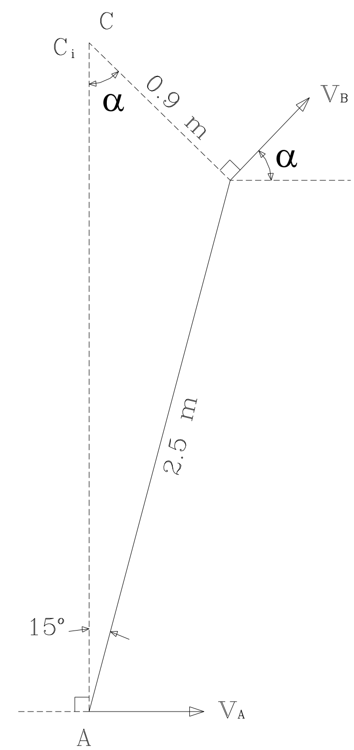


P2-44

Solución

El rodillo se comporta como una partícula, el cilindro $\Re$ tiene un movimiento alrededor de un eje fijo y la barra AB tiene un movimiento general en el plano.

1).- Determinación del centro instantáneo de velocidad nula de AB (ver figura P2-44a) y cálculos elementales:



P2-44a

Por ley de senos:

$$\frac{0.9}{sen15°} = \frac{2.5}{sen\alpha} = \frac{c_i A}{sen\beta}$$

$$sen\alpha = 0.7189 \quad \rightarrow \quad \alpha = 45.963°$$

$$\beta = 119.037°$$

$$c_i A = 3.04 \text{ m}$$

2).- Cálculo de las velocidades angulares:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{c_i A} = \frac{3}{3.04} = 0.987 \quad \text{rad/seg}$$

$$V_B = \omega_{AB}\ c_i B = 0.987 * 0.9 = 0.8883 \text{ m/seg} \quad \text{y} \quad V_B = \omega_{\Re} r_{CB} = \omega_{\Re} * 0.9 = 0.8883 \text{ m/seg}$$

Luego:

$$\omega_{\Re} = \omega_{AB} = 0.987 \quad \text{rad/seg}$$

Esto se da, si la orientación angular (α) de una línea del cilindro, respecto a un marco es igual a la de la barra como se indica en la figura, las velocidades angulares de ambos cuerpos, serán iguales (propiedad de las velocidades angulares)

3).- Cálculo de las aceleraciones angulares:

a).- Cálculo de la aceleración de B, como punto de $\Re$:

$$\bar{a}_B = \alpha_{\Re}\bar{k}\ x\ \bar{r}_{OB} - \omega_{\Re}^2 \bar{r}_{OB} = \alpha_{\Re}\bar{k}\ x\ 0.9\left(sen\ 45.963°\bar{i} - \cos 45.963°\bar{j}\right) - 0.987^2\,\bar{r}_{OB}$$

$$\bar{a}_B = \left(0.626\ \alpha_{\Re} - 0.63\right)\bar{i} + \left(0.647\alpha_{\Re} + 0.609\right)\bar{j} \qquad (1)$$

b).- Cálculo de la aceleración de B, como parte de la barra AB:

Si:

$$\bar{a}_A = \ddot{s}\,\bar{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho_c}\bar{e}_n = 1\left(\bar{i}\right) + \frac{9}{\rho_c}\,\bar{j}$$

$$\frac{1}{\rho_c} = \left| \frac{d^2Y / dX^2}{\left[1 + \left(dY / dX\right)^2\right]^{3/2}} \right| \quad \rightarrow \quad \frac{dY}{dX} = 8\,X \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = 8$$

Para, X = 0:

$$\frac{1}{\rho_c} = \left| \frac{8}{\left(1 + 64\overbrace{X^2}^{0}\right)^{3/2}} \right| = 8$$

Luego:

$$\bar{a}_A = \bar{i} + 9*8\,\bar{j} = \bar{i} + 72\,\bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \alpha_{AB}\bar{k}\ x\ \bar{r}_{AB} - \omega_{AB}^2\bar{r}_{AB} = \bar{a}_A + \alpha_{AB}\bar{k}\ x\ 2.5\left(sen15°\bar{i} + \cos 15°\,\bar{j}\right) - \omega_{AB}^2\bar{r}_{AB}$$

$$\bar{a}_B = \bar{i} + 72\,\bar{j} - 2.415\alpha_{AB}\bar{i} + 0.647\alpha_{AB} - 0.63\,\bar{i} - 2.353\,\bar{j}$$

$$\bar{a}_B = \left(0.37 - 2.415\alpha_{AB}\right)\bar{i} + \left(69.647 + 0.647\alpha_{AB}\right)\bar{j} \qquad (2)$$

(1) = (2) e igualando componentes y operando:

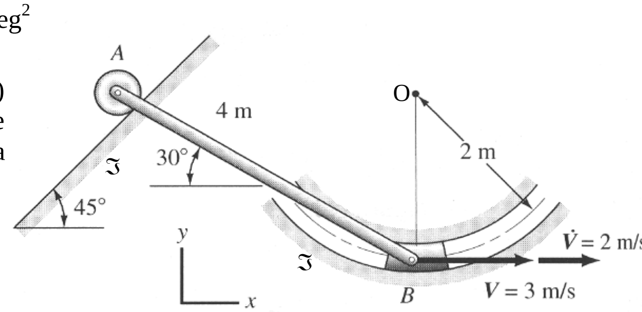
$$0.626\alpha_{\Re} - 0.63 = 0.37 - 2.415\alpha_{AB} \quad \rightarrow \quad \alpha_{\Re} = 1.597 - 3.858\,\alpha_{AB} \qquad (3)$$

$$0.647\left(1.597 - 3.858\,\alpha_{AB}\right) + 0.609 = 69.647 + 0.647\,\alpha_{AB}$$
$$-4.858\,\alpha_{AB} = 105.12 \quad \rightarrow \quad \alpha_{AB} = -21.64 \quad \text{rad/seg}^2$$

En (3):

$$\alpha_{\Re} = 1.597 + 3.858 * 21.64 = 85.08 \text{ rad/seg}^2$$

2-45.- Para la configuración dada determínese: a) usando el método de los centros instantáneos de velocidad nula, la velocidad de A, y b) la aceleración de A.

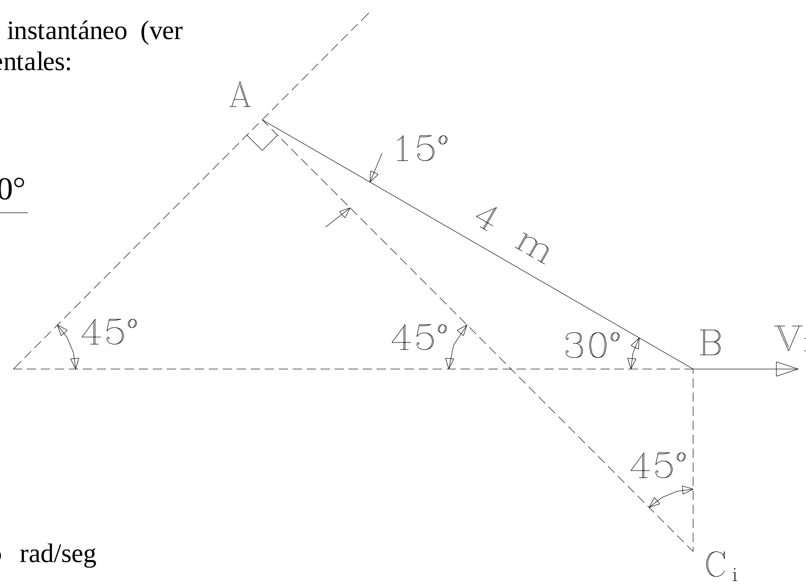


P2-45

Solución

El rodillo en A y la deslizadora en B se comportan como partículas y la barra AB tiene un movimiento general en el plano.

1).- Determinación del centro instantáneo (ver figura P2-45a) y cálculos elementales:



P2-45a

Por ley de senos:

$$\frac{sen45°}{4} = \frac{sen15°}{c_i B} = \frac{sen120°}{c_i A}$$

$$c_i B = 1.464 \text{ m}$$

$$c_i A = 4.9 \text{ m}$$

2).- Cálculo de las velocidades:

$$\omega_{AB} = \frac{V_B}{c_i B} = \frac{3}{1.464} = 2.05 \text{ rad/seg}$$

$$V_A = \omega_{AB} c_i A = 2.05 * 4.9 = 10.05 \text{ m/seg}$$

$$\bar{V}_A = 10.05\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\right) \text{ (m/seg)}$$

3).- Cálculo de la aceleración de A:

Si:

$$\bar{a}_B = \dot{V}_B\,\bar{e}_t + \frac{V_B^2}{\rho_c}\dot{e}_n = 2\,\bar{i} + \frac{9}{2}\,\bar{j} = 2\,\bar{i} + 4.5\,\bar{j} \text{ (m/seg}^2\text{)}$$

Luego:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B + \alpha_{AB}\bar{k}\ x\ \bar{r}_{BA} - \omega_{AB}^2 \bar{r}_{BA}$$

$$a_A\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{i} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{j}\right) = 2\bar{i} + 4.5\bar{j} + \alpha_{AB}\bar{k}x4\left(-\cos 30°\bar{i} + sen30\,\bar{j}\right) - 2.05^2 * 4\left(-\cos 30°\bar{i} + sen30°\,\bar{j}\right)$$

Operando e igualando componentes:

$$a_A\,\tfrac{\sqrt{2}}{2} = 16.56 - 2\,\alpha_{AB}$$

$$a_A\,\tfrac{\sqrt{2}}{2} = -3.905 - 3.464\,\alpha_{AB}$$

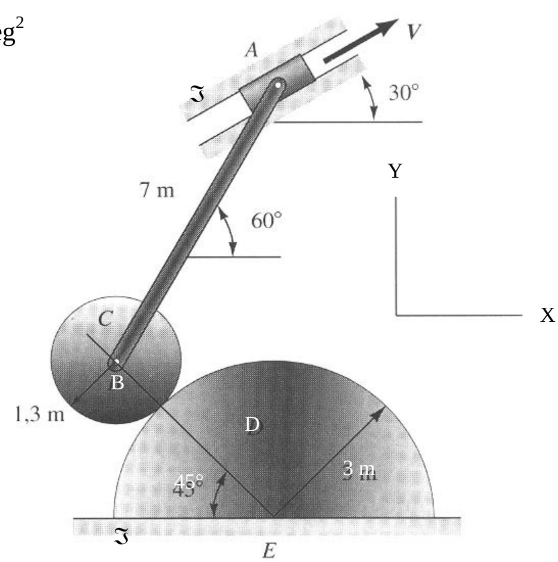
$$1 = \frac{16.56 - 2\,\alpha_{AB}}{-3.905 - 3.464\,\alpha_{AB}} \quad \rightarrow \quad -3.905 - 3.464\,\alpha_{AB} = 16.56 - 2\,\alpha_{AB}$$

$$\alpha_{AB} = -13.98 \ \text{rad/seg}^2$$

$$\therefore\ a_A\,\tfrac{\sqrt{2}}{2} = 16.56 + 2*13.98 \quad \rightarrow \quad a_A = 62.96\ \text{m/seg}^2$$

$$\bar{a}_A = 62.96\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{j}\right)\ \text{m/seg}^2$$

2-46.- Un cilindro C rueda sin deslizar sobre un semicilindro D. La biela BA tiene 7 m de longitud y está conectada en A con una deslizadora, la cual, en el instante de interés, se está moviendo por una ranura con una velocidad de 3 m/seg y una aceleración de 2 m/seg^2. Determínese: a) Usando el método de los centros instantáneos de velocidad nula, la velocidad angular del cilindro C y b) La aceleración angular del cilindro C.



P2-46

Solución

La deslizadora A se comporta como una partícula y la biela AB y el cilindro C tienen un movimiento general en el plano.

1).- Determinación de los centros instantáneos de velocidad nula (ver figura P2-46a) y cálculos elementales:

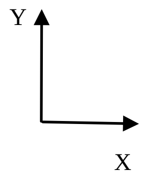
Por ley de senos:

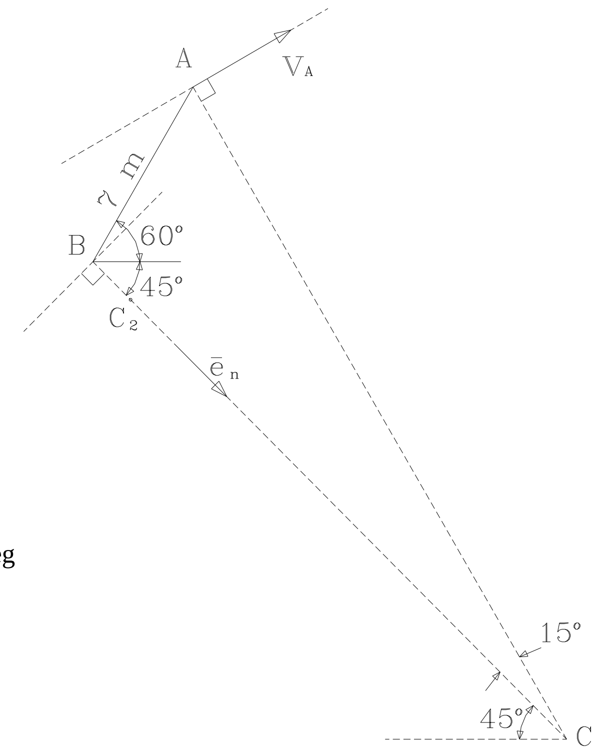
$$\frac{sen15°}{7}=\frac{sen60°}{c_1B}=\frac{sen105°}{c_1A}$$

$c_1A = 23.42$ m

$c_1B = 26.12$ m

$c_2B = 1.3$ m





P2-46a

2).- Cálculo de las velocidades:

$$\omega_{AB}=\frac{V_A}{c_1A}=\frac{3}{26.12}=0.115 \text{ rad/seg}$$

$$V_B=\omega_{AB}*c_1B=0.115*23.42=2.69 \text{ m/seg}$$

$$\omega_C=\frac{V_B}{c_2B}=\frac{2.69}{1.3}=2.07 \text{ rad/seg}$$

$$\bar{\omega}_C=-2.07\,\bar{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

3).- Cálculo de la aceleración angular de C:

a).- Cálculo de la aceleración de B, como parte de la barra AB:

$$\bar{a}_B=\bar{a}_A+\alpha_{AB}k\ x\ \bar{r}_{AB}-\omega_{AB}^2\ \bar{r}_{AB}$$

$$\bar{a}_B=2\begin{pmatrix}\cos 30°\ \bar{i}+\\ sen30°\ \bar{j}\end{pmatrix}+\alpha_{AB}\bar{k}\ x\ 7\begin{pmatrix}-\cos 60°\ \bar{i}-\\ sen60°\ \bar{j}\end{pmatrix}-0.115^2\begin{pmatrix}-\cos 60°\ \bar{i}-\\ sen60°\ \bar{j}\end{pmatrix}$$

$$\bar{a}_B=(1.778+6.062\,\alpha_{AB})\,\bar{i}+(1.08-3.5\alpha_{AB})\,\bar{j} \qquad (1)$$

b).- Cálculo de la aceleración de b, como parte del cilindro C:

$$\bar{a}_B=\alpha_C\bar{k}\ x\ \bar{r}_{c2B}+\frac{(\omega_C r_{c2B})^2}{\rho_c}\bar{e}_n=\alpha_C\bar{k}\ x\,1.3\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{i}+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{j}\right)+\frac{(2.07*1.3)^2}{4.3}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{i}-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_B=(1.19-0.92\,\alpha_C)\,\bar{i}-(1.19+0.92\,\alpha_C)\,\bar{j} \qquad (2)$$

(1) = (2) e igualando componentes y operando:

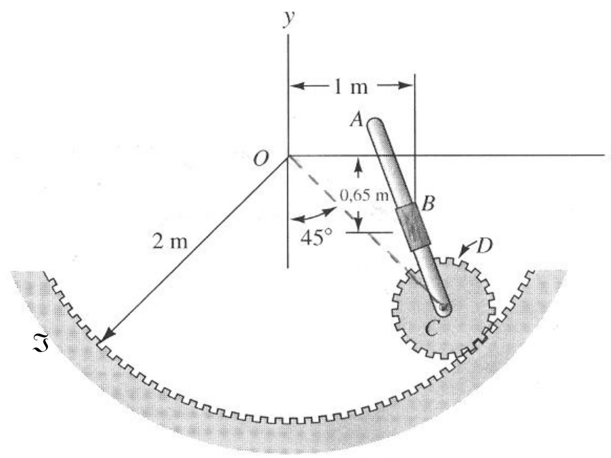
$$1.778+6.062\,\alpha_{AB}=1.19-0.92\,\alpha_C \quad \rightarrow \quad \alpha_{AB}=-0.097-0.1517\,\alpha_C$$

$$1.08+3.5\left(0.097+0.152\,\alpha_C\right)=-1.19-0.92\,\alpha_C$$

$$0.097+0.152\,\alpha_C=-0.649-0.263\,\alpha_C \quad \rightarrow \quad \alpha_C=-1.798 \text{ rad/seg}$$

$$\bar{\alpha}_C=-1.798\,\bar{k} \quad (\text{rad/seg}^2)$$

2-47.- La biela AC está conectada con un engranje D y está guiada por un collar B. El collar B solo puede girar en el plano de los engranajes. Si la velocidad angular de AC es de 5 rad/seg en el sentido de las agujas del reloj ¿Cuál será la velocidad angular del engranaje D relativa al terreno? El diámetro de paso del engranaje D es de 0.6 m.



P2-47

Solución

La biela AC y el engranaje D tienen movimiento general en el plano y el collar B un movimiento alrededor de un eje fijo.

1).- Cálculo de la velocidad de C como parte del engranaje D:

$$\bar{V}_C=\omega_D\bar{k}\ x\ \bar{r}_{ciC}=\omega_D\bar{k}\ x\ 0.3\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{i}+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_C=-0.212\,\omega_D\bar{i}-0.212\,\omega_D\,\bar{j} \qquad (1)$$

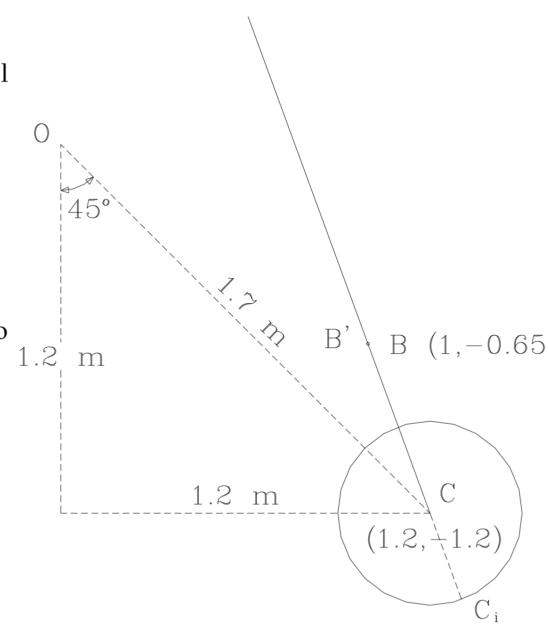
2).- Cálculo de la velocidad B' (pertenece a AC, pero coincidente con B) como parte de la biela AC:

$$\bar{V}_{B'}=\bar{V}_C+\omega_{AC}\bar{k}\ x\ \bar{r}_{CB'}$$

Si:

$$\bar{r}_{CB'}=-0.2\,\bar{i}+0.55\,\bar{j}$$

Luego:



P2-47a

$$\bar{V}_{B'} = \bar{V}_C - 5\bar{k}\ x\left(-0.2\ \bar{i} + 0.55\ \bar{j}\right) \rightarrow \bar{V}_{B'} = \left(2.75 - 0.212\omega_D\right)\bar{i} + \left(1 - 0.212\omega_D\right)\bar{j} \qquad (2)$$

3).- Cálculo de la velocidad de B’, tomando como punto base B:

$$\bar{V}_{B'} = \overbrace{\bar{V}_{B/\Im}}^{0} + \bar{V}_{B'/B} + \omega_{AC}\bar{k}\ x\ \overbrace{\bar{r}_{BB'}}^{0}$$

$$\bar{V}_{B'} = V_{B'/B}\left(-\frac{0.2}{\sqrt{0.2^2 + 0.55^2}}\ \bar{i} + \frac{0.55}{\sqrt{0.2^2 + 0.55^2}}\ \bar{j}\right) \rightarrow \bar{V}_{B'} = V_{B'}\left(-0.342\ \bar{i} + 0.94\ \bar{j}\right) \quad (3)$$

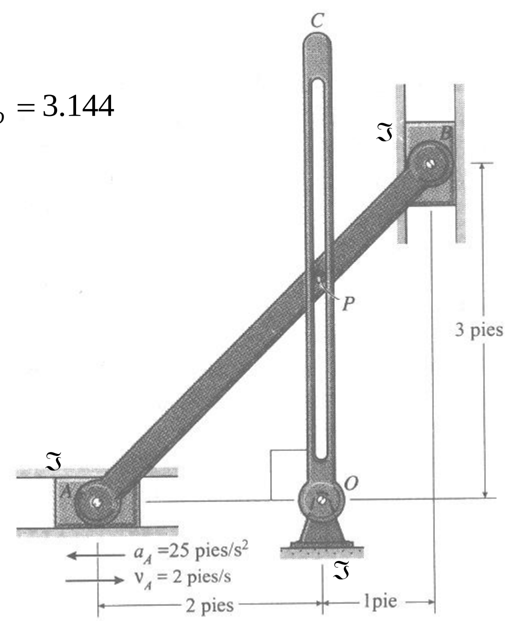
(2) = (3) e igualando componentes:

$$-0.342\,V_{B'} = 2.75 - 0.212\ \omega_D$$
$$0.94\,V_{B'} = 1 - 0.212\ \omega_D$$

$$0.363 = \frac{0.212\ \omega_D - 2.75}{1 - 0.212\ \omega_D} \quad \rightarrow \quad 0.289\ \omega_D = 3.144$$

$$\omega_D = 10.879 \text{ rad/seg}$$

2-48.- El perno P está rígidamente sujeto a la barra AB y desliza en la ranura del brazo OC. Los extremos A y B de la barra AB están sujetos a dos bloques que se mueven en ranuras, como se muestra. En la posición indicada, el bloque A se mueve hacia la derecha a una velocidad de 2 pie/seg y con una aceleración de 25 pie/seg^2. Determine la velocidad y la aceleración angulares del brazo ranurado OC, usando coordenadas polares en OC.



P2-48

Solución

Los bloques se comportan como partículas, la barra OC tiene un movimiento alrededor de un eje fijo y la barra AB tiene un movimiento general en el plano.

1).- Orientación de los vectores unitarios de las coordenadas polares en OC (ver figura P2-48a).-

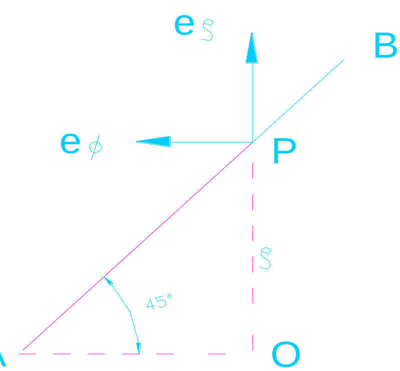
2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de P tomando como punto de referencia O:

a).- Identificación de los parámetros, que definen el movimiento:

$\rho = 2\, tg\, 45° = 2\, pies$ | $\dot{\phi} = ?$

$\dot{\rho} = ?$

$\ddot{\rho} = ?$ | $\ddot{\phi} = ?$



P2-48a

b).- Velocidad y aceleración de P:

$$\overline{V}_P = \dot{\rho}\, \overline{e}_\rho + 2\dot{\phi}\, \overline{e}_\phi \qquad (1)$$

$$\overline{a}_P = \left(\ddot{\rho} - 2\dot{\phi}^2\right)\overline{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + 2\ddot{\phi}\right)\overline{e}_\phi \qquad (2)$$

3).- Cálculo de la velocidad y aceleración de P, tomando como punto de base o conveniente A.-

Si:

$$\overline{V}_P = \overline{V}_A + \overline{\omega}_{AB} x\, \overline{r}_{AP} = -2\, \overline{e}_\phi + \omega_{AB}\ \overline{e}_b\ x\left(2\, \overline{e}_\rho - 2\, \overline{e}_\phi\right)$$

$$\overline{V}_P = 2\, \omega_{AB} \overline{e}_\rho + \left(2\omega_{AB} - 2\right)\overline{e}_\phi \qquad (3)$$

$$\overline{a}_P = \overline{a}_A + \dot{\overline{\omega}}_{AB}\ x\ \overline{r}_{AP} - \omega_{AB}^2\ \overline{r}_{AP} = 25\, \overline{e}_\phi + \alpha_{AB}\ \overline{e}_b\ x\left(2\, \overline{e}_\rho - 2\, \overline{e}_\phi\right) - \omega_{AB}^2\left(2\, \overline{e}_\rho - 2\, \overline{e}_\phi\right)$$

$$\overline{a}_P = \left(2\, \alpha_{AB} - 2\, \omega_{AB}^2\right)\overline{e}_\rho + \left(25 + 2\, \alpha_{AB} + 2\, \omega_{AB}^2\right)\overline{e}_\phi \qquad (4)$$

4).-Cálculo del movimiento angular de la barra AB, tomando como punto base A y conociendo la dirección de la velocidad y aceleración de B:

$$\overline{V}_B = V_B \overline{e}_\rho = \overline{V}_A + \overline{\omega}_{AB}\ x\ \overline{r}_{AB} = -2\, \overline{e}_\phi + \omega_{AB} \overline{e}_b\ x\left(3\, \overline{e}_\rho - 3\, \overline{e}_\phi\right) = 3\, \omega_{AB} \overline{e}_\rho + \left(3\, \omega_{AB} - 2\right)\overline{e}_\phi$$

Igualando componentes y operando:

$$3\, \omega_{AB} - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_{AB} = \frac{2}{3}\ \text{rad/seg} \quad \rightarrow \quad \overline{\omega}_{AB} = \frac{2}{3} \overline{e}_b\ \ (\text{rad/seg})$$

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \dot{\overline{\omega}}_{AB} x\, \overline{r}_{AB} - \omega_{AB}^2 \overline{r}_{AB}$$

$$\overline{a}_B = a_B\ \overline{e}_\rho = \overline{a}_A + \alpha_{AB} \overline{e}_b\ x\left(3\, \overline{e}_\rho - 3\, \overline{e}_\phi\right) - \omega_{AB}^2\left(3\, \overline{e}_\rho - 3\, \overline{e}_\phi\right)$$

$$a_B\ \overline{e}_\rho = \left(3\, \alpha_{AB} - 3\, \omega_{AB}^2\right)\overline{e}_\rho + \left(25 + 3\, \alpha_{AB} + 3\, \omega_{AB}^2\right)\overline{e}_\phi$$

Igualando componentes y operando:

$$25+3\,\alpha_{AB}+3*\frac{4}{9}=0 \quad\rightarrow\quad \alpha_{AB}=-8.78 \text{ rad/seg} \quad\rightarrow\quad \dot{\bar{\omega}}_{AB}=-08.78\,\bar{e}_b \text{ (rad/seg}^2\text{)}$$

Luego:

(1) = (3) e igualando componentes:

$$\dot{\rho}=2\omega_{AB}=\frac{4}{3} \text{ pie/seg}$$

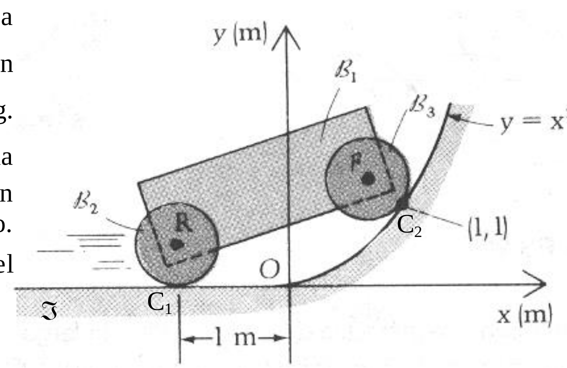
$$2\dot{\phi}=\left(\frac{4}{3}-2\right) \quad\rightarrow\quad \dot{\phi}=-0.333 \text{ rad/seg} \quad\Rightarrow\quad \bar{\omega}_{OC}=-0.333\,\bar{e}_b \text{ (rad/seg) (horario)}$$

(2) = (4) e igualando componentes:

$$2*\frac{4}{3}*(-0.333)+2\,\ddot{\phi}=25+2\,(-8.78)+2*\frac{4}{9} \quad\rightarrow\quad \ddot{\phi}=4.60 \text{ rad/seg}^2$$

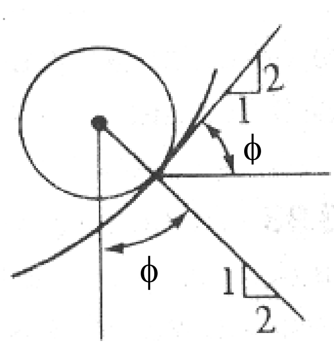
$$\dot{\bar{\omega}}_{OC}=4.60\,\bar{e}_b \text{ (rad/seg}^2\text{) (antihorario)}$$

2-49.- El carro $\mathscr{B}_1$ en la figura viaja de izquierda a la derecha, sus ruedas traseras $\mathscr{B}_2$ ruedan con velocidades angulares constantes de 0.2 ↻ rad/seg. Las ruedas delanteras $\mathscr{B}_3$ ruedan sobre la superficie parabólica mostrada. Las ruedas tienen un radio de 0.4 m y su eje se halla fijo al carro. Encuentre la velocidad angular de carro $\mathscr{B}_1$ en el instante dado.



P2-49

Sugerencia $\frac{dY}{dX}=tg\,\phi=2 \;\rightarrow\; \phi=63.43°$.

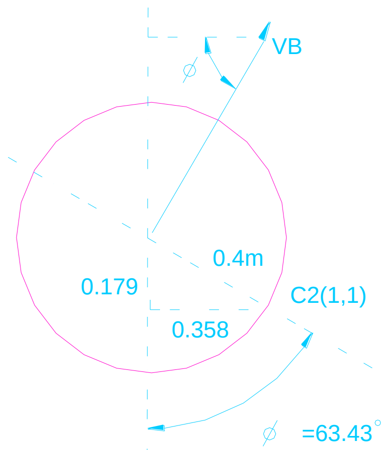


Solución

Los cuerpos se encuentran en movimiento general en el plano.

1).- Cálculo de la velocidad de A, por rodamiento de $\mathscr{B}_2$:

$$\bar{V}_A=\omega_{\beta 2}\,\bar{k}\;x\;\bar{r}_{c1A}=-0.2\,\bar{k}\;x\;0.4\;\bar{j}=0.08\,\bar{i} \text{ (m/seg)}$$



P2-49a

2).- Determinación de la dirección de la velocidad de B y del vector posición de A a B (ver figura P2-49a):

$$A(-1\,,0.4)$$

$$B(0.642\,,1.179)$$

$$\bar{r}_{AB} = 1.642\,\bar{i} + 0.779\,\bar{j} \quad \text{(m)}$$

$$\bar{V}_B = V_B\left(\cos 63.43°\,\bar{i} + sen 63.43°\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_B = V_B\left(0.447\,\bar{i} + 0.894\,\bar{j}\right) \quad \text{(m/seg)}$$

3).- Cálculo de la velocidad angular de $\mathscr{B}_1$.-

Si:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \omega_1\bar{k}\ x\ \bar{r}_{AB} = 0.08\,\bar{i} + \omega_1\bar{k}\ x\ \left(1.642\,\bar{i} + 0.779\,\bar{j}\right)$$

$$V_B\left(\cos 63.43°\bar{i} + sen 63.43°\,\bar{j}\right) = \left(0.08 - 0.779\omega_1\right)\bar{i} + 1.642\,\bar{j}$$

Igualando componentes y operando:

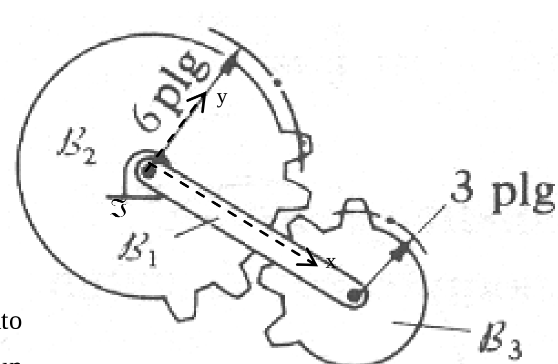
$$V_B sen 63.43° = 1.642\,\omega_1$$

$$V_B \cos 63.43° = \left(0.08 - 0.779\,\omega_1\right)$$

$$tg\ 63.43° = tg\phi = 2 = \frac{1.642\,\omega_1}{0.08 - 0.779\,\omega_1} \quad \rightarrow \quad 0.16 - 1.558\,\omega_1 = 1.642\,\omega_1$$

$$\omega_1 = 0.05 \ \text{rad/seg} \quad \rightarrow \quad \bar{\omega}_1 = 0.05\,\bar{k} \ \text{(rad/seg)}$$

2-50.- En el instante mostrado en la figura, la barra $\mathscr{B}_1$ tiene $\omega_1 = \pi$ ↺ (rad/seg) y $\alpha_1 = \pi/3$ ↻ (rad/seg^2), el engranaje $\mathscr{B}_2$ tiene $\omega_2 = 2$↻ (rad/seg) y $\alpha_2 = \pi/2$ ↺ (rad/seg^2). En este instante, determinar las aceleraciones de cada uno de los puntos de contacto en los dientes.

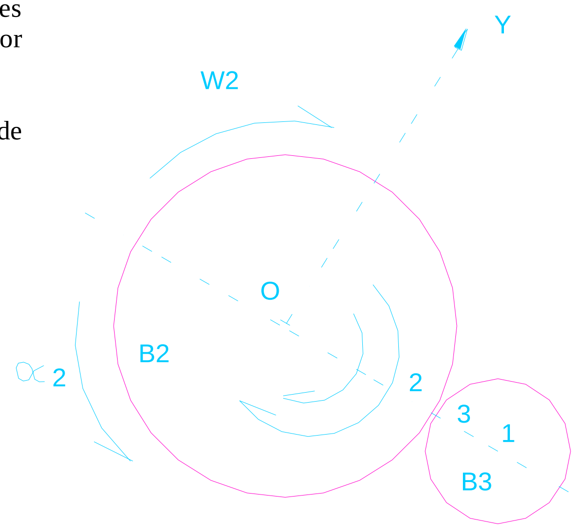


P2-50

Solución

La barra $\mathscr{B}_1$ y el engranaje $\mathscr{B}_2$ tienen movimiento alrededor de un eje fijo, pero el engranaje $\mathscr{B}_3$ tiene un movimiento general en el plano. Las aceleraciones en los puntos de contacto de los engranajes son iguales solo en sus componentes tangenciales, esto por rodamiento.

1).- Representando a los engranajes por sus círculos de paso (ver figura P2-50a):



P2-50a

2).- Cálculo de la velocidad angular de $\mathscr{B}_{3}$.-

Sabemos por rodamiento, que:

$$\overline{V}_3 = \overline{V}_2$$

$$\overline{V}_2 = \overline{\omega}_2 x\, \overline{r}_{O2} = -2\pi\, \overline{k}\ x\ 6\, \overline{i} = -12\pi\ \overline{j}\ \text{(m/seg)}$$

Si:

$$\overline{V}_1 = \overline{\omega}_1 x\, \overline{r}_{O1} = \pi\, \overline{k}\ x\ 9\, \overline{i} = 9\ \pi\ \overline{j}\ \ \text{(m/seg)}$$

$$\overline{V}_3 = \overline{V}_1 + \overline{\omega}_3\ x\ \overline{r}_{13} = 9\pi\ \overline{j} + \omega_3 \overline{k}\ x\left(-3\, \overline{i}\right)$$

$$\overline{V}_3 = 9\ \pi\ \overline{j} - 3\ \omega_3\ \overline{j}$$

Luego:

$$-12\ \pi\ \overline{j} = 9\ \pi\ \overline{j} - 3\ \omega_3\ \overline{j}$$

$$\omega_3 = 7\ \pi\ \ \text{rad/seg}\ \ \rightarrow\ \ \overline{\omega}_3 = 7\ \pi\ \overline{k}\ \ \text{(rad/seg)}$$

3).- Cálculo de las aceleraciones:

a).- Aceleración de 2:

$$\overline{a}_2 = \overline{\alpha}_2 x\, \overline{r}_{O2} - \omega_2^2\ \overline{r}_{O2} = \frac{\pi}{2}\, \overline{k}\ x\ 6\, \overline{i} - 4\ \pi^2\left(6\, \overline{i}\right)$$

$$\overline{a}_2 = -24\ \pi^2 \overline{i} + 3\ \pi\ \overline{j}\ \ \text{(plg/seg}^2\text{)}\quad \rightarrow\quad \left|\overline{a}_2\right| = 237.06\ \ \text{plg/seg}^2$$

$$a_{2t} = 3\ \pi\ \ \text{(plg/seg}^2\text{)} \qquad (1)$$

b).- Aceleración de 1:

$$\bar{a}_1 = \bar{\alpha}_1 \; x \; \bar{r}_{O1} - \omega_1^2 \; \bar{r}_{O1} = -\frac{\pi}{3} \bar{k} \; x \left(9 \; \bar{i}\right) - \pi^2 \left(9 \; \bar{i}\right) = -9 \; \pi^2 \; \bar{i} - 3 \; \pi \; \bar{j} \quad \text{(plg/seg}^2\text{)}$$

c).- Aceleración de 3:

$$\bar{a}_3 = \bar{a}_1 + \alpha_3 \bar{k} \; x \; \bar{r}_{13} - \omega_3^2 \; \bar{r}_{13} = -9 \; \pi^2 \; \bar{i} - 3 \; \pi \; \bar{j} + \alpha_3 \bar{k} \; x \left(-3 \; \bar{i}\right) - 49 \; \pi^2 \left(-3 \; \bar{i}\right)$$

$$\bar{a}_3 = 138 \; \pi \; \bar{i} - 3 \left(\pi + \alpha_3\right) \bar{j} \quad \text{(plg/seg}^2\text{)} \quad \rightarrow \quad a_{3t} = -3 \left(\pi + \alpha_3\right) \quad \text{(plg/seg}^2\text{)} \qquad (2)$$

(1) = (2):

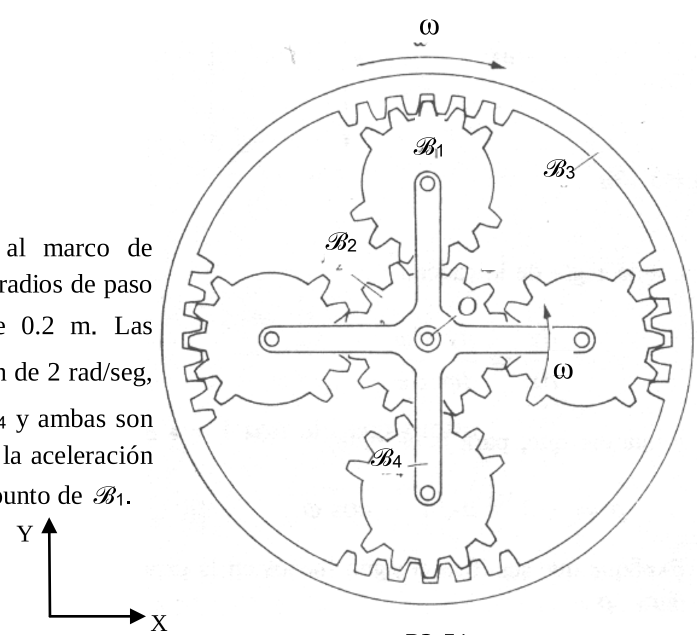
$$3 \; \pi = -3 \left(\pi + \alpha_3\right) \quad \rightarrow \quad \alpha_3 = -2 \; \pi \quad \text{rad/seg}^2$$

Luego:

$$\bar{a}_3 = 138 \; \pi^2 \; \bar{i} + 3 \; \pi \; \bar{j} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

$$\left|\bar{a}_3\right| = 1362.04 \quad \text{plg/seg}^2$$

2-51.- El punto O está articulado al marco de referencia $\Im$ (ver figura P2-51). Los radios de paso de los engranajes $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ son de 0.2 m. Las velocidades angulares de $\mathscr{B}_3$ y $\mathscr{B}_4$ son de 2 rad/seg, horario para $\mathscr{B}_3$ y antihorario para $\mathscr{B}_4$ y ambas son constantes. Encuentre la magnitud de la aceleración máxima experimentada por cualquier punto de $\mathscr{B}_1$.



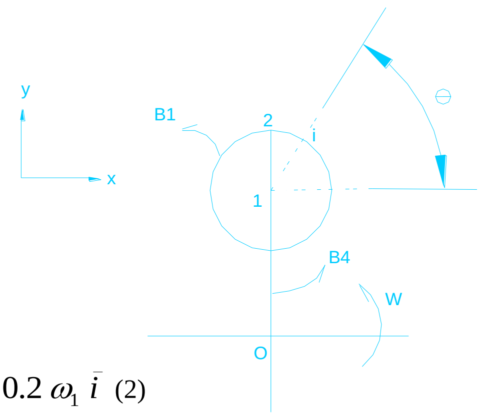
P2-51

Solución

Los engranajes $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$ y el mecanismo $\mathscr{B}_4$ tienen movimiento alrededor de un eje fijo, pero el engranaje $\mathscr{B}_1$ tiene movimiento general en el plano.

1).- Cálculo de la velocidad y aceleración angulares de $\mathscr{B}_1$ (ver figura P2-51a).-

Si:



P2-51a

$$\bar{V}_1 = \omega_4 \bar{k}\ x\ \bar{r}_{O1} = 2\ \bar{k}\ x\ 0.4\ \bar{j} = -0.8\ \bar{i}\quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{V}_2 = \omega_3 \bar{k}\ x\ \bar{r}_{O2} = -2\ \bar{k}\ x\ 0.6\ \bar{j} = 1.2\ \bar{i}\quad \text{(m/seg)}\quad (1)$$

También:

$$\bar{V}_2 = \bar{V}_1 + \omega_1 \bar{k}\ x\ \bar{r}_{12} = -0.8\ \bar{i} + \omega_1 \bar{k}\ x\ 0.2\ \bar{j} = -0.8\ \bar{i} - 0.2\ \omega_1\ \bar{i}\quad (2)$$

(1) = (2):

$$1.2 = -0.8 - 0.2\ \omega_1 \quad \rightarrow \quad \omega_1 = -10 \text{ rad/seg} \quad \rightarrow \bar{\omega}_1 = -10\ \bar{k}\quad \text{(rad/seg)}$$

Como las velocidades angulares son constantes la aceleración angular de $\mathscr{B}_1$, será nula la que demostraremos.-

Si:

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_{1/4} + \bar{\omega}_4 = \omega_{1/4} \bar{k} + \omega\ \bar{k}$$

Derivándole con respecto al tiempo en $\Im$:

$$\dot{\bar{\omega}}_1 = \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{1/2}}^{0} + \overbrace{\omega\ \bar{k}\ x \omega_{1/2} \bar{k}}^{0} + \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_4}^{0} = \bar{0}$$

2).- Cálculo de la aceleración de un punto iésimo de la superficie del engranaje $\mathscr{B}_1$ (donde se encontrará la aceleración máxima).-

Si:

$$\bar{a}_1 = -\omega^2 \bar{r}_{O1} = -4\left(0.4\ \bar{j}\right) = -1.6\ \bar{j}\quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

Luego:

$$\bar{a}_i = \bar{a}_1 - \omega_1^2\ \bar{r}_{1i} = -1.6\ \bar{j} - 100 * 0.2\left(\cos\theta\ \bar{i} + sen\theta\ \bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_i = -20\cos\theta\ \bar{i} - \left(1.6 + 20 sen\theta\right)\bar{j}$$

Para: $\theta = 0°$

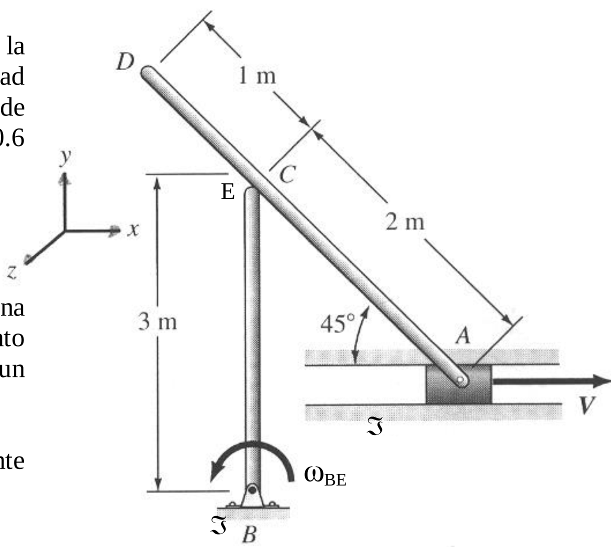
$$\bar{a}_{i\,\theta=0°} = -20\,\bar{i} - 1.6\,\bar{j} \quad \rightarrow \quad \left|\bar{a}_{1\,\theta=0°}\right| = 20.064 \ \text{m/seg}^2$$

Para: $\theta = 90°$

$$\bar{a}_{i\,\theta=90°} = -21.6\,\bar{j} \quad \rightarrow \quad \left|\bar{a}_{i\,\theta=90°}\right| = 21.6 \ \text{m/seg}^2$$

$\therefore \quad a_{máx} = 21.6$ m/seg^2 de un punto de $\mathscr{B}_1$ con otro en contacto de $\mathscr{B}_3$

2-52.- ¿Cuál es la velocidad angular de la barra AD? ¿Cuál es el módulo de la velocidad del punto C de la barra AD? En el instante de interés la barra BE está vertical. Si: V = 0.6 m/seg y ω_{BE} = 1 rad/seg.



P2-52

Solución

La corredera A se comporta como una partícula, la barra AD tiene un movimiento general en el plano y la barra BE tiene un movimiento alrededor de un eje fijo.

1).- Cálculo de la velocidad de E, coincidente con C:

$$\bar{V}_E = \bar{\omega}_{BE}\, x\, \bar{r}_{BE} = \bar{k}\ x\ 3\ \bar{j} = -3\,\bar{i} \quad \text{(m/seg)}$$

2).- Cálculo de la velocidad de C, tomando como punto base A:

$$\bar{V}_C = \bar{V}_A + \omega_{AD}\bar{k}\ x\ \bar{r}_{AC} = 0.6\,\bar{i} + \omega_{AD}\bar{k}\ x\ 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_C = \left(0.6 - \sqrt{2}\,\omega_{AD}\right)\bar{i} - \sqrt{2}\,\omega_{AD}\,\bar{j} \qquad (1)$$

3).- Cálculo de la velocidad de C, tomando como marco móvil a la barra BE:

$$\bar{V}_C = \bar{V}_E + \bar{V}_{C/BE} = -3\,\bar{i} + V_{C/BE}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} V_{C/BE} - 3 \right) \bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} V_{C/BE} \, \bar{j} \qquad (2)$$

(1)=(2) e igualando componentes:

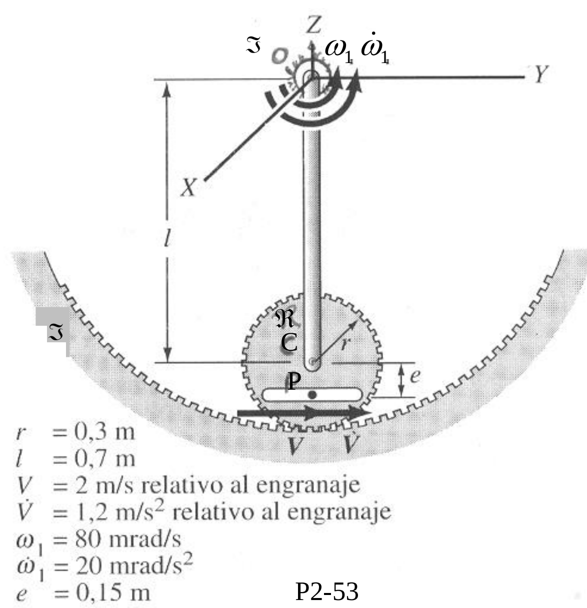
$$-\sqrt{2}\,\omega_{AD} = -\frac{\sqrt{2}}{2} V_{C/BE} \quad \rightarrow \quad V_{C/BE} = 2\,\omega_{AD}$$

$$\left(0.6 - \sqrt{2}\,\omega_{AD}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} * 2\,\omega_{AD} - 3 \right) \quad \rightarrow \quad 2\sqrt{2}\,\omega_{AD} = 3.6 \quad \rightarrow \quad \omega_{AD} = 1.273 \quad \text{rad/seg}$$

En (1):

$$\bar{V}_C = \left(0.6 - \sqrt{2} * 1.273\right)\bar{i} - \sqrt{2} * 1.273\,\bar{j} = -1.2\,\bar{i} - 1.8\,\bar{j} \ \text{(m/seg)} \quad \rightarrow \quad \left|\bar{V}_C\right| = 2.163 \ \text{m/seg}$$

2-53.- Una partícula P se mueve en una ranura del engranaje con una velocidad V = 2 m/seg y una aceleración $\dot{V}$ = 1.2 m/seg^2 ambas relativas al engranaje. Hallar el vector aceleración para la partícula relativa al sistema de referencia XYZ anclado al terreno en la configuración que se muestra.



P2-53

Solución

La barra OC tiene un movimiento alrededor de un eje fijo y el engranje un movimiento general en el plano con rodamiento.

1).- Cálculo de la velocidad y aceleración del centro C del engranaje:

$$\bar{V}_C = \bar{\omega}_1 \ x \ \bar{r}_{OC} = 0.08\,\bar{i} \ x \left(-0.7\,\bar{k}\right) = 0.056\,\bar{j} \ \text{(m/seg)} \qquad (1)$$

$$\bar{a}_C = \dot{\bar{\omega}}_1 \ x \ \bar{r}_{OC} - \omega_1^2 \ \bar{r}_{OC} = 0.02 \ \bar{i} \ x \left(-0.7 \ \bar{k}\right) - 0.08^2 \left(-0.7 \ \bar{k}\right)$$

$$\bar{a}_C = 0.014 \ \bar{j} + 4.48x10^{-3} \ \bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)} \qquad (2)$$

2).- Cálculo del movimiento angular del engranaje:

De (1), por rodamiento:

$$\omega_2 = \frac{V_C}{r_{ciC}} = \frac{0.056}{0.3} = 0.1867 \quad \text{rad/seg}$$

Si:

$$\bar{a}_C = \alpha_2 r \ \bar{e}_t + \frac{(\omega_2 r)^2}{\rho_c} \ \bar{e}_n = 0.3\alpha_2 \ \bar{j} + \frac{(0.3 * 0.1867)^2}{0.7} \ \bar{k}$$

$$\bar{a}_C = 0.3 \ \alpha_2 \ \bar{j} + 4.48x10^{-3} \ \bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)} \qquad (3)$$

(2) = (3) e igualando componentes en $\bar{j}$:

$$0.3 \ \alpha_2 = 0.014 \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = 0.0467 \ \text{(rad/seg}^2\text{)} \ \rightarrow \ \bar{\alpha}_2 = -0.0467 \ \bar{i} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

3).- Cálculo de la aceleración de P en $\Im$, si P’ pertenece al engranaje, pero coincidente con P:

$$\bar{a}_{P/\Im} = \bar{a}_{P/\Re} + \bar{a}_{P'/\Im} + 2 \ \bar{\omega}_2 \ x \ \bar{V}_{P/\Re}$$

Donde:

$$\bar{a}_{P/\Re} = \dot{\bar{V}} = 1.2 \ \bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{a}_{P'/\Im} = \bar{a}_C + \alpha_2 \ \bar{i} \ x \ \bar{r}_{CP'} - \omega_2^2 \ \bar{r}_{CP'} = \bar{a}_C - 0.0467 \ \bar{i} \ x \left(-0.15 \ \bar{k}\right) - 0.1867^2 \left(-0.15 \ \bar{k}\right)$$

$$\bar{a}_{P'/\Im} = \left(0.014 - 7x10^{-3}\right) \bar{j} + (5.23 + 4.48)x10^{-3} \ \bar{k} = 7x10^{-3} \ \bar{j} + 9.71x10^{-3} \ \bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

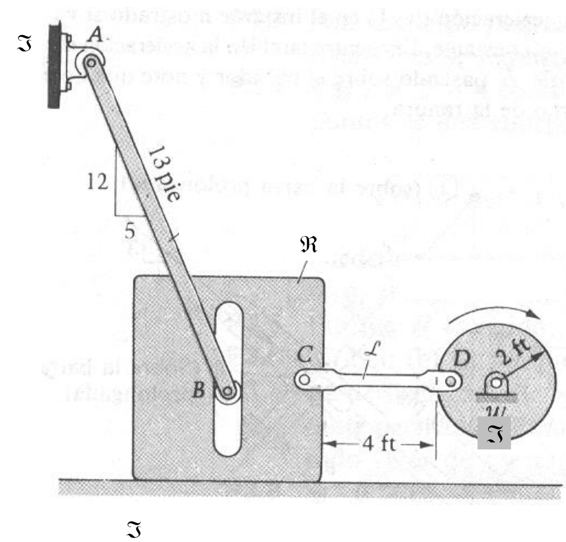
$$2 \ \bar{\omega}_2 \ x \ \bar{V}_{P/\Re} = -0.3734 \ \bar{i} \ x \ 2 \ \bar{j} = -0.7468 \ \bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

Luego:

$$\bar{a}_{P/\Im} = 1.2\ \bar{j} + 7x10^{-3}\ \bar{j} + 9.71x10^{-3}\ \bar{k} - 0.7468\ \bar{k}$$

$$\bar{a}_{P/\Im} = 1.207\ \bar{j} - 0.737\ \bar{k} \quad (\text{m/seg}^2)$$

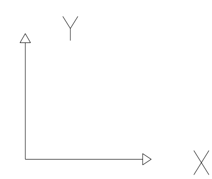
2-54.- La rueda D en la figura tiene una velocidad angular horaria constante de 2 rad/seg, está conectada por el eslabón DC al bloque $\Re$. El extremo B de la barra AB desliza en una ranura vertical en el bloque $\Re$. Para la posición mostrada, encuentre la velocidad angular y la aceleración angular de la barra AB. Si el bloque $\Re$ se traslada.



P2-54

Solución

El bloque $\Re$ tiene un movimiento de traslación rectilínea, el disco D y la barra AB tienen movimiento de rotación alrededor de un eje fijo y la barras DC tiene movimiento general en el plano.



1).- Cálculo de la velocidad y aceleración de B, tomando como punto de referencia A:

$$\bar{V}_B = \bar{\omega}_{AB} x\ \bar{r}_{AB} = \omega_{AB}\bar{k}\ x\ 13\left(\tfrac{5}{13}\ \bar{i} - \tfrac{12}{13}\ \bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_B = 12\ \omega_{AB}\ \bar{i} + 5\ \omega_{AB}\ \bar{j} \tag{1}$$

$$\bar{a}_B = \alpha_{AB}\bar{k}\ x\ \bar{r}_{AB} - \omega_{AB}^2\ \bar{r}_{AB}$$

$$\bar{a}_B = \alpha_{AB}\bar{k}\ x\ \left(5\ \bar{i} - 12\ \bar{j}\right) - \omega_{AB}^2\left(5\ \bar{i} - 12\ \bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_B = \left(12\alpha_{AB} - 5\omega_{AB}^2\right)\bar{i} + \left(5\alpha_{AB} + 12\omega_{AB}^2\right)\bar{j} \tag{2}$$

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de B, tomando como marco móvil $\Re$; si B' es un punto coincidente con B, pero perteneciente a $\Re$, luego $\bar{V}_{B'} = \bar{V}_C$ y $\bar{a}_{B'} = \bar{a}_C$:

a).- Cálculo de la velocidad y aceleración de D en $\Im$:

$$\overline{V}_D = \overline{\omega}_D x\, \overline{r}_{OD} = -2\,\overline{k}\; x\left(-2\,\overline{i}\right) = 4\;\overline{j} \quad \text{(pie/seg)}$$

$$\overline{a}_D = -\omega_D^2\; \overline{r}_{OD} = -4\left(-2\,\overline{i}\right) = 8\,\overline{i} \quad \text{(pie/seg}^2\text{)}$$

b).- Cálculo de la velocidad y aceleración de C en $\Im$:

$$\overline{V}_C = \overline{V}_D + \overline{\omega}_{DC} x\, \overline{r}_{DC} = 4\;\overline{j} + \omega_{DC}\overline{k}\; x\left(-4\,\overline{i}\right) = 4\;\overline{j} - 4\,\omega_{DC}\;\overline{j}$$

$$V_C\;\overline{i} = 4\left(1-\omega_{DC}\right)\overline{j}$$

Igualando componentes:

$$V_C = 0$$

$$1-\omega_{DC} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_{DC} = 1 \;\; \text{rad/seg}$$

Luego:

$$\overline{V}_C = \overline{0} \;\; \text{y} \;\; \overline{\omega}_{DC} = \overline{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\overline{a}_C = \overline{a}_D + \overline{\alpha}_{DC} x\, \overline{r}_{DC} - \omega_{DC}^2\; \overline{r}_{DC} = 8\,\overline{i} + \alpha_{DC}\overline{k}\; x\left(-4\,\overline{i}\right) - 1\left(-4\,\overline{i}\right)$$

$$a_C\;\overline{i} = 12\,\overline{i} - 4\,\alpha_{DC}\;\overline{j}$$

Igualando componentes:

$$a_C = 12 \;\; \text{pie/seg}^2 \;\; \text{y} \;\; \alpha_{DC} = 0$$

Luego:

$$\overline{a}_C = 12\,\overline{i} \quad \text{(pie/seg}^2\text{)}$$

c).- Cálculo de la velocidad y aceleración de B en $\Im$:

$$\overline{V}_B = \overbrace{\overline{V}_C}^{0} + \overline{V}_{B/\Re} = V_{B/\Re}\;\overline{j} \qquad (3)$$

(1) = (3):

$$V_B\ \bar{j} = 12\,\omega_{AB}\ \bar{i} - 5\,\omega_{AB}\ \bar{j}$$

Igualando componentes:

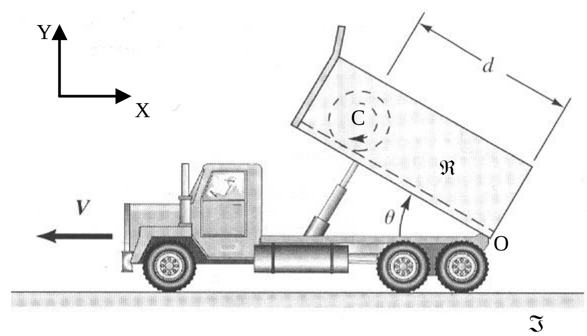
$$\omega_{AB} = 0 \ \text{ y } \ V_B = 0$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}_{B/\Re} + 2\,\overbrace{\bar{\omega}_{AB}}^{0}\, x\, \bar{V}_{B/\Re} = 12\,\bar{i} + a_{B/\Re}\ \bar{j} \qquad (4)$$

(2)=(4):

$$12\,\alpha_{AB} = 12 \quad \rightarrow \quad \alpha_{AB} = 1 \ \text{rad/seg}^2 \quad \rightarrow \quad \bar{\alpha}_{AB} = \bar{k} \ (\text{rad/seg}^2)$$

2-55.- En el instante "t" un camión se está moviendo con una velocidad constante V = 1.7 m/seg. El volquete del camión tiene en ese instante una velocidad angular constante $\dot{\theta}$ de 0.1 rad/seg con un ángulo θ = 45°. Un cilindro de 300 mm de radio rueda sin deslizar por el volquete con una velocidad angular ω_1 de 1 rad/seg y acelera a un ritmo $\dot{\omega}_1$ de 0.5 rad/seg^2, ambas relativos al volquete. ¿Cuáles serán la velocidad y aceleración del centro C del cilindro relativos al terreno en ese instante t? En dicho instante la distancia "d" es de 5 m.



P2-55

Solución

El camión se encuentra en movimiento de traslación, el volquete y el cilindro en movimiento general en el plano.

1).- Cálculo del movimiento del punto conveniente O y del marco móvil volquete ℜ:

$$\bar{V}_{O/\Im} = -1.7\,\bar{i} \ \ (\text{m/seg}) \ \text{ y } \ \bar{a}_{O/\Im} = \bar{0}$$

$$\bar{\omega}_{\Re/\Im} = -0.1\,\bar{k} \ \ (\text{rad/seg}) \ \text{ y } \ \dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im} = \bar{0}$$

2).- Cálculo del movimiento del centro C del cilindro respecto al volquete (por rodamiento) ℜ:

$$\bar{r}_{OC} = \bar{r}_{Oci} + \bar{r}_{ciC} = 5\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{i} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{j}\right) + 0.3\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{i} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{j}\right) = -3.323\,\bar{i} + 3.748\,\bar{j} \ \ (\text{m})$$

$$\bar{V}_{C/\Re} = \bar{\omega}_1 x\, \bar{r}_{ciC} = -\bar{k}\ x\ 0.3\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \bar{i} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \bar{j}\right) = 0.212\ \bar{i} - 0.212\ \bar{j} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{a}_{C/\Re} = \dot{\omega}_1 * r_{ciC}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \bar{i} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \bar{j}\right) = 0.5*0.3\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \bar{i} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \bar{j}\right) = 0.106\ \bar{i} - 0.106\ \bar{j} \quad (\text{m/seg}^2)$$

3).- Cálculo de la velocidad y aceleración de C respecto al terreno:

$$\bar{V}_C = \bar{V}_{O/\Im} + \bar{\omega}_{\Re/\Im}\, x\, \bar{r}_{OC} + \bar{V}_{C/\Re} = -1.7\ \bar{i} - 0.1\ \bar{k}\ x\left(-3.323\ \bar{i} + 3.748\ \bar{j}\right) + 0.212\ \bar{i} - 0.212\ \bar{j}$$

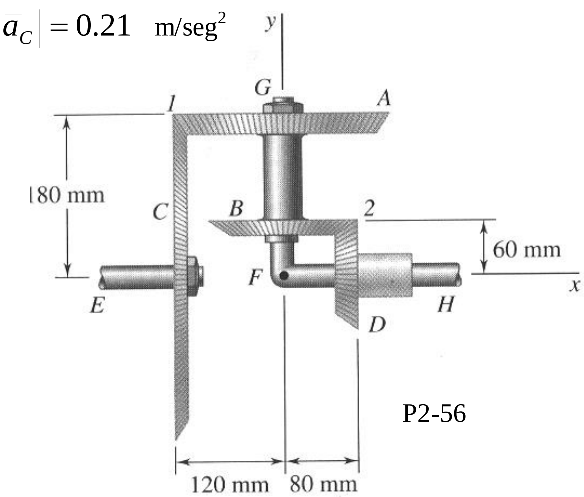
$$\bar{V}_C = -1.113\ \bar{i} + 0.1203\ \bar{j} \quad \text{(m/seg)} \quad \rightarrow \quad \left|\bar{V}_C\right| = 1.12 \ \text{ m/seg}$$

$$\bar{a}_C = \overbrace{\bar{a}_{O/\Im}}^{0} + \bar{a}_{C/\Re} + \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im}}^{0}\, x\, \bar{r}_{OC} - \omega^2_{\Re/\Im}\ \bar{r}_{OC} + 2\ \bar{\omega}_{\Re/\Im}\, x\, \bar{V}_{C/\Re}$$

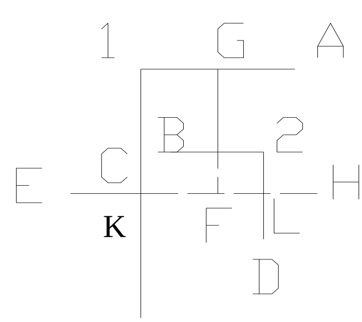
$$\bar{a}_C = 0.106\ \bar{i} - 0.106\ \bar{j} - (-0.1)^2 * \left(-3.323\ \bar{i} + 3.748\ \bar{j}\right) - 0.2\ \bar{k}\ x\left(0.212\ \bar{i} - 0.212\ \bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_C = 0.0968\ \bar{i} - 0.1859\ \bar{j} \quad (\text{m/seg}^2) \quad \rightarrow \quad \left|\bar{a}_C\right| = 0.21 \ \text{ m/seg}^2$$

2-56.- En el tren planetario representado, los engranajes A y B están rígidamente conectados entre sí y gira como un todo alrededor del árbol FG. Los engranajes C y D rotan con las velocidades angulares respectivas de 15 rad/seg y 30 rad/seg, ambas de sentido antihorario vistas desde la derecha, hallar: a) La velocidad angular común de los engranajes A y B, b) La aceleración angular común de los engranajes A y B y c) La aceleración del diente del engranaje B en contacto con el engranaje D en el punto 2.



P2-56



P2-56a

Solución

Los engranajes C y D se encuentran en movimiento alrededor de sus ejes fijos, y los engranajes A y B, que conforman un cuerpo tienen un movimiento alrededor de un punto fijo F:

1).- Cálculo de la velocidad angular común de A y B en $\Im$ (ver figura P2-56a).-

a).- Cálculo de las velocidades de 1 y 2, de C y D (por rodamiento) respectivamente en $\Im$:

$$\overline{V}_1 = \overline{\omega}_C x\, \overline{r}_{K1} = 15\,\overline{i}\; x\; 0.18\;\overline{j} = 2.7\,\overline{k}\;\text{ (m/seg)} \qquad (1)$$

$$\overline{V}_2 = \overline{\omega}_D x\, \overline{r}_{L2} = 30\,\overline{i}\; x\; 0.06\;\overline{j} = 1.8\,\overline{k}\;\text{ (m/seg)} \qquad (2)$$

b).- Cálculo de las velocidades de 1 y 2, de A y B (por rodamiento) respectivamente en $\Im$:

$$\overline{V}_1 = \overline{\omega}_A x\, \overline{r}_{F1} = \left(\overline{\omega}_{A/FH} + \overline{\omega}_{FH/\Im}\right) x\, \overline{r}_{F1} = \left(\omega_{A/FH}\,\overline{j} + \omega_{FH/\Im}\,\overline{i}\right) x \left(-0.12\,\overline{i} + 0.18\,\overline{j}\right)$$

$$\overline{V}_1 = 0.12\,\omega_{A/FH}\,\overline{k} + 0.18\,\omega_{FH/\Im}\,\overline{k} = \left(0.12\,\omega_{A/FH} + 0.18\omega_{FH/\Im}\right)\overline{k} \qquad (3)$$

$$\overline{V}_2 = \overline{\omega}_A x\, \overline{r}_{F2} = \left(\omega_{A/FH}\,\overline{j} + \omega_{FH/\Im}\,\overline{i}\right) x \left(0.08\,\overline{i} + 0.06\,\overline{j}\right)$$

$$\overline{V}_2 = \left(-0.08\,\omega_{A/FH} + 0.06\,\omega_{FH/\Im}\right)\overline{k} \qquad (4)$$

Como (1)=(3) y (2)=(4), se tiene:

$$\left(2.7 = 0.12\,\omega_{A/FH} + 0.18\,\omega_{FH/\Im}\right) * 0.08$$

$$\left(1.8 = -0.08\,\omega_{A/FH} + 0.06\,\omega_{FH/\Im}\right) * 0.12$$

$$0.423 = 0.0216\,\omega_{FH/\Im} \quad \rightarrow \quad \omega_{FH/\Im} = 20 \;\text{ rad/seg} \quad \text{y} \quad \omega_{A/FH} = -7.5 \;\text{ rad/seg}$$

$$\therefore \quad \overline{\omega}_A = \overline{\omega}_B = 20\,\overline{i} - 7.5\,\overline{j} \quad \text{(rad/seg)}$$

2).- Cálculo de la aceleración angular de A y B en $\Im$.-

Si: $\overline{\omega}_A = \overline{\omega}_{A/FH} + \overline{\omega}_{FH/\Im}$, derivándole respecto al tiempo en $\Im$:

$$\dot{\overline{\omega}}_A = \overbrace{\dot{\overline{\omega}}_{A/FH}}^{0} + \overline{\omega}_{FH/\Im}\, x\, \overline{\omega}_{A/FH} + \overbrace{\dot{\overline{\omega}}_{FH/\Im}}^{0} = 20\,\overline{i}\; x\; \left(-7.5\,\overline{j}\right)$$

$$\dot{\overline{\omega}}_A = -150\,\overline{k} \quad (\text{rad/seg}^2)$$

3).- Cálculo de la aceleración de 2 en $\Im$:

$$\bar{a}_2 = \dot{\bar{\omega}}_A x\, \bar{r}_{F2} + \bar{\omega}_A x \left(\bar{\omega}_A \; x\, \bar{r}_{F2}\right)$$

$$\dot{\bar{\omega}}_A \; x\, \bar{r}_{F2} = -150\, \bar{k} \; x \left(0.08\, \bar{i} + 0.06\; \bar{j}\right) = 9\, \bar{i} - 12\; \bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

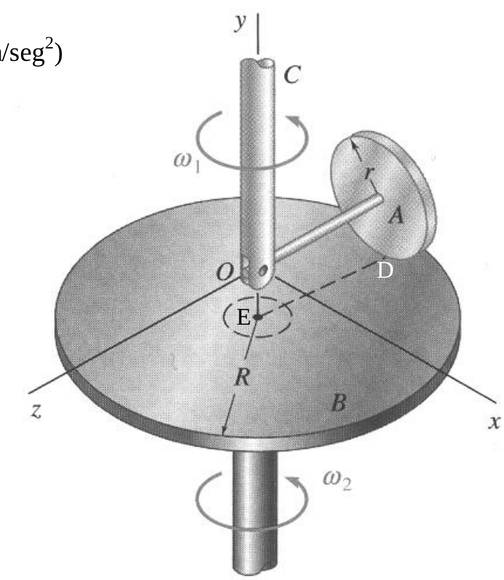
$$\bar{\omega}_A \; x\, \bar{r}_{F2} = \left(20\, \bar{i} - 7.5\; \bar{j}\right) x \left(0.08\, \bar{i} + 0.06\; \bar{j}\right) = 1.8\, \bar{k} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{\omega}_A \; x \left(\bar{\omega}_A \; x\, \bar{r}_{F2}\right) = \left(20\, \bar{i} - 7.5\; \bar{j}\right) x\, 1.8\, \bar{k} = -13.5\, \bar{i} - 36\; \bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

Luego:

$$\bar{a}_2 = 9\, \bar{i} - 12\; \bar{j} - 13.5\, \bar{i} - 36\; \bar{j} = -4.5\, \bar{i} - 48\; \bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

2-57.- En el sistema representado, el disco A puede girar libremente alrededor del eje horizontal OA y rodar en el disco B. Suponiendo que el árbol OC y el Disco B giran con velocidades angulares constantes ω_1 y ω_2 respectivamente, ambas de sentido antihorario, hallar la velocidad y aceleración angulares del disco A; si: a) B está inmóvil ($\omega_2 = 0$) y b) B tiene movimiento angular (ω_2).



P2-57

Solución

El árbol OC y el eje horizontal tienen movimiento alrededor de un eje fijo, el disco A tiene movimiento alrededor de un punto fijo O y B para el primer caso está inmóvil, pero para el segundo tiene movimiento alrededor de un eje fijo.

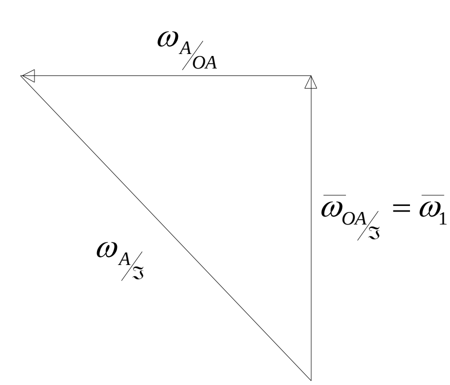
1).- Para el disco B inmóvil ($\omega_2 = 0$).-

a).- Cálculo de la velocidad angular de A en $\Im$:

Si: $\bar{V}_D = \bar{0}$ (por rodamiento), además D pertenece al cuerpo rígido con movimiento alrededor de un punto fijo:

$$\bar{V}_D = \bar{\omega}_{D/\Im}\, x\, \bar{r}_{OD} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \bar{\omega}_{D/\Im} \;//\; \bar{r}_{OD}$$

$$\bar{\omega}_{A/\Im} = \omega_{A/\Im} \left(\frac{r\; \bar{j} + R\, \bar{k}}{\sqrt{R^2 + r^2}} \right) \qquad (1)$$



P2-57a

Por el teorema de adición (ver figura P2-57a):

$$\bar{\omega}_{A/\Im} = \bar{\omega}_{A/OA} + \bar{\omega}_{OA/OC} = \omega_{A/OA}\,\bar{k} + \omega_1\,\bar{j} \qquad (2)$$

(1) = (2) e igualando componentes:

$$\omega_{A/\Im}\left(\frac{r\,\bar{j} + R\,\bar{k}}{\sqrt{R^2 + r^2}}\right) = \omega_{A/OA}\,\bar{k} + \omega_1\,\bar{j}$$

$$\omega_{A/\Im} * \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}} = \omega_1 \quad \rightarrow \quad \omega_{A/\Im} = \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{r}\,\omega_1$$

$$\omega_{A/\Im} * \frac{R}{\sqrt{R^2 + r^2}} = \omega_{A/OA} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{r}\,\omega_1 * \frac{R}{\sqrt{R^2 + r^2}} = \omega_{A/OA}$$

$$\omega_{A/OA} = \frac{R}{r}\,\omega_1$$ (Unid. de velocidad angular)

En (2):

$$\bar{\omega}_{A/\Im} = \omega_1\,\bar{j} + \frac{R}{r}\,\omega_1\,\bar{k}$$ (Unid. de velocidad angular)

b).- Cálculo de la aceleración angular de A en $\Im$.-

Derivando (2) respecto al tiempo en $\Im$:

$$\dot{\bar{\omega}}_{A/\Im} = \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{A/OA}}^{0} + \bar{\omega}_{A/\Im}\,x\,\bar{\omega}_{A/OA} + \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{OA/OC}}^{0} = \left(\omega_1\,\bar{j} + \frac{R}{r}\,\omega_1\bar{k}\right)x\,\frac{R}{r}\,\omega_1\,\bar{k}$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{A/\Im} = \frac{R}{r}\,\omega_1^2\,\bar{i}$$ (Unid. de aceleración angular)

2).- Para el disco B móvil ($\omega_2 \neq 0$).-

a).- Cálculo de la velocidad angular de A en $\Im$:

i).- Por el teorema de adición:

$$\bar{\omega}_{A/\Im} = \bar{\omega}_{A/OA} + \bar{\omega}_{OA/OC} = \omega_{A/OA}\,\bar{k} + \omega_1\,\bar{j} \quad \rightarrow \quad \bar{\omega}_{A/\Im} = \omega_1\,\bar{j} + \omega_{A/OA}\,\bar{k} \tag{3}$$

ii).- Cálculo de la velocidad de D, tomando como punto de referencia E en $\Im$:

$$\bar{V}_D = \bar{\omega}_{B/\Im}\, x\, \bar{r}_{ED} = \omega_2\,\bar{j}\, x\left(-R\,\bar{k}\right) = -R\omega_2\,\bar{i} \tag{4}$$

iii).- Cálculo de la velocidad de D, Tomando como punto de referencia O en $\Im$:

$$\bar{V}_D = \bar{\omega}_{A/\Im}\, x\, \bar{r}_{OD} = \left(\omega_1\,\bar{j} + \omega_{A/OA}\,\bar{k}\right) x \left(-r\,\bar{j} - R\,\bar{k}\right) = -R\,\omega_1\,\bar{i} + r\,\omega_{A/OA}\,\bar{i}$$

$$\bar{V}_D = \left(r\,\omega_{A/OA} - R\,\omega_1\right)\bar{i} \tag{5}$$

(4) = (5):

$$-R\,\omega_2 = r\,\omega_{A/OA} - R\,\omega_1 \quad \rightarrow \quad \omega_{A/OA} = \frac{R}{r}\left(\omega_1 - \omega_2\right)$$ (Unid. de velocidad angular)

Luego en (3):

$$\bar{\omega}_{A/\Im} = \omega_1\,\bar{j} + \frac{R}{r}\left(\omega_1 - \omega_2\right)\bar{k}$$ (Unid. de velocidad angular)

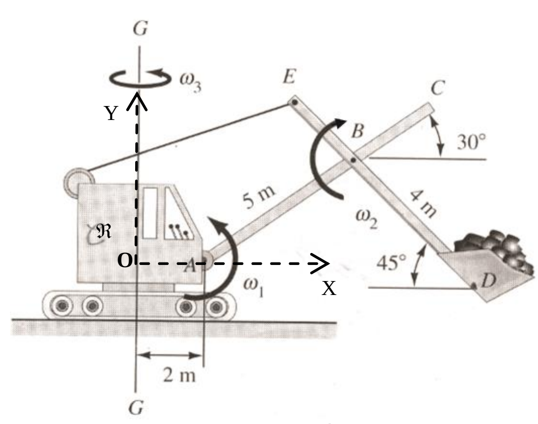
b).- Cálculo de la aceleración angular de A en $\Im$.-

Derivando (3) respecto al tiempo en $\Im$:

$$\dot{\bar{\omega}}_{A/\Im} = \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{A/OA}}^{0} + \bar{\omega}_{A/\Im}\, x\, \bar{\omega}_{A/OA} + \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{OA/OC}}^{0} = \omega_1\,\bar{j}\, x\, \frac{R}{r}\left(\omega_1 - \omega_2\right)\bar{k}$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{A/\Im} = \frac{R}{r}\,\omega_1\left(\omega_1 - \omega_2\right)\bar{i}$$ (Unid. de aceleración angular)

2-58.- El Brazo principal AC de una pala mecánica gira con una velocidad angular constante ω_1 de 0.3 rad/seg relativa a la cabina. El brazo ED gira con una velocidad angular constante ω_2 de 0.4 rad/seg relativa al brazo principal AC. La cabina gira alrededor del eje G-G con una velocidad angular constante ω_3 de 0.15 rad/seg relativa a las orugas que permanecen estacionarias. ¿Cuál será la velocidad y aceleración del punto D, en el centro de la pala, en el instante que se muestra en el diagrama? Usando la ecuación general de la cinemática del cuerpo rígido para cada caso. AB tiene una longitud de 5 m y BD una longitud de 4 m.



P2-58

Solución

La cabina tiene un movimiento alrededor de un eje fijo y los brazos AC y ED tienen movimiento general en el espacio.

1).- Cálculo de la velocidad y aceleración de A, como parte de la cabina en $\Im$:

$$\bar{V}_A = \bar{\omega}_3 x\, \bar{r}_{OA} = 0.15\ \bar{j}\ x\ 2\ \bar{i} = -0.3\ \bar{k} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{a}_A = -\omega_3^2\ \bar{r}_{OA} = -0.15^2 \left(2\ \bar{i}\right) = -0.045\ \bar{i} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de B, como parte del brazo AC en $\Im$:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \left(\bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_1\right) x\ \bar{r}_{AB} = 0.3\ \bar{k} + \left(0.15\ \bar{j} + 0.3\ \bar{k}\right) x\ 5\left(\cos 30°\ \bar{i} + sen 30°\ \bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_B = -0.75\ \bar{i} + 1.3\ \bar{j} - 0.95\ \bar{k} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \left(\bar{\omega}_3 x\ \bar{\omega}_1\right) x\ \bar{r}_{AB} + \left(\bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_1\right) x \left[\left(\bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_1\right) x\ \bar{r}_{AB}\right]$$

$$\bar{a}_B = -0.045\ \bar{i} + 0.045\ \bar{i}\ \ x\ 5\left(\cos 30° \bar{i} + sen 30°\ \bar{j}\right) + \left(0.15\,\bar{j} + 0.3\ \bar{k}\right) x \left(0.75\ \bar{i} + 1.3\,\bar{j} - 0.65\ \bar{k}\right)$$

$$\bar{a}_B = -0.5325\ \bar{i} + 0.225\ \bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

3).- Cálculo de la velocidad y aceleración de D, como parte del brazo ED en $\Im$:

$$\bar{V}_D = \bar{V}_B + \overbrace{\left(\bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2\right)}^{\bar{\omega}_{ED/\Im}} x\ \bar{r}_{BD} = \bar{V}_B + \left(0.3\ \bar{j} + 0.15\ \bar{k} - 0.4\ \bar{k}\right) x\ 4\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \bar{i} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_D = -\left(0.75 + 0.707\right)\bar{i} + \left(1.3 - 0.707\right)\ \bar{j} - \left(0.95 + 0.849\right)\bar{k}$$

$$\bar{V}_D = -1.457\ \bar{i} + 0.593\ \bar{j} - 1.8\ \bar{k} \quad \text{(m/seg)} \quad \rightarrow \quad \left|\bar{V}_D\right| = 2.39 \ \text{ m/seg}$$

$$\bar{a}_D = \bar{a}_B + \overbrace{\left[\bar{\omega}_3 x\ \bar{\omega}_1 + \left(\bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_1\right) x\ \bar{\omega}_2\right]}^{\dot{\bar{\omega}}_{ED/\Im}} x\ \bar{r}_{BD} + \bar{\omega}_{ED/\Im}\, x \left(\bar{\omega}_{ED/\Im}\, x\ \bar{r}_{BD}\right)$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{ED/\Im}\, x\ \bar{r}_{BD} = \left[0.045\ \bar{i} + \left(0.15\ \bar{j} + 0.3\ \bar{k}\right) x \left(-0.4\ \bar{k}\right)\right] x\ 4\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \bar{i} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \bar{j}\right)$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{ED/\Im}\, x\ \bar{r}_{BD} = \left(-0.105\ \bar{i}\right) x\ 2\left(\sqrt{2}\ \bar{i} - \sqrt{2}\ \bar{j}\right) = 0.297\ \bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{\omega}_{ED/\Im}\, x \left(\bar{\omega}_{ED/\Im}\, x\, \bar{r}_{BD} \right) = \left(0.3\ \bar{j} - 0.25\ \bar{k}\right) x \left(-0.707\ \bar{i} - 0.707\ \bar{j} - 0.849\ \bar{k}\right)$$

$$\bar{\omega}_{ED/\Im}\, x \left(\bar{\omega}_{ED/\Im}\, x\, \bar{r}_{BD} \right) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0.3 & -0.25 \\ -0.707 & -0.707 & -0.849 \end{vmatrix} = -0.078\,\bar{i} + 0.177\ \bar{j} + 0.212\ \bar{k}\ \ (\text{m/seg}^2)$$

Luego:

$$\bar{a}_D = \left(-0.5323 - 0.078\right)\bar{i} + \left(0.0225 + 0.177\right)\bar{j} + \left(0.297 + 0.212\right)\bar{k}$$

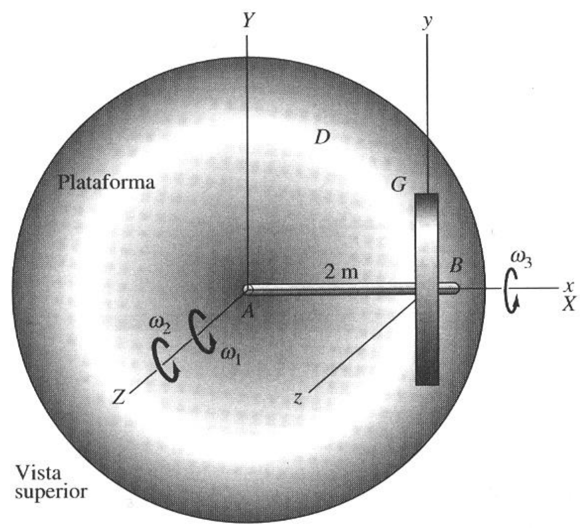
$$\bar{a}_D = -0.6105\,\bar{i} + 0.1995\ \bar{j} + 0.509\ \bar{k}\quad (\text{m/seg}^2)$$

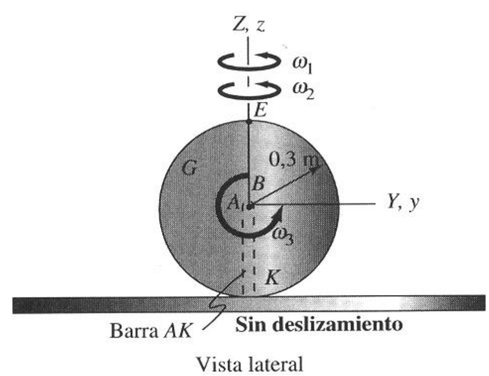
$$\left|\bar{a}_D\right| = 0.82\ \ \text{m/seg}^2$$

2-59.- La barra AB está montada sobre una barra vertical AK, que está fijada a una plataforma horizontal D, que gira con una velocidad angular ω_1 relativa al sistema de referencia del terreno XYZ. Mientras tanto, el eje AB gira respecto a la plataforma con una velocidad angular ω_2. El disco G gira respecto a la barra AB con una velocidad angular ω_3, cuyo valor se puede determinar a partir de la condición de no deslizamiento entre las superficies de contacto de la plataforma y del disco. Hallar los vectores velocidad y aceleración del punto E, situado en el disco G, respecto a los ejes XYZ. Si:

$$\omega_1 = 3\ \text{rad/seg (constante)}$$

$$\omega_2 = 2\ \text{rad/seg (constante)}$$





P2-59

Solución

Las barras AB y AK tienen movimiento alrededor de un eje fijo, mientras el disco tiene un movimiento alrededor de un punto fijo.

1).- Cálculo de la velocidad y aceleración angulares del disco G en $\Im$:
a).- Por el teorema de adición:

$$\bar{\omega}_G = \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 = 2\ \bar{k} + \omega_3\ \bar{i}$$

b).- Cálculo de la velocidad de F (punto de contacto con la plataforma), tomando como punto de referencia K en $\Im$:

$$\bar{V}_F = \bar{\omega}_1 x\, \bar{r}_{KF} = 3\,\bar{k}\;x\;2\,\bar{i} = 6\;\bar{j}\quad \text{(m/seg)} \tag{1}$$

c).- Cálculo de la velocidad de F, como parte del disco G en $\Im$:

$$\bar{V}_F = \bar{\omega}_G x\, \bar{r}_{AF} = \left(2\,\bar{k} + \omega_3 \bar{i}\right) x \left(2\,\bar{i} - 0.3\,\bar{k}\right) = 4\;\bar{j} + 0.3\,\omega_3\;\bar{j} \tag{2}$$

(1) = (2):

$$6 = 4 + 0.3\,\omega_3 \qquad \rightarrow \qquad \omega_3 = 6.667 \quad \text{rad/seg}$$

Luego:

$$\bar{\omega}_G = 6.667\,\bar{i} + 2\,\bar{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

d).- Cálculo de la aceleración de G en $\Im$:

$$\dot{\bar{\omega}}_G = \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_2}^{0} + \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_3}^{0} + \bar{\omega}_2 x\, \bar{\omega}_3 = 2\,\bar{k}\;\;x\;6.667\,\bar{i} = 13.33\;\bar{j} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

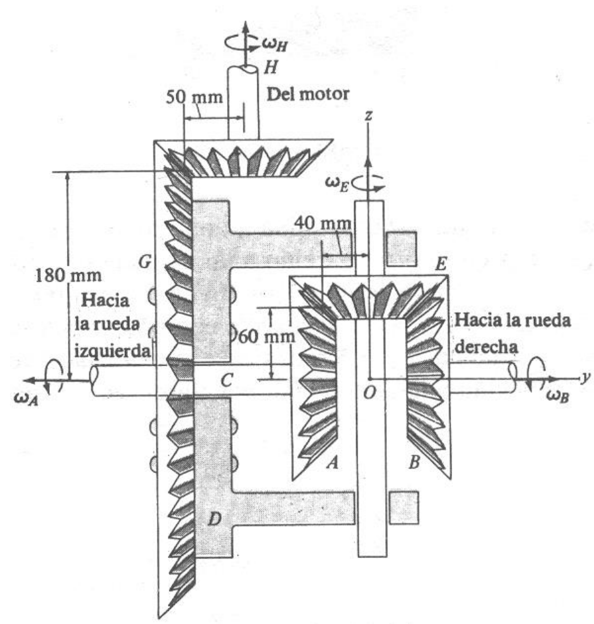
2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de E, como parte de G en $\Im$:

$$\bar{V}_E = \bar{\omega}_G x\, \bar{r}_{AE} = \left(6.667\,\bar{i} + 2\,\bar{k}\right) x \left(2\,\bar{i} + 0.3\,\bar{k}\right) = -2\;\bar{j} + 4\;\bar{j} \quad \rightarrow \quad \bar{V}_E = 2\;\bar{j} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{a}_E = \dot{\bar{\omega}}_G x\, \bar{r}_{AE} + \bar{\omega}_G x\, \bar{V}_E = 13.33\;\bar{j}\;x\left(2\,\bar{i} + 0.3\,\bar{k}\right) + \left(6.667\,\bar{i} + 2\,\bar{k}\right) x\;2\;\bar{j}$$

$$\bar{a}_E = -13.33\,\bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

2-60.- El diferencial de un automóvil permite que las dos ruedas traseras giren con diferente rapidez cuando el automóvil se mueve a lo largo de una curva. Para esta operación, los ejes traseros están unidos a las ruedas en un extremo y tienen engranes biselados A y B en sus extremos. La caja diferencial, D, se coloca sobre el eje izquierdo, pero puede girar alrededor de C, independientemente del eje. La caja apoya un engrane piñón E sobre una flecha, el cual engrana con los engranajes A y B. Finalmente, un engrane anillo G está fijo a la caja del diferencial, de manera que la caja gira con el engrane de anillo cuando éste es impulsado por el piñón impulsor H. Este engrane, igual que la caja diferencial está libre para girar alrededor del eje de la rueda izquierda. Si el piñón impulsor está girando con ω_H = 100 rad/seg y el engrane piñón E está girando alrededor de su flecha con 30 rad/seg, calcule la velocidad angular, ω_A y ω_B de cada eje.

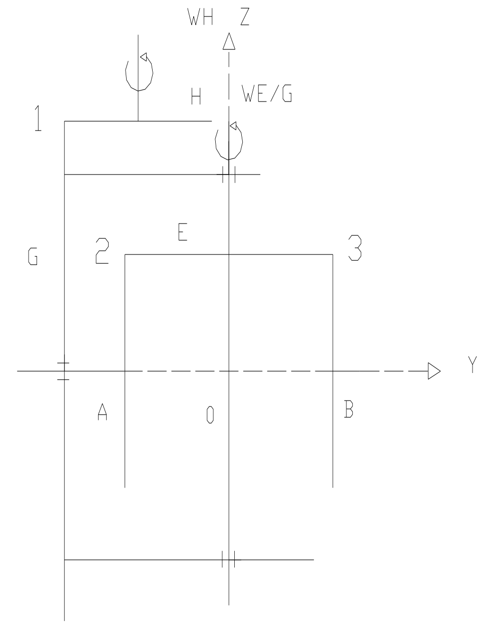


P2-60

Solución

Los engranajes G, H A y B tienen movimiento alrededor de sus ejes fijos al automóvil y el engranaje E tiene un movimiento alrededor de un punto fijo O en el automóvil. Las velocidades angulares respecto al terreno y al automóvil serán los mismos, por que el automóvil no cambio de orientación con respecto al terreno (propiedad de las velocidades angulares).

1).- Cálculo de la velocidad angular del engranaje G en $\Im$ (ver figura P2-60a):



P2-60a

a).- Cálculo de la velocidad de 1, como parte de H:

$$\bar{V}_1 = \bar{\omega}_H \, x \, \bar{r}_{H1} = 100\,\bar{k} \; x \left(-0.05\,\bar{j}\right) = 5\,\bar{i} \quad \text{(m/seg)} \quad (1)$$

b).- Cálculo de la velocidad de 1, como parte de G:

$$\bar{V}_1 = \bar{\omega}_G \, x \, \bar{r}_{G1} = \omega_G \; \bar{j} \; x \; 0.18\,\bar{k} = 0.18\,\omega_G \; \bar{i} \qquad (2)$$

(1) = (2)

$$0.18\,\omega_G = 5 \quad \rightarrow \quad \omega_G = 27.7778 \;\; \text{rad/seg}$$

$$\bar{\omega}_G = 27.7778\;\bar{j} \quad \text{(rad/seg)}$$

2).- Cálculo de la velocidad angular del engranaje E en $\Im$:

$$\bar{\omega}_E = \bar{\omega}_{E/G} + \bar{\omega}_G = 30\,\bar{k} + 27.7778\;\bar{j} \quad \text{(rad/seg)}$$

3).- Cálculo de la velocidad angular del engranaje A en $\Im$:

a).- Cálculo de la velocidad de 2, como parte de E:

$$\bar{V}_2 = \bar{\omega}_E \, x \, \bar{r}_{O2} = \left(27.7778\;\bar{j} + 30\,\bar{k}\right) x \left(-0.04\;\bar{j} + 0.06\,\bar{k}\right) = \left(1.6667 + 1.2\right)\bar{i}$$

$$\bar{V}_2 = 2.8667\,\bar{i} \quad \text{(m/seg)} \qquad (3)$$

b).- Cálculo de la velocidad de 2, como parte de A:

$$\bar{V}_2 = \bar{\omega}_A \, x \, \bar{r}_{A2} = \omega_A \;\; \bar{j} \; x \left(0.06\,\bar{k}\right) = 0.06\,\omega_A \;\; \bar{i} \qquad (4)$$

(3) = (4)

$$0.06\,\omega_A = 2.8667 \quad \rightarrow \quad \omega_A = 47.778 \text{ rad/seg} \quad \rightarrow \quad \bar{\omega}_A = 47.8\,\bar{j} \text{ (rad/seg)}$$

4).- Cálculo de la velocidad angular del engranaje B en $\Im$:

a).- Cálculo de la velocidad de 3 como parte de E:

$$\bar{V}_3 = \bar{\omega}_E \, x \, \bar{r}_{O3} = \left(27.7778\,\bar{j} + 30\,\bar{k}\right) x \left(0.04\,\bar{j} + 0.06\,\bar{k}\right) = \left(1.6667 - 1.2\right)\bar{j}$$

$$\bar{V}_3 = 0.4667\,\bar{i} \text{ (m/seg)} \tag{5}$$

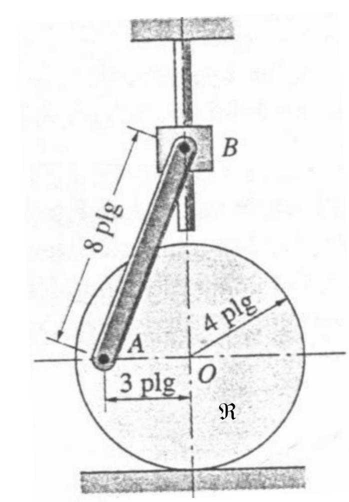
b).- Cálculo de la velocidad de 3, como parte del engranaje B:

$$\bar{V}_3 = \bar{\omega}_B \, x \, \bar{r}_{B3} = \omega_B\,\bar{j} \, x \left(0.06\,\bar{k}\right) = 0.06\,\omega_B\,\bar{i} \tag{6}$$

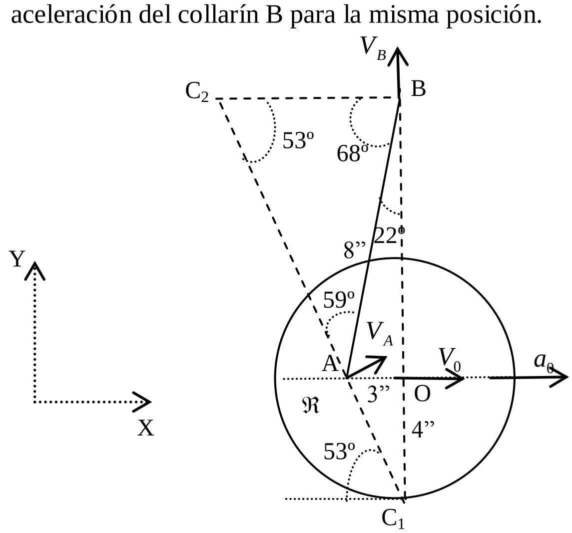
(5) = (6)

$$0.4667 = 0.06\,\omega_B \quad \rightarrow \quad \omega_B = 7.778 \text{ rad/seg} \quad \rightarrow \quad \bar{\omega}_B = 7.778\,\bar{j} \text{ (rad/seg)}$$

2-61.- Cuando el mecanismo está en la posición que se muestra, la velocidad y aceleración del centro O del disco son de 12 plg y 2 plg/seg^2 respectivamente, ambas hacia a la derecha. Si se supone que el disco rueda; determine: a) Usando el método de los centros instantáneo de velocidad nula, la velocidad de B y b) La aceleración del collarín B para la misma posición.



P2-61



P2-61a

Solución

1).- Cálculo de la velocidad de B.-

a).- Determinación de los centros instantáneos y cálculos elementales (ver figura P2.61a):

Por ley de senos:

$$\frac{C_2B}{sen59^o} = \frac{C_2A}{sen68^o} = \frac{8}{sen53^o}$$

$C_2B = 8.572$ plg y $C_2A = 9.272$ plg

b).- Cálculo de las velocidades:

$$\omega_{\Re} = \frac{V_0}{C_1O} = \frac{12}{4} = 3 \text{ rad/seg}$$

$$V_A = \omega_{\Re} * C_1A = 3*5 = 15 \text{ plg/seg}$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{C_2A} = \frac{15}{9.272} = 1.62 \text{ rad/seg}$$

$$V_B = \omega_{AB} * C_2B = 1-62*8.572 = 13.886 \text{ plg/seg} \quad \rightarrow \quad \bar{V}_B = 13.886\ \bar{j} \text{ (plg/seg)}$$

2).- Cálculo de la aceleración de B.-

a).- Cálculo de la aceleración angular del disco $\Re$:

$$a_0 = \alpha_{\Re} r \quad \rightarrow \quad 2 = \alpha_{\Re} * 4 \quad \rightarrow \quad \alpha_{\Re} = 0.5 \text{ rad/seg}^2$$

b).- Cálculo de la aceleración de A:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_0 + \alpha_{\Re} \bar{k}\ x\ \bar{r}_{AB} - \omega_{\Re}^2 \bar{r}_{AB} = 2\ \bar{i} - 0.5\ \bar{k}\ x\ \left(-3\ \bar{i}\right) - 9\left(-3\ \bar{i}\right)$$

$$\bar{a}_A = 29\ \bar{i} + 1.5\ \bar{j} \text{ (plg/seg}^2\text{)}$$

c).- Cálculo de la aceleración de B:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \alpha_{AB} \bar{k}\ x\ \bar{r}_{AB} - \omega_{AB}^2 \bar{r}_{AB}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \alpha_{AB} \bar{k}\ x\ 8\left(sen22^o\ \bar{i} + \cos 22^o\ \bar{j}\right) - 1.62^2 * 8\left(sen22^o\ \bar{i} + \cos 22^o\ \bar{j}\right)$$

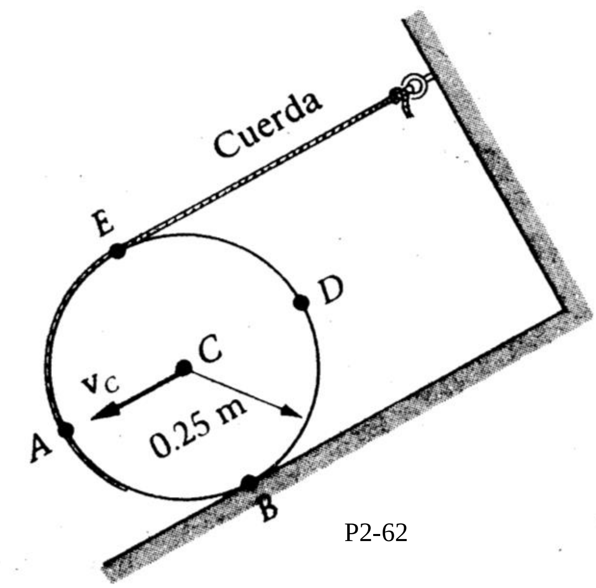
$$a_B\ \bar{j} = \left(21.315 - 7.42\ \alpha_{AB}\right)\bar{i} + \left(3\ \alpha_{AB} - 17.966\right)\ \bar{j}$$

Igualando componentes y operando:

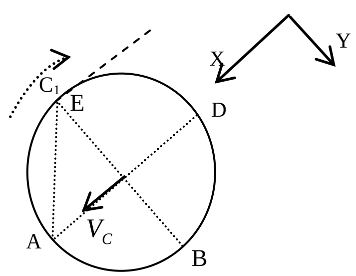
$$0 = 21.315 - 7.42\,\alpha_{AB} \quad \rightarrow \quad \alpha_{AB} = 2.872 \ \text{rad/seg}^2$$

$$a_B = 3*2.872 - 17.966 = -9.35 \ \text{plg/seg}^2 \quad \rightarrow \quad \bar{a}_B = -9.35\,\bar{j} \ (\text{plg/seg}^2)$$

2-62.- Una cuerda inextensible está enrollada alrededor del cilindro de la figura, ajustada en una pequeña ranura del borde. El centro C se mueve hacia abajo con una velocidad constante de 0.1 m/seg . Encuentre las velocidades de los puntos A, D; y la aceleración de E y B. *Sugerencia: El cilindro no está rodando sobre el plano sino sobre ....?*



P2-62



P2-62a

Solución

El cilindro rueda sobre la cuerda; por lo tanto E es el centro instantáneo de velocidad nula (ver figura P2-62a).

1).- Cálculo de la velocidad angular del cilindro:

$$\omega = \frac{V_C}{r} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4 \ \text{rad/seg}$$

2).- Cálculo de la velocidad de A y D:

$$\bar{V}_A = \bar{V}_C - \omega\,\bar{k}\ x\ r\,\bar{i} = -0.1\,\bar{i} - 0.1\,\bar{j} \ \ (\text{m/seg}) \quad \rightarrow \quad \left|\bar{V}_A\right| = 0.141 \ \text{m/seg}$$

$$\bar{V}_D = \bar{V}_C - 0.4\,\bar{k}\ x\left(-0.25\,\bar{i}\right) = 0.1\,\bar{i} + 0.1\,\bar{j} \ \ \text{m/seg} \quad \rightarrow \quad \left|\bar{V}_D\right| = 0.141 \ \text{m/seg}$$

3).- Cálculo de la aceleración de E y B:

a).- Cálculo de la aceleración angular del cilindro:

$$\alpha\, r = a_C \quad \rightarrow \quad a_C = 0 \;\Rightarrow\; \alpha \quad 0$$

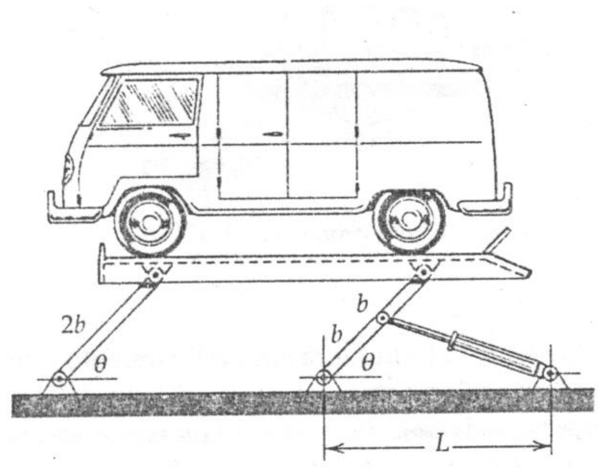
b).- Cálculo de la aceleración de E (C_i):

$$\bar{a}_E = \omega^2 r\ \bar{j} = 0.4^2 * 0.25\ \bar{j} = 0.04\ \bar{j} \quad (\text{m/seg}^2)$$

c).- Cálculo de la aceleración de B:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_E - \omega^2\ \bar{r}_{EB} = 0.04\ \bar{j} - 0.4^2\left(0.5\ \bar{j}\right) = -0.04\ \bar{j} \quad (\text{m/seg}^2)$$

2-63.- Deducir la expresión de la velocidad ascendente *v* del elevador de automóviles en función de θ. La velocidad con que se extiende el émbolo del cilindro hidráulico es $\dot{s}$.

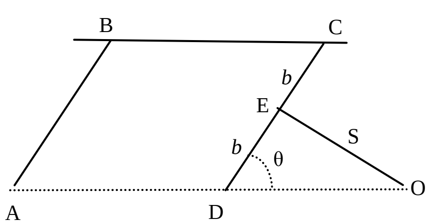


P2-63

Solución

El elevador conjuntamente con el vehículo tienen movimiento de traslación.

1).- Calculo de la velocidad angular de las barras (ver figura P2-63a):



P2-63a

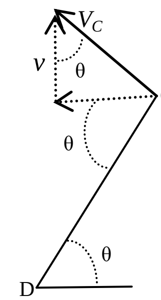
Por Ley de cosenos:

$$S^2 = b^2 + L^2 - 2\, b\, L \cos\theta$$

Derivándole con respecto al tiempo:

$$2\, S\, \dot{S} = 2\, b\, L\, sen\theta\, \dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{S\, \dot{S}}{b\, L\, sen\theta} = \frac{\dot{S}\, \sqrt{b^2 + L^2 - 2\, b\, L \cos\theta}}{b\, L\, sen\theta}$$

2).- Cálculo de la velocidad ascendente de C, que es lo mismo para el elevador (movimiento de la barra alrededor de un eje fijo que pasa por D):



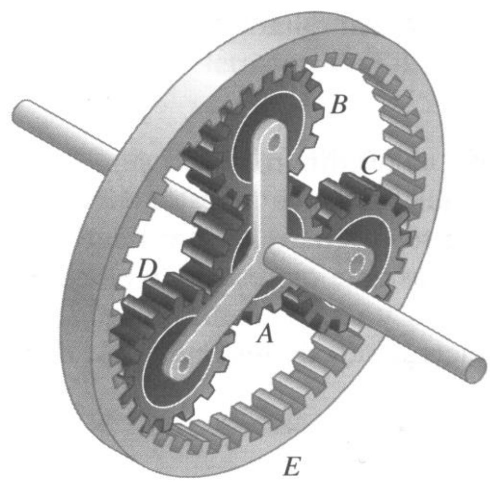
P2-63b

$$V_C = 2\,b\,\dot{\theta} = \frac{2\,\dot{S}\,\sqrt{b^2 + L^2 - 2\,b\,L\cos\theta}}{L\,sen\theta}$$

Luego (ver figura P2-63b):

$$v = \frac{2\,\dot{S}\,\sqrt{b^2 + L^2 - 2\,b\,L\cos\theta}}{L}\cot\theta \text{ (Unid. de velocidad)}$$

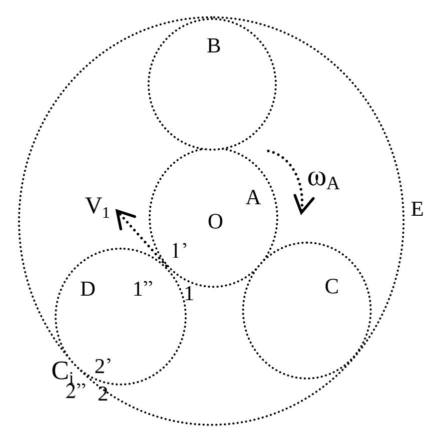
2-64.- En el tren epicicloidal de la figura el radio de los engranajes A, B y C son de 75 mm, y el radio de la corona E es de 225 mm. Sabiendo que el engranaje A tiene una velocidad angular horaria constante de 150 RPM y que la corona E está inmóvil, hallar el módulo de la aceleración del diente del engranaje D en contacto con (a) el engranaje A, (b) el engranaje E.



P2-64

Solución

El engranaje A tiene un Movimiento alrededor de un eje fijo y los engranajes B, C, y D tienen movimiento general en el plano, y E está fijo.



P2-64a

1).- Representando a los engranajes en el plano (ver figura P2-64a):

a).- Cálculo de la velocidad de 1 como parte del engranaje A:

$$V_1 = \omega_A r_{O1} = 150 * \pi/30 * 0.075 = 1.178 \text{ m/seg}$$

b).- Cálculo de la velocidad angular de D, calculando la velocidad de 1 como parte de D:

$$V_1 = \omega_D \; r_{21} \;\; \rightarrow \;\; \omega_D = \frac{V_1}{r_{21}} = \frac{1.178}{0.15} = 7.854 \;\; \text{rad/seg}$$

3).- Cálculo de la aceleración del punto de D (2’), en contacto con E, si el engranaje está en rodamiento en una curva cóncava hacia arriba (módulo de $a_{C\,i}$):

$$a_{C\,i} = a_{2'} = \left(1 + \frac{r}{\rho_C}\right) r \; \omega_D^2 = \left(1 + \frac{0.075}{0.15}\right) * 0.075 * 7.854^2 = 6.94 \;\; \text{m/seg}^2$$

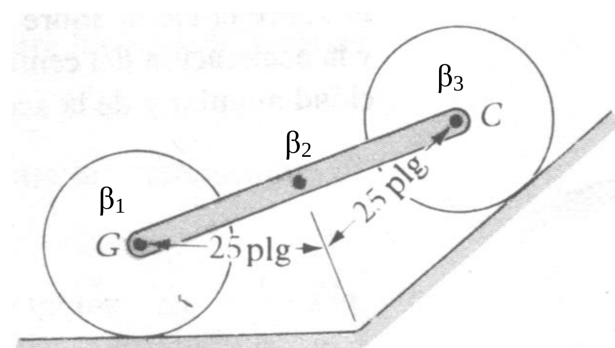
4).- Cálculo de la aceleración del punto de D(1”) en contacto con A.- La aceleración tangencial de 1’ es nulo, por que, también la aceleración tangencial de 1” será nulo, que hace que la aceleración angular de D sea nula:

Si:

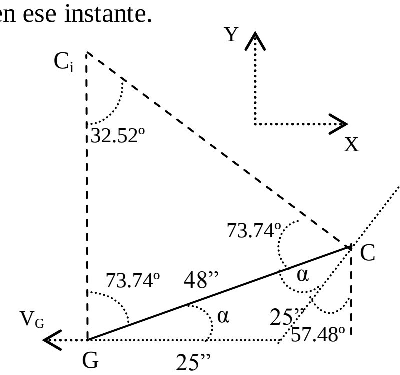
$$\bar{a}_{1''} = 2\, r \overbrace{\dot{\omega}_D}^{0} \; \bar{e}_t - r\, \omega_D^2 \left(1 - \frac{r}{\rho_C}\right) \bar{e}_n \quad \rightarrow \quad a_{1''} = 0.075 * 7.854^2 \left(1 - \frac{0.075}{0.15}\right)$$

$$a_{1''} = 2.313 \;\; \text{m/seg}^2$$

2-65.- Los cilindros β_1 y β_2 en la figura tienen radios de 10 plg y ruedan sobre los planos respectivos. La barra β_3 tiene 48 plg de longitud y está articulada a los centros de los cilindros. El centro G de β_1 tiene un $\bar{V}_G = -10\, t \;\rightarrow$ (plg/seg). Si en el instante mostrado t = 5 seg, encuentre las aceleraciones angulares $\bar{\alpha}_1$ y $\bar{\alpha}_2$ en ese instante.



P2-65



P2-65a

Solución

1).- Determinación del centro instantáneo y cálculos elementales (ver figura P2-65a):

$$\cos\alpha = \frac{24}{25} \quad \rightarrow \quad \alpha = 16.26^\circ$$

Por ley de senos

$$\frac{C_iG}{sen73.74^o} = \frac{C_iC}{sen73.74^o} = \frac{48}{sen32.52^o}$$

$$C_iG = C_iC = 85.72 \ \text{plg}$$

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de G:

$$\bar{V}_G = -10\,t\,\bar{i} = -10*5\,\bar{i} = -50\,\bar{i} \quad \text{(plg/seg)}$$

$$\bar{a}_G = -10\,\bar{i} \quad \text{(plg/seg}^2\text{)}$$

3).- Cálculo de la aceleración de C, como parte de la barra β_3:

$$\omega_3 = \frac{V_G}{C_iG} = \frac{50}{85.72} = 0.583 \ \text{rad/seg} \quad \rightarrow \quad \bar{\omega}_3 = -0.583\,\bar{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_G + \alpha_3\bar{k} \ x\ \bar{r}_{GC} - \omega_3^2\ \bar{r}_{GC}$$

$$a_C\left(-sen57.48^o\,\bar{i} - \cos 57.48\,\bar{j}\right) = -10\,\bar{i} + \alpha_3\bar{k}\ x\ 48\,\overbrace{\left(\cos 16.26^o\,\bar{i} + sen16.26^o\,\bar{j}\right)}^{\bar{r}_{GC}} - 0.583^2\,\bar{r}_{GC}$$

$$-0.843\,a_C\,\bar{i} - 0.538\,a_C\,\bar{j} = \left(-25.66 - 13.44\,\alpha_3\right)\bar{i} + \left(-4.57 + 46.08\,\alpha_3\right)\bar{j}$$

Igualando componentes y operando:

$$-0.843\,a_C = \left(-25.66 - 13.44\,\alpha_3\right) \qquad (1)$$

$$-0.538\,a_C = \left(-4.57 + 46.08\,\alpha_3\right) \qquad (2)$$

De (1):

$$a_C = 30.44 + 15.94\,\alpha_3$$

En (2):

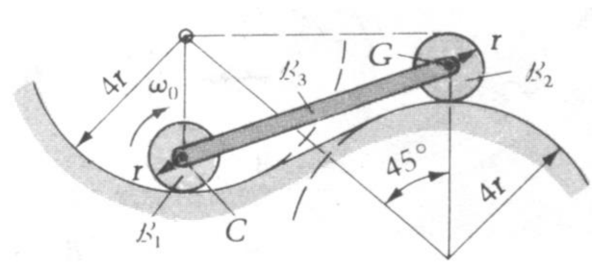
$$16..376 + 8.576\,\alpha_3 + 46.08\,\alpha_3 = 4.57 \quad \rightarrow \quad \alpha_3 = 0.216 \circlearrowleft \ \text{rad/seg}^2$$

$$a_C = 26.997 \ \text{plg/seg}^2$$

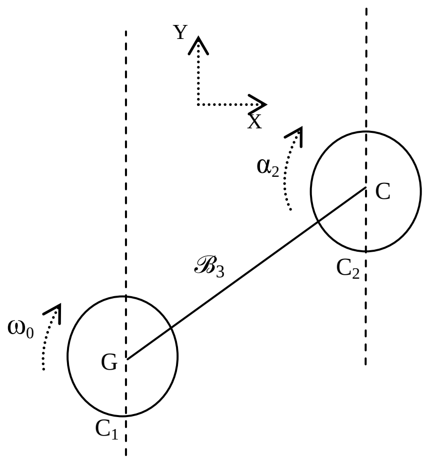
4).- Cálculo de la aceleración angular α_2.- Por rodamiento en línea fija :

$$a_C = \alpha_2 r \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = \frac{26.997}{10} = 2.6997 \circlearrowleft \text{rad/seg} \quad \rightarrow \quad \alpha_2 \cong 2.7 \circlearrowleft \text{rad/seg}$$

2-66.- Los dos cilindros idénticos $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ (ver figura) están unidos por la barra $\mathscr{B}_3$ (que está articulada a sus centros) y ruedan sobre la superficie como se muestra. Si la velocidad angular $\mathscr{B}_1$ es $\omega_1 = \omega_0 \circlearrowleft$ (constante), encuentre las aceleraciones angulares de $\mathscr{B}_2$ y $\mathscr{B}_3$.



P2-66



P2-66a

Solución

1).- Cálculo de la velocidad angular de $\mathscr{B}_3$ y de la velocidad de G.- Por centro instantáneos de velocidad nula, utilizando el concepto de linealidad de los centros instantáneos (ver figura P2-66a):

Para el instante mostrado las líneas (//s) no se interceptan, por lo que en ese instante la velocidad angular de $\mathscr{B}_3$ debe ser nulo, luego:

$$\omega_3 = 0$$

Luego:

$$V_C = V_G \quad \rightarrow \quad V_C = \omega_0 r \quad \text{y} \quad V_G = \omega_2 r \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \omega_0$$

2).- Cálculo de la aceleración de C como parte de $\mathscr{B}_1$:

$$\bar{a}_C = \frac{(r\,\omega_0)^2}{\rho_c}\,\bar{j} = \frac{r^2\omega_0^2}{3\,r}\,\bar{j} = \frac{\omega_0^2}{3} r\ \bar{j} \quad \text{(Unid. de aceleración)} \qquad (1)$$

3).- Cálculo de la aceleración de G como parte de $\mathscr{B}_2$:

$$\bar{a}_G = \alpha_2 r\ \bar{i} - \frac{(r\,\omega_0)^2}{5\,r}\,\bar{j} = \alpha_2 r\ \bar{i} - \frac{\omega_0^2}{5} r\ \bar{j} \quad \text{(Unid de aceleración)} \qquad (2)$$

4).- Cálculo de la aceleración de G como parte de $\mathscr{B}_3$ y tomando como punto base a C:

$$\bar{a}_G = \bar{a}_C + \alpha_3 \bar{k} \ x \ \bar{r}_{CG} = \frac{(r\,\omega_0)^2}{3}\bar{j} + \alpha_3 \bar{k} \ x \left(6\,r\,\bar{i} + 2\,r\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_G = -2\,r\,\alpha_3\,\bar{i} + \left(\frac{\omega_0^2}{3}r + 6\,r\,\alpha_3\right)\bar{j} \qquad (3)$$

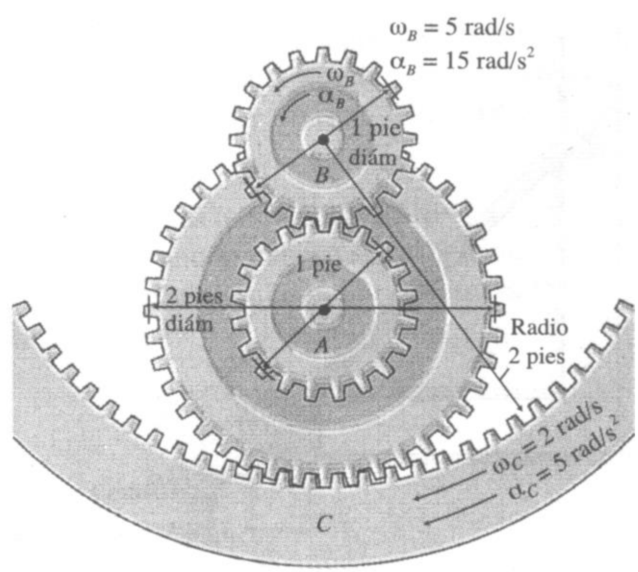
(2) = (3) e igualando componentes:

$$\alpha_2\,r = -2\,r\,\alpha_3 \quad \rightarrow \quad \alpha_2 - 2\,\alpha_3$$

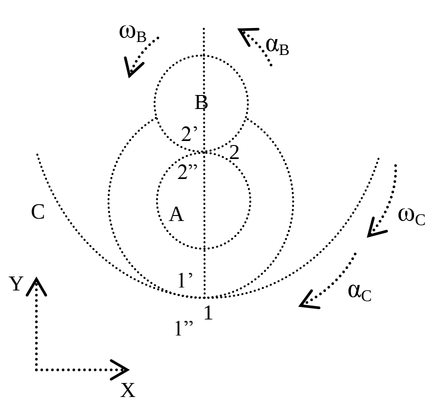
$$-\frac{\omega_0^2}{5}r = \frac{\omega_0^3}{3}r + 6\,r\,\alpha_3 \quad \rightarrow \quad \alpha_3 = -0.0889\,\omega_0^2 \ \circlearrowright$$ (Unid. de aceleración angular)

$$\alpha_2 = -2 * \left(-0.0889\,\omega_0^2\right) = 0.1778\,\omega_0^2 \ \circlearrowleft$$ (Unid. de aceleración angular)

2-67.- Un engranaje A tiene su mamelón interior (diámetro de paso = 1 pie) acoplada con otro engrane B (diámetro de paso = 1 pie) y su borde exterior (diámetro de paso = 2 pies) acoplado al engrane C (diámetro de paso = 4 pies). Los engrane B y C giran alrededor del punto B, mientras que el centro del engrane A tiene libertad para moverse. Si los engranes B y C tienen los movimientos angulares que se muestran, determine la aceleración angular del engrane A.



P2-67



P2-67a

Solución

Los engranajes B y C tienen movimientos alrededor de ejes fijos y el engranaje A tiene movimiento general en el plano.

1).-Representando a los engranajes, por sus círculos de paso (ver figura P2-67a):

2).- Cálculo de la velocidad angular de A:

a).- Cálculo de la velocidad de 1, como parte de C:

$$\bar{V}_1 = \bar{\omega}_C \; x \; \bar{r}_{B1} = -2\,\bar{k} \; x \left(-2\;\bar{j}\right) = -4\,\bar{i} \quad \text{(pie/seg)}$$

b).- Cálculo de la velocidad de 2, como parte de B:

$$\bar{V}_2 = \bar{\omega}_B \; x \; \bar{r}_{B2} = 5\,\bar{k} \; x \left(-0.5\;\bar{j}\right) = 2.5\,\bar{i} \quad \text{(pie/seg)} \qquad (1)$$

c).- Cálculo de la velocidad de 2, como parte de A:

$$\bar{V}_2 = \bar{V}_2 + \omega_A \bar{k} \; x \; \bar{r}_{12} = -4\,\bar{i} + \omega_A \bar{k} \; x\, 1.5\;\bar{j} = -4\,\bar{i} - 1.5\,\omega_A \bar{i} \qquad (2)$$

(1) = (2):

$$.5 = -4 - 1.5\,\omega_A \quad \rightarrow \quad \omega_A = -4.3332 \text{ rad/seg} \quad \rightarrow \quad \omega_A = 4.333 \circlearrowright \text{ rad/seg}$$

3).- Cálculo de la aceleración de A:

a).- Cálculo de la aceleración de 1”, como parte de C:

$$\bar{a}_{1''} = \bar{\alpha}_C x\,\bar{r}_{B1''} - \omega_C^2\;\bar{r}_{B1''} = 5\,\bar{k} \; x \left(-2\,\bar{j}\right) = 4\left(-2\,\bar{j}\right) = -10\,\bar{i} + 8\,\bar{j} \quad \text{(pie/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{a}_{1''t} = \bar{a}_{1't} = -10\,i \quad \text{(m/seg}^2\text{)} \qquad (3)$$

b).- Cálculo de la aceleración de 2’, como parte de b:

$$\bar{a}_{2'} = \alpha_B x\,\bar{r}_{B2'} - \omega_B^2\;\bar{r}_{B2'} = 15\,\bar{k} \; x \left(-0.5\;\bar{j}\right) - 25\left(-0.5\;\bar{j}\right) = 7.5\,\bar{i} + 12.5\,\bar{j} \quad \text{(pie/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{a}_{2't} = \bar{a}_{2''t} = 7.5\,\bar{i} \quad \text{(pie/seg}^2\text{)} \qquad (4)$$

c).- Cálculo de la aceleración de 1’, como parte de A:

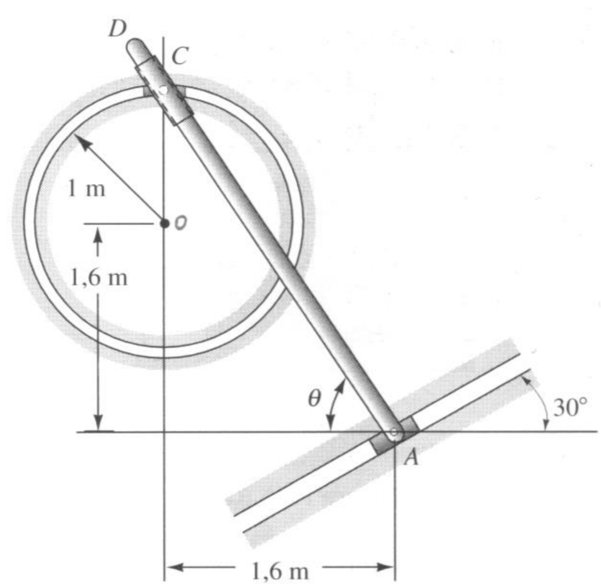
$$\bar{a}_{1'} = \bar{a}_{2''} + \alpha_A \bar{k} \; x \; \bar{r}_{2''1'} - \omega_A^2\;\bar{r}_{2''1'}$$

$$a_{1't}\bar{i} + a_{1'n}\bar{j} = \left(a_{2''t} + 1.5\,\alpha_A\right)\bar{i} + \left(a_{2''n} + 28.166\right)\bar{j}$$

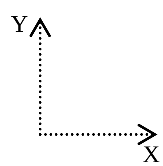
Igualando la componente tangencial y reemplazando (3) y (4):

$$-10 = 7.5 + 1.5\,\alpha_A \quad \rightarrow \quad \alpha_A = -11.667 \ \text{rad/seg}^2 \quad \rightarrow \quad \alpha_A = 11.667 \circlearrowleft \ \text{rad/seg}^2$$

2-68.- La biela AD gira con una velocidad angular horaria constante $\dot{\theta}$ de 2 rad/seg. El collar C situado sobre la biela AD está obligado a moverse por la ranura circular que se muestra en el diagrama. Cuando la biela está en la posición que se muestra, calcular la velocidad del collar C relativa al terreno ¿Cuál será la velocidad del collar C relativa a la biela AD? El punto A está estacionario.



P2-68



Solución

La barra AD tiene un movimiento alrededor de un eje fijo que pasa por A y el collar C un movimiento de traslación.

1).- Cálculo de la velocidad de C, tomando como punto de referencia A; si C' ϵ AD y coincide con C:

$$\bar{V}_C = \bar{V}_{C'/\Im} + \bar{V}_{C/AD} = \bar{\omega}_{AD}\, x\, \bar{r}_{AC'} + V_{C/AD}\left(-\cos\theta\,\bar{i} + sen\theta\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_C = -2\,\bar{k}\ x\left(-1.6\,\bar{i} + 2.6\,\bar{j}\right) + V_{C/AD}\left(-\cos 58.391\,\bar{i} + sen 58.39^{o}\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_C = \left(5.2 - 0.529\,V_{C/AD}\right)\bar{i} + \left(3.2 + 0.852\,V_{C/AD}\right)\bar{j} \qquad (1)$$

2).- Cálculo de la velocidad de C, tomando como punto de referencia a O:

$$\bar{V}_C = V_C\,\bar{i} \qquad (2)$$

(1) =(2) e igualando componentes:

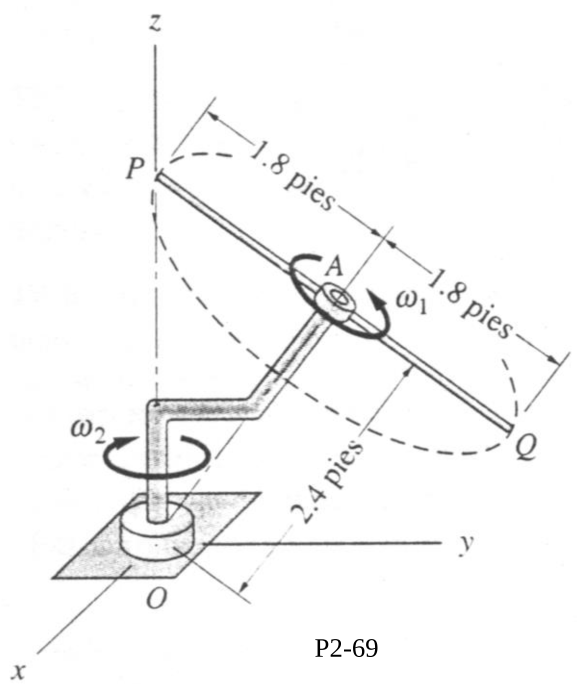
$$0 = 3.2 + 0.852\,V_{C/AD} \quad \rightarrow \quad V_{C/AD} = -3.756 \ \text{m/seg} \quad \rightarrow \quad \left|\bar{V}_{C/AD}\right| = 3.756 \ \text{m/seg}$$

$$\bar{V}_{C/AD} = -3.756\left(-0.524\,\bar{i} + 0.852\,\bar{j}\right) = 1.968\,\bar{i} - 3.2\,\bar{j} \quad \text{(m/seg)}$$

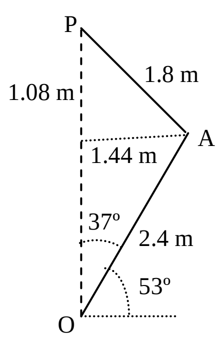
$$V_C = 5.2 - 0.524 * (-3.756) = 7.168 \quad \text{m/seg}$$

$$\bar{V}_C = 7.158\,\bar{i} \quad \text{(m/seg)}$$

2-69.- Una barra PQ gira alrededor del eje OA con una velocidad angular constante ω_1 = 20 rad/seg. Al mismo tiempo, OA gira alrededor del eje *z* con una velocidad angular constante ω_2 =12 rad/seg. Para la posición que se muestra, determine: a) la velocidad del extremo P y b) la aceleración del extremo P.



P2-69



P2-69a

Solución

La barra doblada OA gira alrededor de un eje fijo z y la barra PQ un movimiento general en el espacio.

1).- Cálculo de la velocidad y aceleración del punto base A (ver figura p2-69a):

$$\bar{V}_A = \bar{\omega}_2 x\, \bar{r}_{O\,A} = -12\,\bar{k}\ x\ 2.4\left(sen37^o\ \bar{j} + \cos 37^o\ \bar{k}\right) = 17.33\,\bar{i} \quad \text{(pie/seg)}$$

$$\bar{a}_A = \bar{\omega}_2 x\left(\bar{\omega}_2 x\, \bar{r}_{OA}\right) = -12\,\bar{k}\ x\left(17.33\,\bar{i}\right) = -207.96\,\bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

2).- Cálculo del movimiento angular de la barra PQ:

$$\bar{\omega}_{PQ} = \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1 = -12\,\bar{k} + 20\left(sen37^o\ \bar{j} + \cos 37^o\ \bar{k}\right) = 12.04\,\bar{j} + 3.97\,\bar{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{PQ} = \bar{\omega}_2 x\, \bar{\omega}_1 = -12\,\bar{k}\ x\ 20\left(sen37^o\ \bar{j} + \cos 37^o\ \bar{k}\right) = 144.44\,\bar{i} \quad \text{(rd/seg}^2\text{)}$$

3).- Cálculo de la velocidad y aceleración de P:

$$\bar{V}_P = \bar{V}_A + \bar{\omega}_{PQ} x\, \bar{r}_{AP} = 17.33\,\bar{i} + \left(12.04\,\bar{j} + 3.97\,\bar{k}\right) x \left(-1.44\,\bar{j} + 1.08\,\bar{k}\right)$$

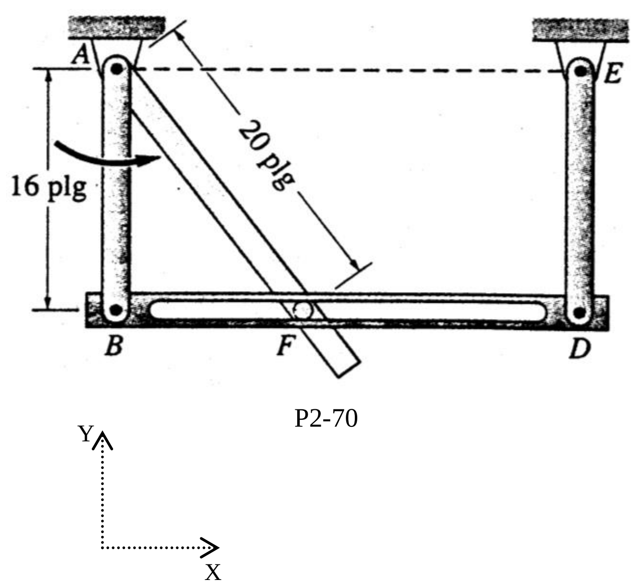
$$\bar{V}_P = \left(17.33 + 13 + 5.72\right)\bar{i} = 36.05\,\bar{i} \quad \text{(pie/seg)}$$

$$\bar{a}_P = \bar{a}_A + \dot{\bar{\omega}}_{PQ} x\, \bar{r}_{AP} + \bar{\omega}_{PQ} x \left(\bar{\omega}_{PQ} x\, \bar{r}_{AP}\right)$$

$$\bar{a}_P = -207.96\,\bar{j} + 144.44\,\bar{i}\; x \left(-1.44\,\bar{j} + 1.08\,\bar{k}\right) + \left(12.04\,\bar{j} + 3.97\,\bar{k}\right) x \left(18.72\,\bar{i}\right)$$

$$\bar{a}_P = \left(-207.96 - 166 + 74.32\right)\bar{j} + \left(-208 - 225.39\right)\bar{k}$$

$$\bar{a}_P = -299.64\,\bar{j} - 433.39\,\bar{k} \quad (\text{m/seg}^2) \quad \rightarrow \quad \left|\bar{a}_P\right| = 526.89 \;\; \text{m/seg}^2$$



P2-70

2-70.- El perno, que está unido a la barra AF, engancha en una ranura en la barra BD del eslabonamiento ABDE en paralelogramo. La barra AB del eslabonamiento tiene una velocidad angular constante de 15 rad/seg en el sentido indicado. Para la posición mostrada, determine la aceleración angular de la barra AF y la aceleración del perno F con respecto a la barra BD.

Solución

El Perno F tiene un movimiento circular, pero lineal respecto a la barra.

Las barras AF, AB y ED tienen movimiento alrededor de ejes fijos, y la barra BD movimiento de traslación.

1).- Cálculo de la velocidad y aceleración del punto base B:

$$\bar{V}_B = \bar{\omega}_{AB} k \;x\; \bar{r}_{AB} = 15\,\bar{k}\; x \left(-16\,\bar{j}\right) = 240\,\bar{i} \quad \text{(plg/seg)}$$

$$\bar{a}_B = -\omega_{AB}^2\,\bar{r}_{AB} = -15^2\left(-16\,\bar{j}\right) = 3600\,\bar{j} \quad (\text{plg/seg}^2)$$

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de F como parte de la barra AF:

$$\bar{V}_F = \bar{\omega}_{AF}\, x\, \bar{r}_{AF} = \omega_{AF}\ \bar{k}\ x\left(12\,\bar{i} - 16\,\bar{j}\right) = 16\,\omega_{AF}\ \bar{i} + 12\,\omega_{AF}\ \bar{j} \qquad (1)$$

$$\bar{a}_F = \alpha_{AF}\bar{k}\ x\ \bar{r}_{AF} - \omega_{AF}^2\ \bar{r}_{AF} = \left(16\,\alpha_{AF} - 12\,\omega_{AF}^2\right)\bar{i} + \left(12\,\alpha_{AF} + 16\,\omega_{AF}^2\right)\bar{j} \qquad (2)$$

3).- Cálculo de la velocidad y aceleración de F, tomando como punto base B:

$$\bar{V}_F = \bar{V}_B + \bar{V}_{F/BD} = 240\,\bar{i} - V_{F/BD}\ \bar{i} = \left(240 - V_{B/BD}\right)\bar{i} \qquad (3)$$

(2) = (3) e igualando Componentes:

$$12\,\omega_{AF} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_{AF} = 0$$

$$240 - V_{F/BD} = 0 \quad \rightarrow \quad V_{F/BD} = 240 \ \text{plg/seg}$$

$$\bar{a}_F = \bar{a}_B + \bar{a}_{F/BD} = 3600\ \bar{j} + a_{F/BD}\ \bar{i} \qquad (4)$$

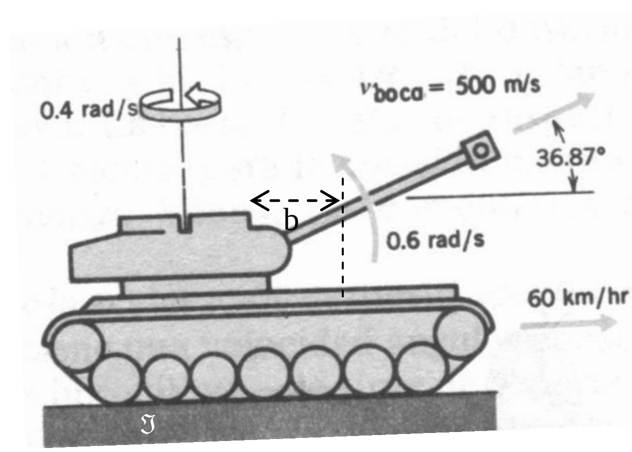
(3) =(4) e igualando componentes:

$$12\,\alpha_{AF} = 3600 \quad \rightarrow \quad \alpha_{AF} = 300 \ \text{rad/seg}^2$$

$$16 * 300 = a_{F/BD} \quad \rightarrow \quad a_{F/BD} = 4800 \ \text{plg/seg}^2$$

$$a_{F/BD} = 400 \ \text{pie/seg}^2$$

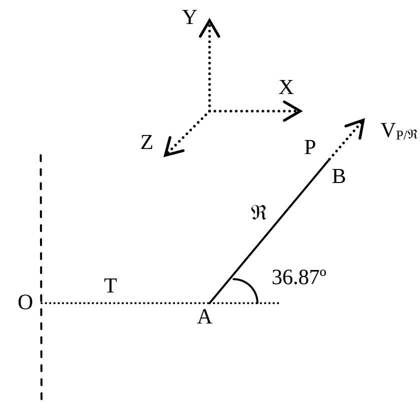
2-71.- Para la posición mostrada, la torrecilla montada sobre el tanque está girando con respecto al eje vertical a 0.4 rad/seg, y el cañón esta subiendo a 0.6 rad/seg; ambas razones de rotación son constantes: El tanque tiene una velocidad constante hacia delante de 60 km/h. Si para este instante se dispara el proyectil y este sale con una rapidez constante de 500m/seg respecto a la boca del cañón, ¿Cuál será la velocidad y la aceleración del proyectil inmediatamente después de que sale del cañón? Si la longitud del cañón es de 2 m y b = 0.75 m.



P2-70

Solución

El marco de referencia será el cuerpo rígido cañón, que tiene un movimiento general en el espacio, el punto base será la boca B del cañón (ver figura p2-70a) y P el proyectil.



P-70a

1).- Cálculo del movimiento del cañón $\Re$ (T = torreta):

$$\bar{\omega}_{\Re} = \bar{\omega}_{\Re/T} + \bar{\omega}_{T/\Im} = 0.6\,\bar{k} + 0.4\,\bar{j}$$

$$\bar{\omega}_{\Re} = 0.4\,\bar{j} + 0.6\,\bar{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\bar{\omega}_{\Re} = \bar{\omega}_{T/\Im}\, x\, \bar{\omega}_{\Re/T} = 0.4\,\bar{j}\; x\; 0.6\,\bar{k}$$

$$\bar{\omega}_{\Re} = 0.24\,\bar{i} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

2).- Calculo de la velocidad y aceleración del punto base B:

a).- Cálculo de la velocidad y aceleración de A, como parte de la torreta que tiene movimiento general en el plano:

$$\bar{V}_A = \bar{V}_O + \bar{\omega}_{T/\Im}\, x\, \bar{r}_{OA} = 60 * \frac{1000}{3600}\,\bar{i} + 0.4\,\bar{j}\; x\; 0.75\,\bar{i} = 16.67\,\bar{i} - 0.3\,\bar{k} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{a}_A = \overbrace{\bar{a}_0}^{0} - \omega^2_{T/\Im}\,\bar{r}_{OA} = -0.4^2\,\left(0.75\,\bar{i}\right) = -0.12\,\bar{i} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

b).- Cálculo del movimiento de B, como parte del cañón $\Re$:

$$\bar{r}_{AB} = 2\left(\cos 36.87^{a} + sen 36.87\,\bar{j}\right) = 1.6\,\bar{i} + 1.2\,\bar{j} \quad \text{(m)}$$

$$V_B = \bar{V}_A + \bar{\omega}_{\Re}\, x\, \bar{r}_{AB} = \bar{V}_A + \left(0.4\,\bar{j} + 0.6\,\bar{k}\right) x \left(1.6\,\bar{i} + a.2\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_B = \left(16.67 - 0.72\right)\bar{i} + 0.96\,\bar{j} + \left(-0.3 - 0.64\right)\bar{k} = 15.95\,\bar{i} + 0.96\,\bar{j} - 0.94\,\bar{k} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \dot{\bar{\omega}}_{\Re}\, x\, \bar{r}_{AB} + \bar{\omega}_{\Re}\, x \left(\bar{\omega}_{\Re}\, x\, \bar{r}_{AB}\right)$$

Donde:

$$\dot{\bar{\omega}}\; x\; \bar{r}_{AB} = 0.24\,\bar{i}\; x\left(1.6\,\bar{i} + 1.2\,\bar{j}\right) = 0.288\,\bar{k} \quad \text{m/seg}^2$$

$$\bar{\omega}_{\Re} x\left(\bar{\omega}_{\Re} x\, \bar{r}_{AB}\right)=\left(0.4\ \bar{j}+0.6\ \bar{k}\right) x\left(0.72\ \bar{i}+0.96\ \bar{j}-0.64\ \bar{k}\right)$$

$$\bar{\omega}_{\Re} x\left(\bar{\omega}_{\Re} x\, \bar{r}_{AB}\right)=-0.832\ \bar{i}-0.432\ \bar{j}+0.288\ \bar{k} \quad (\text{m/seg}^2)$$

Luego:

$$\bar{a}_B=(-0.12-0.832)\,\bar{i}-0.432\ \bar{j}+(0.288+0.288)\,\bar{k}$$

$$\bar{a}_B=-0.952\ \bar{i}-0.432\ \bar{j}+0.576\ \bar{k} \quad (\text{m/seg}^2)$$

3).- Cálculo del movimiento del proyectil P, respecto al marco móvil cañón $\Re$:

$$\bar{r}_{BP}=\bar{0}$$

$$\bar{V}_{P/\Re}=500\left(\cos 36.87^{o}\ \bar{i}+sen 36.87^{o}\right)=400\ \bar{i}+300\ \bar{j} \quad (\text{m/seg})$$

$$\bar{a}_{P/\Re}=\bar{0}$$

4).- Cálculo de la velocidad y aceleración de P respecto al marco inercial tierra:

$$\bar{V}_P=\bar{V}_B-\bar{V}_{P/\Re}=(15.95+400)\,\bar{i}+(0.96+300)\ \bar{j}-0.94\ \bar{k}$$

$$\bar{V}_P=415.95\ \bar{i}+300.96\ \bar{j}-0.94\ \bar{k} \quad (\text{m/seg}) \quad \rightarrow \quad \left|\bar{V}_P\right|=513.41 \ \text{m/seg}^2$$

$$\bar{a}_P=\bar{a}_B+2\ \bar{\omega}_{\Re} x\, \bar{V}_{P/\Re}$$

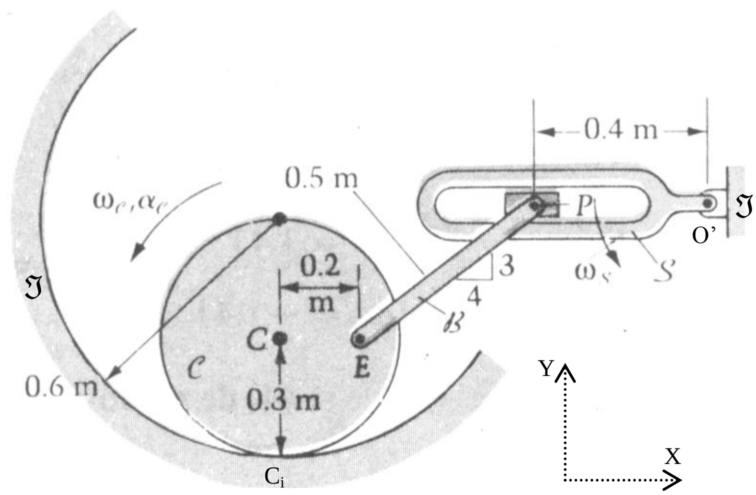
$$=\bar{a}_B+\left(0.8\ \bar{j}+1.2\ \bar{k}\right) x\left(400\ \bar{i}+300\ \bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_P=(-0.95-360)\,\bar{i}+(-0.432+480)\ \bar{j}+(0.576-320)\,\bar{k}$$

$$\bar{a}_P=-360.95\ \bar{i}+479.568\ \bar{j}-319.424\ \bar{k} \quad (\text{m/seg}^2)$$

$$\left|\bar{a}_P\right|=679.93 \ \text{m/seg}^2$$

2-72.- El cilindro C en la figura rueda sobre una superficie circular. Cuando se encuentra en el punto más bajo del circulo su velocidad angular es ω_C = 0.2 rad/seg (antihorario) su aceleración angular es α_C = 0.02 rad/seg^2 (antihorario). La barra β está articulada a C en E y está también articulada a un bloque en P que se desliza en la guía de S. La velocidad angular constante de S es de 0.3 rad/seg rad/seg (antihorarrio). Encuentre la velocidad de P en S y la velocidad angular de β en el instante dado.



P2-72

Solución

Se tiene cuatro cuerpos en movimiento: El Cilindro C tiene un movimiento general en el plano con rodamiento en una superficie cóncava hacia arriba, la barra β en movimiento general en el plano, La barra ranurada S en movimiento alrededor de un eje fijo que pasa por O' y el bloque P en movimiento de traslación.

1).- Cálculo de la velocidad de P, tomando como punto de referencia a =' y si P' ϵ a S coincidente con P:

$$\bar{V}_P = \bar{V}_{P/S} + \bar{V}_{P'} = V_{P/S}\,\bar{i} + \bar{\omega}_S\ x\ \bar{r}_{O'P'} = V_{P/S}\,\bar{i} + 0.3\,\bar{k}\ x\left(-0.4\,\bar{i}\right)$$

$$\bar{V}_P = V_{P/S}\,\bar{i} - 0.12\,\bar{j} \qquad (1)$$

2).- Calculo de la velocidad de P, tomando como punto base E del cilindro:

a).- Cálculo de la velocidad del punto base E:

$$\bar{V}_E = \bar{\omega}_C\ x\ \bar{r}_{C\,i\,E} = 0.2\,\bar{k}\ x\left(0.2\,\bar{i} + 0.3\,\bar{j}\right) = -0.06\,\bar{i} + 0.04\,\bar{j}\quad \text{(m/seg)}$$

b).- Cálculo de la velocidad de P, como parte de la barra β:

$$\bar{V}_P = \bar{V}_E + \bar{\omega}_\beta\ x\ \bar{r}_{EP} = \left(-0.06\,\bar{i} + 0.04\,\bar{j}\right) + \omega_\beta \bar{k}\ x\ 0.5\left(0.8\,\bar{i} + 0.6\,\bar{j}\right)$$

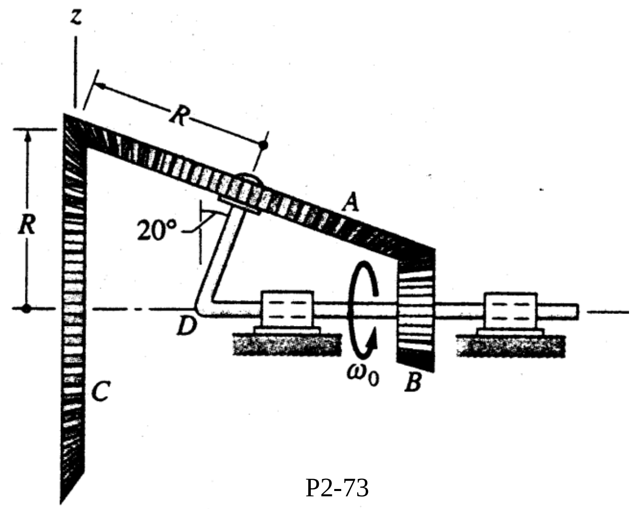
$$\bar{V}_P = \left(-0.06 - 0.3\,\omega_\beta\right)\bar{i} + \left(0.04 + 0.4\,\omega_\beta\right)\bar{j} \qquad (2)$$

(1) =(2) e igualando componentes:

$$-0.12 = 0.04 + 0.4\,\omega_\beta \quad \rightarrow \quad \omega_\beta = -0.4 \text{ rad/seg} \quad \rightarrow \quad \bar{\omega}_\beta = -0.4\,\bar{k} \text{ rad/seg}$$

$$V_{P/S} = -0.06 - 0.3*(-0.4) = 0.06 \text{ m/seg.}$$

2-73.- Los engranajes A y B giran libremente sobre un eje doblado, mientras que el engranaje C está fijo. El eje doblado gira libremente alrededor del eje y con una velocidad angular constante ω_0. Para la posición que se muestra, calcule la velocidad angular: a) del engranaje A, y b) del engranaje B.



P2-73

Solución

El engranaje C está fijo, el engranaje A tiene un movimiento alrededor del punto fijo D y el engranaje B tiene un movimiento alrededor de un eje fijo.

1).- Cálculos elementales (ver figura P2-73ª):

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= l^2 + R^2 \\ r^2 &= y^2 + R^2 \end{aligned}\right\} l^2 = y^2 \quad \rightarrow \quad l = y$$

$$R = R\,sen20^\circ + l\cos 20^\circ$$

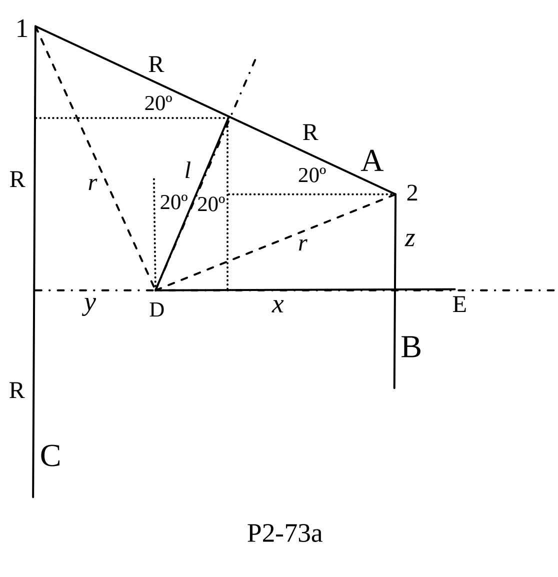
$$l = \frac{R\,(1 - sen20^\circ)}{\cos 20^\circ} = 0.7\,R$$

$$z = l\cos 20^\circ - R\,sen20^\circ$$

$$z = 0.7\,r\cos 20^\circ - R sen20^\circ = 0.316\,R$$

$$x = l\,sen20^\circ + R\cos 20^\circ$$

$$x = 0.7\,R\,sen20^\circ + R\cos 20^\circ = 1.179\,R$$



P2-73a

2).- Cálculo de la velocidad de 1, como parte de A:

$$\bar{V}_1 = \bar{0} = \bar{\omega}_A x \, \bar{r}_{D1} = \left[\bar{\omega}_{DE} + \omega_{A/DE}\left(sen20^\circ \, \bar{j} + \cos 20^\circ \, \bar{k}\right)\right] x \left(-0.7 \, R \, \bar{j} + R \, \bar{k}\right)$$

$$\bar{0} = \left[\left(\omega_0 + 0.342 \, \omega_{A/DE}\right) \bar{j} + 0.94 \, \omega_{A/DE} \, \bar{k}\right] + \left(-0.7 \, \bar{j} + \bar{k}\right) R$$

$$\bar{0} = \left(\omega_0 + 0.342 \, \omega_{A/DE}\right) R \, \bar{i} + 0.7 * 0.94 \, \omega_{A/DE} \, \bar{i}$$

Operando:

$$\omega_{A/DE} = -\omega_0$$

Luego:

$$\bar{\omega}_A = \left(\omega_0 - 0.342 \, \omega_0\right) \bar{i} - 0.94 \, \omega_0 \bar{k} = \omega_0 \left(0.658 \, \bar{j} - 0.94 \, \bar{k}\right)$$ (Unid. de Velocidad angular)

3).- Cálculo de la velocidad de 2:

a).- Como parte del engranaje A:

$$\bar{V}_2 = \bar{\omega}_A x \, \bar{r}_{D2} = \omega_0 \left(0.658 \, \bar{j} - 0.94 \, \bar{k}\right) x \left(1.179 \, R \, \bar{j} + 0.316 \, R \, \bar{k}\right)$$

$$\bar{V}_2 = \left(0.208 + 1.108\right) \omega_0 R \, \bar{i} = 1.316 \, R \, \omega_0 \, \bar{i} \qquad (1)$$

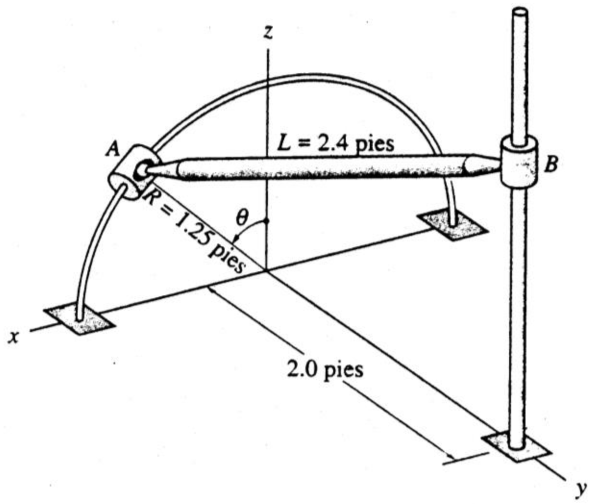
b).- Como parte del engranaje B:

$$\bar{V}_2 = \bar{\omega}_B x \, \bar{r}_{F2} = \omega_B \, \bar{j} \, x \, 0.316 \, \bar{k} = 0.316 \, R \, \omega_B \, \bar{i} \qquad (2)$$

(1) = (2):

$$1.316 \, R \, \omega_0 = 0.316 \, R \, \omega_B \quad \rightarrow \quad \omega_B = 4.165 \, \omega_0$$ (Unid. de velocidad angular)

2-74.- Una barra rotula AB (ver figura P2-74), que está conectada a los collarines A y B tiene una longitud L = 2.4 pies. El collarín B tiene una velocidad constante 10 pies/seg, Para θ = 60º, usando coordenadas naturales para A, encontrar la velocidad de A y las componentes tangencial, normal y binormal de la velocidad angular de AB.

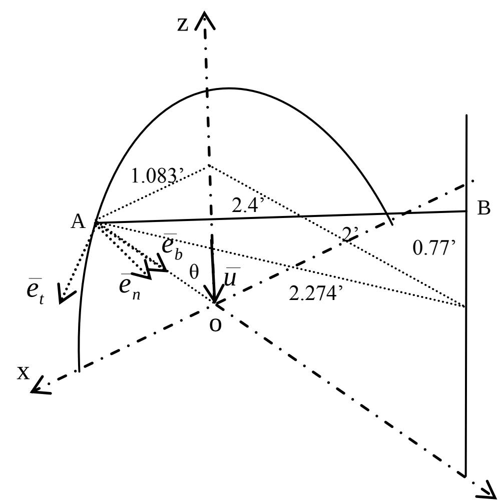


P2-74

Solución

Se tienen dos collarines en movimiento de traslación y la barra rótula AB con movimiento general en el espacio.

1).- Orientación de los vectores unitarios naturales en A y cálculos elementales (ver figura P2-74a):



P2-74a

$$\bar{i} = \cos\theta\,\bar{e}_t - sen\theta\,\bar{e}_n$$

$$\bar{j} = \bar{e}_B$$

$$\bar{k} = -\bar{u} = -\left(sen\theta\,\bar{e}_t + \cos\theta\,\bar{e}_n\right)$$

Si:

$$\bar{r}_{AB} = 1.25\,sen60^{o}\,\bar{i} + 2\,\bar{j} + 0.77\,\bar{k}$$

Reemplazando a los vectores sus respectivas equivalencia en coordenadas naturales

$$\bar{r}_{AB} = 1.083\left(\cos 60^{o}\,\bar{e}_t - sen60^{o}\,\bar{e}_n\right) + 2\,\bar{e}_b + 0.77\left(sen60^{o}\,\bar{e}_t + \cos 60^{o}\,\bar{e}_n\right)$$

$$\bar{r}_{AB} = 1.21\,\bar{e}_t - 0.553\,\bar{e}_n + 2\,\bar{e}_b \quad \text{(pies)}$$

$$\bar{V}_B = 10\,\bar{u} = 10\left(sen\theta\,\bar{e}_t + \cos\theta\,\bar{e}_n\right) = 8.66\,\bar{e}_t + 5\,\bar{e}_n \quad \text{(pie/seg)}$$

2).- Cálculo de la velocidad de A:

$$\bar{V}_A = \bar{V}_B + \bar{\omega}_{AB}\,x\,\bar{r}_{BA} = \bar{V}_B + \begin{vmatrix} \bar{e}_t & \bar{e}_n & \bar{e}_b \\ \omega_t & \omega_n & \omega_b \\ 1.21 & -0.553 & -2 \end{vmatrix}$$

$$V_A\ \bar{e}_t = \left[8.66 + \left(2\ \omega_n + 0.553\ \omega_b\right)\right]\bar{e}_t + \left[5 + \left(1.21\ \omega_b - 2\ \omega_t\right)\right]\bar{e}_n - \left(0.553\ \omega_t + 1.21\ \omega_n\right)\bar{e}_b$$

Igualando componentes:

$$V_A = 8.66 + 2\ \omega_n + 0.553\ \omega_b \qquad (1)$$

$$0 = 5 + 1.21\ \omega_b - 2\ \omega_t \quad \rightarrow \quad \omega_b = 1.653\ \omega_t - 4.13 \qquad (2)$$

$$0 = 0.553\ \omega_t + 1.21\ \omega_n \quad \rightarrow \quad \omega_n = -0.457\ \omega_t \qquad (3)$$

Por la unión de rótulas de la barra AB:

$$\bar{\omega}_{AB} \cdot \bar{r}_{AB} = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\omega_t \bar{e}_t + \omega_n \bar{e}_n + \omega_b \bar{e}_b\right) \cdot \left(1.21\ \bar{e}_t - 0.553\ \bar{e}_n + 2\ \bar{e}_b\right) = 0$$

$$1.21\ \omega_t - 0.553\ \omega_n + 2\ \omega_b = 0 \qquad (4)$$

(2) y (3) en (4):

$$1.21\ \omega_t + 0.553 * 0.457\ \omega_t + 2\left(1.653\ \omega_t - 4.13\right) = 0$$

$$4.769\ \omega_t = 8.26 \quad \rightarrow \quad \omega_t = 1.732 \text{ rad/seg}$$

En (3):

$$\omega_n = -0.792 \text{ rad/seg}$$

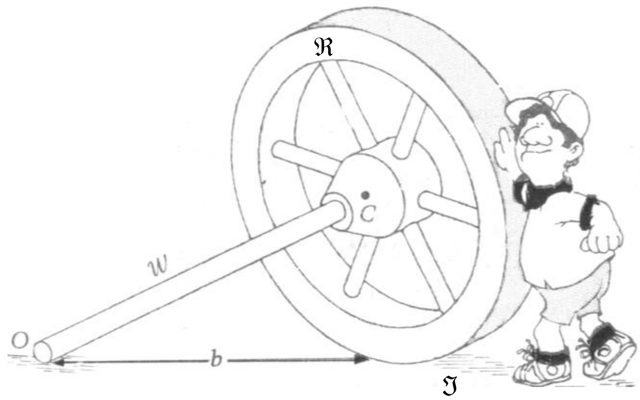
En (2):

$$\omega_b = 1.653 * 1.732 - 4.13 = -1.267 \text{ rad/seg}$$

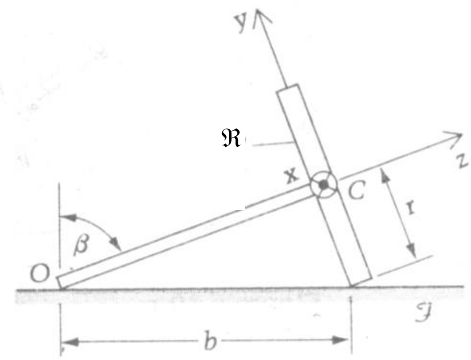
En (4):

$$V_A = 8.66 - 2 * 0.792 - 0.553 * 1.267 = 6.375 \text{ pie/seg} \quad \rightarrow \quad \bar{V}_A \quad 6.375\ \bar{e}_t \text{ (pie/seg)}$$

2-75.- Un joven empuja una rueda $\Re$ que rueda, cuyo centro C se mueve entonces con velocidad constante en un circunferencia horizontal (ver figura P-5a). Si el extremo O del eje permanece fijo mientras C regresa a su punto de partida en T segundos, obtenga los vectores velocidad y aceleración angulares de la rueda respecto al terreno (ver figura P-5b). Dé el resultado en función de b, β y T.



P2-75a



P2-75b

Solución

La rueda tiene un movimiento general en el espacio con rodamiento y el eje OC tiene un movimiento alrededor de un eje fijo.

1).- Cálculo de la velocidad angular de la rueda ℜ en ℑ:

$$\bar{\omega}_{\Re/\Im} = \bar{\omega}_{\Re/\Im} + \bar{\omega}_{OC/\Im} \qquad (1)$$

a).- Cálculo de la velocidad de C, como parte del cuerpo ℜ en rodamiento:

$$\bar{V}_C = \bar{\omega}_{\Re/\Im}\, x\, \bar{r}_{C\,i\,C} = \left[-\omega_{\Re/OC}\,\bar{k} + \omega_{OC/\Im}\left(sen\beta\;\bar{j} + \cos\beta\;\bar{k}\right)\right] x\; r\;\bar{j}$$

$$\bar{V}_C = \left(\omega_{\Re/OC}\, r - \omega_{OC/\Im}\, r\,\cos\beta\right)\bar{i} \qquad (2)$$

b).- Cálculo de la velocidad de C, como parte del eje OC:

$$\bar{V}_C = \bar{\omega}_{OC/\Im}\, x\, \bar{r}_{OC} = \omega_{OC/\Im}\left(sen\beta\;\bar{j} + \cos\beta\;\bar{k}\right) x \left(b^2 - r^2\right)^{1/2}$$

$$\bar{V}_C = \omega_{OC/\Im}\, sen\beta\left(b^2 - r^2\right)^{1/2}\,\bar{i}$$

Donde:

$$\omega_{OC/\Im} = \frac{2\,\pi}{T}$$

Luego:

$$\overline{V}_C = \frac{2\,\pi}{T}\,sen\beta\left(b^2 - r^2\right)^{1/2}\,\overline{i} \qquad (3)$$

(2) = (3):

$$\omega_{\Re/OC}\,r - \frac{2\,\pi}{T}\,r\,\cos\beta = \frac{2\,\pi}{T}\,sen\beta\left(b^2 = r^2\right)^{1/2}$$

$$\omega_{\Re/OC} = \frac{2\,\pi}{T}\left[\cos\beta + \frac{sen\beta}{r}\left(b^2 = r^2\right)^{1/2}\right]$$

$$\therefore \quad \overline{\omega}_{\Im/\Im} = -\frac{2\,\pi}{T}\left[\cos\beta + \frac{sen\beta}{r}\left(b^2 - r^2\right)^{1/2}\right]\overline{k} + \frac{2\,\pi}{T}\left(sen\beta\;\overline{j} + \cos\beta\;\overline{k}\right)$$

$$\overline{\omega}_{\Re/\Im} = \frac{2\,\pi}{T}\left[sen\beta\;\overline{j} - \frac{sen\beta}{r}\left(b^2 - r^2\right)^{1/2}\;\overline{k}\right]$$

Si: $r = b\cos\beta$

$$\overline{\omega}_{\Re/\Im} = \frac{2\,\pi}{T}\left[sen\beta\;\overline{j} - \frac{sen\beta}{b\cos\beta}\left(b^2 - b^2\cos^2\beta\right)^{1/2}\;\overline{k}\right] = \frac{2\,\pi}{T}\left[sen\beta\;\overline{j} - \frac{b\;sen\beta\;sen\beta}{b\cos\beta}\;\overline{k}\right]$$

$$\overline{\omega}_{\Re/\Im} = \frac{2\,\pi}{T}\left[sen\beta\;\overline{j} - \frac{sen^2\beta}{\cos\beta}\;\overline{k}\right] \quad \text{(Unid. de velocidad angular)}$$

2).- Cálculo de la aceleración angula de $\Re$ en $\Im$, derivando (1) respecto al tiempo:

$$\dot{\overline{\omega}}_{\Re/\Im} = \overline{\omega}_{OC/\Im}\,x\,\omega_{\Re/OC} = \frac{2\,\pi}{T}\left(sen\beta\;\overline{j} + \cos\beta\;\overline{k}\right)x\left(-\omega_{\Re/OC}\,\overline{k}\right)$$

$$\dot{\overline{\omega}}_{\Re/\Im} = -\frac{4\,\pi^2}{T^2}\,sen\beta\left(\cos\beta + \frac{tg\beta}{b}\,b\;sen\beta\right)\overline{i}$$

$$\dot{\overline{\omega}}_{\Re/\Im} = -\frac{4\,\pi^2}{T^2}\,sen\beta\left(\cos\beta + \frac{sen^2\beta}{\cos\beta}\right)\overline{i} \quad \text{(Unid. de aceleración angular)}$$