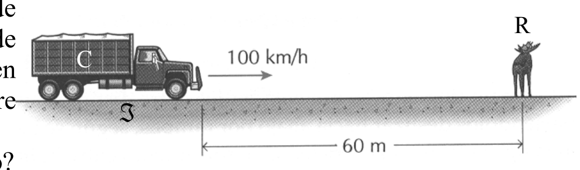
PROBLEMAS SOBRE CINÉTICA DE SISTEMAS DE PARTICULAS Y DE CENTRO DE MASA DE CUERPOS

3-1.- Un camión que pesa 37.5 KN va por una carretera a 100 km/hr, cuando el conductor ve de pronto una res parada en su camino a 60 m delante de él (ver figura P3-1). Si el conductor tarda 0.4 seg en pisar el freno y el coeficiente de rozamiento entre ruedas y calzadas vale 0.5.
a).- ¿Puede evitar el atropello sin desviarse a un lado?
b).- ¿En qué posición relativa a la res quedaría detenido el camión?
c).- Si el conductor debe desviarse a un lado, determine la celeridad, que llevaría el camión al pasar junto a la res.

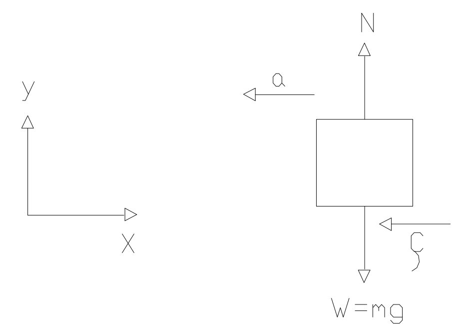


P3-1

Solución

Hay dos etapas; el momento que va con un M.R.U. y el otro con un M.R.U.V. (desaceleración).

1).- D.C.L del camión, para un instante cualquiera donde esta siendo frenado (ver figura P3-1a):



P3-1a

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad N = mg$$

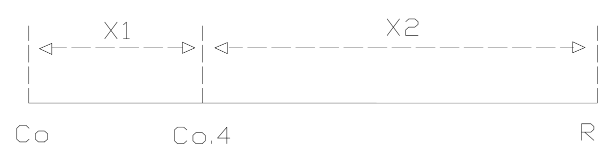
$$\sum F_X = ma_X \quad \rightarrow \quad -f = -ma$$

$$mg\ \mu = ma$$

$$a = 9.81 * 0.5 = 4.905 \quad \text{m/seg}^2$$

3).- Relaciones cinemáticas:

a).- Cálculo de X_1 y X_2 (ver figura P3-1b):



P3-1b

$$X_1 = V_C\ t = \frac{100}{3.6} * 0.4 = 11.11 \quad \text{m}$$

$$X_2 = 60 - 11.11 = 48.89 \quad \text{m}$$

b). - Cálculo de la distancia en que se detendrá el camión:

$$V^2 = V_0^2 + 2\,a\,X \quad \rightarrow \quad 0 = 771.6 - 2*4.905X$$

$$X = 78.65 \text{ m} \quad \rightarrow \quad X > X_2$$

Luego el camión necesita desviarse para no atropellar a la res.

c).- Cálculo de la posición relativa de la res, respecto al camión:

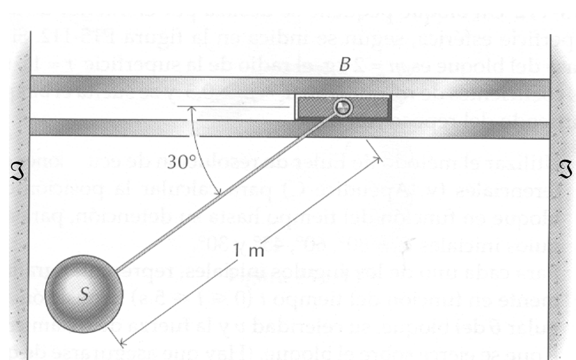
$$X_{R/C} = X - X_2 = 78.67 - 48.89 = 29.78 \text{ m}$$

d).- Cálculo de la velocidad, que llevará el camión al recorrer X_2:

$$V_2^2 = 771.6 - 2*4.905*48.89 = 291.99$$

$$V_2 = 17.08 \text{ m/seg}$$

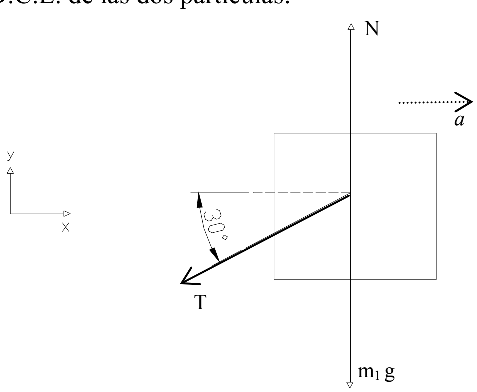
3-2.- Una esfera S de masa 5 kg está unida a un bloque B de 1 kg, que desliza libremente por una guía horizontal lisa, según se indica en la figura. La masa de la varilla que une a la esfera al bloque es despreciable. Si se suelta al sistema partiendo del reposo, en la posición representada, determinar: a) la tensión de la varilla al empezar el movimiento y b) la aceleración del bloque al empezar el movimiento.

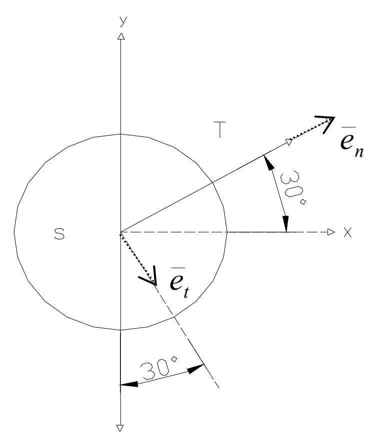


P3-2

Solución

1).- D.C.L. de las dos partículas:





P3-2a

(a) (b)

2).- Relaciones cinemáticas:

$$\bar{a}_S = a\,\bar{i} + a_t\left(sen\ 30°\bar{i} - \cos 30°\bar{j}\right) \quad \rightarrow \quad \bar{a}_S = \left(a + a_t sen\ 30°\right)\bar{i} - a_t \cos 30°\ \bar{j}$$

3).- Relaciones cinéticas (ver figura P3-2a):

a).- Para (a), ver figura P3-2a):

$$\sum F_X = m_1 a \quad \rightarrow \quad -T\cos 30° = m_1 a \quad \rightarrow \quad T\cos 30° = -m_1 a \qquad (1)$$

b).- Para (b), ver figura P3-2a)::

$$\sum F_X = m_2 a_X \quad \rightarrow \quad T\cos 30° = m_2\left(a + a_t sen 30°\right) \qquad (2)$$

$$\sum F_Y = m_2 a_Y \quad \rightarrow \quad T\ sen\ 30° - m_2 g = -m_2 a_t \cos 30°$$

$$T\ sen\ 30° = m_2 g - m_2 a_t \cos 30° \qquad (3)$$

(3) ÷ (1):

$$tg\ 30° = -\frac{m_2\left(g - a_t \cos 30°\right)}{m_1 a} \qquad (4)$$

(1)= (2):

$$-m_1 a = m_2 a + m_2 a_t sen\ 30° \quad \rightarrow \quad a = -\frac{m_2 a_t sen\ 30°}{m_1 + m_2} \qquad (5)$$

(5) en (4):

$$tg\ 30° = \frac{\left(m_1 + m_2\right) m_2\left(g - a_t \cos 30°\right)}{m_1 m_2 a_t sen 30°} \quad \rightarrow \quad 1.44 a_t = 294.3 - 25.98\ a_t$$

$$27.42\ a_t = 294.3 \quad \rightarrow \quad a_t = 10.73 \ \text{ m/seg}^2$$

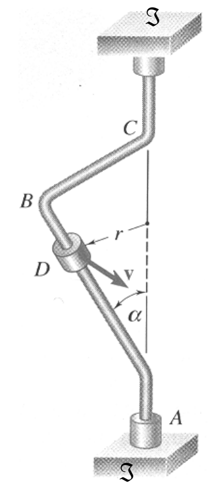
Luego en (4):

$$a = -84.96 + 80.475 = -4.485 \ \text{ m/seg}^2$$

En (1):

$T = 5.179$ Newton

3-3.- Una pequeña corredera D de 300 gr puede deslizar por la porción AB de una varilla curvada como se muestra en la figura. Sabiendo que r = 20 cm y que la varilla gira en torno a la vertical AC a la velocidad constante de ω = 10 rad/seg; hallar el menor valor admisible del coeficiente de rozamiento estático entre la corredera y la varilla, si la corredera no debe deslizar cuando (a) α = 15°, (b) α = 45°. Indicar en cada caso el sentido del movimiento inminente.



P3-3

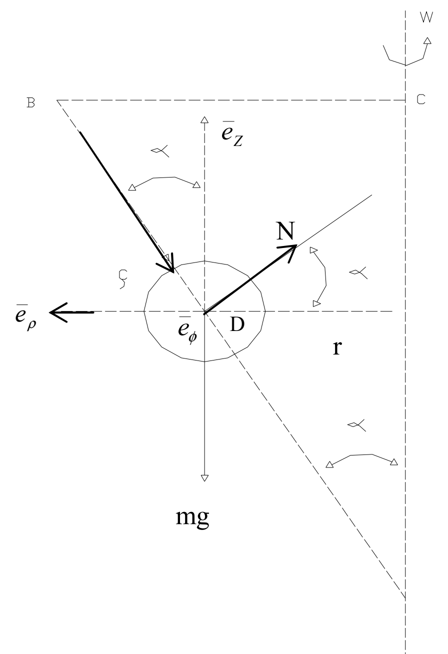
Solución

1).- D.C.L. (ver figura P3-3a):

$$\bar{N} = N\left(-\cos\alpha\,\bar{e}_\rho + sen\alpha\,\bar{e}_Z\right)$$

$$\bar{f} = f\left(-sen\alpha\,\bar{e}_\rho - \cos\alpha\,\bar{e}_Z\right)$$

$$\bar{w} = -mg\,\bar{e}_Z$$



P3-3a

2).- Relaciones cinemáticas:

$$\left|\begin{array}{l|l|l} \rho = r = 0.2\ m & \dot{\phi} = 10\ rad/seg & \dot{Z} = 0 \\ \dot{\rho} = 0 & & \\ \ddot{\rho} = 0 & \ddot{\phi} = 0 & \ddot{Z} = 0 \end{array}\right|$$

$$\bar{a}_{D/\Im} = -\rho\dot{\phi}^2\bar{e}_\rho = -0.2*10^2\,\bar{e}_\rho$$

$$\bar{a}_{D/\Im} = -20\,\bar{e}_\rho \ \text{(m/seg}^2\text{)}$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_\rho = ma_\rho \quad \rightarrow \quad +N\cos\alpha + f\ sen\alpha = +0.3*20 = 6 \qquad (1)$$

$$\sum F_Z = 0 \quad \rightarrow \quad Nsen\alpha - f\ \cos\alpha = mg \qquad (2)$$

(1)* cos α + (2)* sen α:

$$N = 6\cos\alpha + mg\ sen\alpha \tag{3}$$

(3) en (1):

$$f = \frac{6}{sen\alpha} - \frac{6\cos^2\alpha}{sen\alpha} - mg\ \cos\alpha \tag{4}$$

a).- Para α = 15°:

En (3):

$N = 6.557$ Newton

En (4):

$f = -1.29$ Newton o $f = 129$ ↖ (Newton)

El menor valor admisible, se da cuando:

$$\mu_S = \frac{f}{N} = 0.197$$

El movimiento inminente es contrario al sentido de la fuerza de fricción, luego el movimiento inminente es hacia abajo.

b).- Para α = 45°:

En (3):

$N = 6.324$ Newton

En (4):

$f = 2.162$ Newton

Luego:

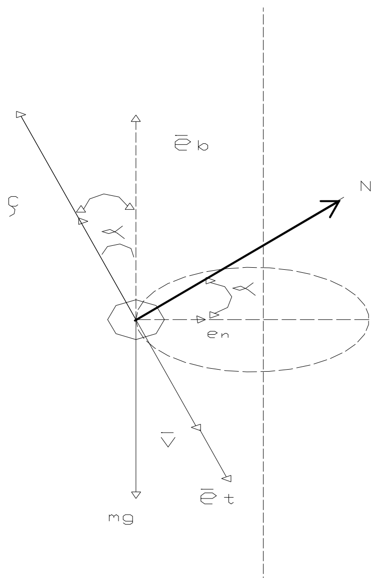
$$\mu_S = \frac{f}{N} = \frac{2.162}{6.324} = 0.342$$

El movimiento inminente es hacia arriba.

3-4.-Para la figura del Problema 3-3. Una pequeña corredera D de 200 gr puede deslizar por la porción AB de una varilla curvada como se muestra. Sabiendo que la varilla gira en torno a la vertical AC a velocidad constante y que α = 40° y r = 600 mm. Hallar para qué intervalo de valores de la velocidad V, no desliza la corredera, si entre ésta y la varilla hay un coeficiente de rozamiento estático de 0.30.

Solución

1).- D.C.L. (cuando la corredera no desliza):



P3-4a

$$\bar{N} = N\left(\cos\alpha\,\bar{e}_n + sen\alpha\,\bar{e}_b\right)$$

$$\bar{f} = \pm f\left(-sen\alpha\,\bar{e}_n + \cos\alpha\,\bar{e}_b\right)$$

(+ movimiento inminente, hacia abajo y – movimiento inminente hacia arriba)

$$\bar{w} = -w\,\bar{e}_b$$

2).- Relaciones cinéticas (ver figura P3-4a):

$$\sum F_n = ma_n \quad \rightarrow \quad N\cos\alpha \mp f\ sen\alpha = m\frac{V^2}{r} \qquad (1)$$

$$\sum F_b = 0 \quad \rightarrow \quad Nsen\alpha \pm f\ \cos\alpha = w \qquad (2)$$

(1)x cos α + (2) x sen α:

$$N = m\frac{V^2}{r}\cos\alpha + wsen\alpha \qquad (3)$$

$$f = \mu_S N = 0.3\left(m\frac{V^2}{r}\cos\alpha + wsen\alpha\right)$$ (Movimiento inminente)

En (1):

$$m\frac{V^2}{r}\cos^2\alpha + wsen\alpha\cos\alpha \mp 0.3\left(m\frac{V^2}{r}\cos\alpha sen\alpha + wsen^2\alpha\right) = m\frac{V^2}{r}$$

$$m\frac{V^2}{r}\left(\cos^2\alpha - 1 \mp 0.3\cos\alpha sen\alpha\right) = mg\left(\pm 0.3 sen^2\alpha - sen\alpha\cos\alpha\right)$$

$$V = \sqrt{\frac{rg\left(\pm 0.3sen^2\alpha - sen\alpha\cos\alpha\right)}{\left(-sen\alpha \mp 0.3\cos\alpha sen\alpha\right)}} \rightarrow V = \sqrt{\frac{9.81x0.6\left(\pm 0.3sen^2 40° - sen40°\cos 40°\right)}{\left(-sen40° \mp 0.3\cos 40° sen40°\right)}}$$

$$V = \sqrt{\frac{\pm 0.73 - 2.9}{\mp 0.148 - 0.413}}$$

a).- Cuando el movimiento es inminente hacia abajo:

$$V = \sqrt{\frac{0.73 - 2.9}{-0.148 - 0.413}} = 1.97 \quad \text{m/seg}$$

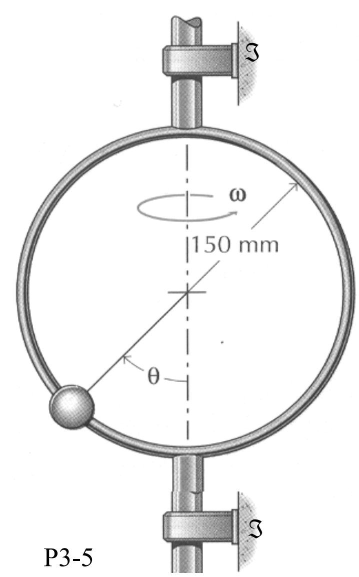
b).- Cuando el movimiento es inminente hacia arriba:

$$V = \sqrt{\frac{-0.7 - 2.9}{0.148 - 0.413}} = 3.7 \quad \text{m/seg}$$

Luego:

$$1.97 \quad \text{m/seg} \leq V \leq 3.7 \quad \text{m/seg}$$

3-5.- Una bolita de masa 0.50 kg está montada en el aro de la figura y puede deslizarse libremente (rozamiento despreciable) sobre él cuando éste gire. Usando coordenadas esféricas, determinar el ángulo θ y la fuerza que el aro ejerce sobre la bola cuando aquel gire en torno a un diámetro vertical con una velocidad angular constante igual a ω = 120 RPM.



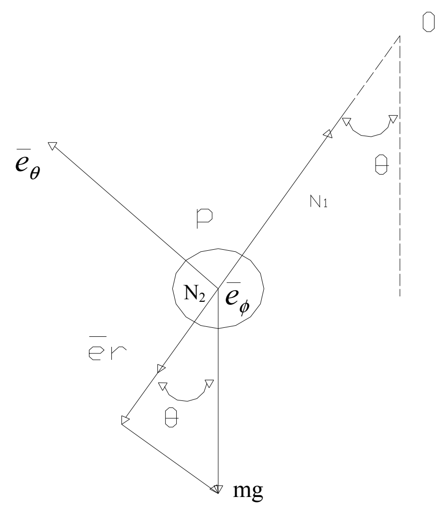
P3-5

Solución

1).- D.C.L.:

2).- Relaciones cinemáticas (ver figura P3-5a):

$$\begin{array}{l|l} r = 0.15\ m & \theta = ? \\ \dot{r} = 0 & \dot{\theta} = 0 \\ \ddot{r} = 0 & \ddot{\theta} = 0 \end{array}$$



P3-5a

$$\dot{\phi} = -120 * \frac{\pi}{30} = -4\pi\ rad/seg$$

$$\ddot{\phi} = 0$$

$$\bar{a}_P = -r\dot{\phi}^2 sen^2\theta\ \bar{e}_r - r\dot{\phi}^2 sen\theta\cos\theta\ \bar{e}_\theta$$

$$\bar{a}_P = -0.15 * (-4\pi)^2 sen^2\theta\ \bar{e}_r - 0.15 * (-4\pi)^2 sen\theta\cos\theta\ \bar{e}_\theta$$

$$\bar{a}_P = -23.687 sen^2\theta\ \bar{e}_r - 23.687 sen\theta\cos\theta\ \bar{e}_\theta \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_\theta = ma_\theta \quad \rightarrow \quad -mgsen\theta = -m * 23.697 sen\theta\cos\theta$$

$$\cos\theta = 0.41415 \quad \Rightarrow \quad \theta = 65.534°$$

$$\sum F_r = ma_r \quad \rightarrow \quad mg\cos\theta - N_1 = -m * 23.687 sen^2\theta$$

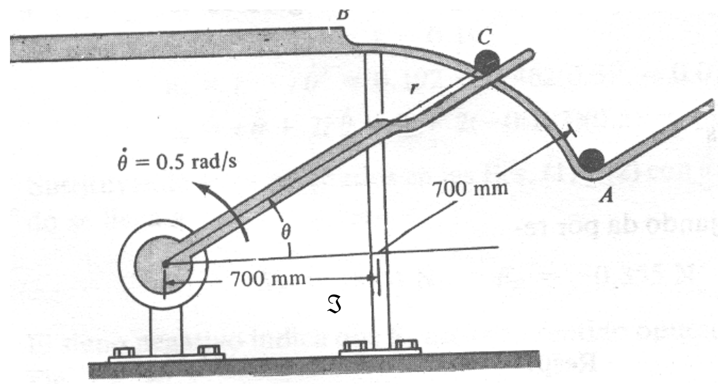
$$N_1 = 11.843\ N$$

$$\sum F_\phi = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 = 0$$

Luego:

$$N = N_1 = 11.843 \text{ Newton}$$

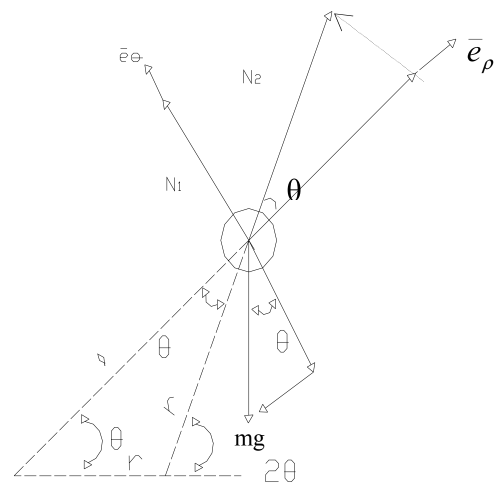
3-6.- Una lata lisa C, que tiene una masa de 2 kg es levantada desde un conducto de alimentación A hasta una rampa en B por medio de una varilla giratoria ahorquillada. Si la varilla mantiene un movimiento angular constante de $\dot{\theta}$ = 0.5 rad/seg, determine la fuerza que ejerce la varilla sobre la lata en el instante en que θ = 30°. Desprecie los efectos de la fricción en el cálculo. La rampa desde A hasta B es circular y tiene un radio de 700 mm.



P3-6

Solución

1).- D.C.L. de la lata (ver figura P3-6a):



P3-6a

2).- Relaciones cinemáticas, para θ = 30°:

$$\rho = 2r\cos\theta = 2*0.7\cos 30° = 1.21 \quad \text{m}$$

$$\dot{\rho} = -2rsen\theta\dot{\theta}$$

$$\dot{\rho} = -2*0.7*sen30°*0.5 = -0.35 \quad \text{m/seg}$$

$$\ddot{\rho} = -2r\cos\theta\,\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{\rho} = -2*0.7\cos 30°*0.5^2 = -0.303 \quad \text{m/seg}^2$$

$$\dot{\theta} = 0.5 \quad \text{rad/seg}$$

$$\ddot{\theta} = 0$$

Si:

$$\bar{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\bar{e}_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\,\bar{e}_\theta$$

$$\bar{a} = (-0.303 - 1.21*0.25)\,\bar{e}_\rho + 2*(-0.35)*0.5\,\bar{e}_\theta$$

$$\bar{a} = -0.61\,\bar{e}_\rho - 0.35\,\bar{e}_\theta \quad (\text{m/seg}^2)$$

3).- Relaciones cinéticas, para θ = 30°:

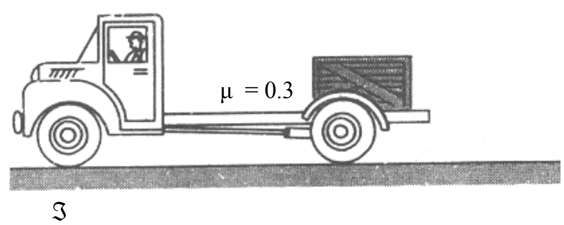
$$\sum F_\rho = ma_\rho \quad \rightarrow \quad N_2 \cos 30° - mgsen30° = m\,(-0.61)$$

$$N_2 = \frac{m}{\cos 30°}(gsen30° - 0.61) = 9.92 \text{ Newton}$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta \quad \rightarrow \quad N_1 + N_2 sen30° - mg\cos 30° = 2(-0.35)$$

$$N_1 = 16.991 - 0.7 - 4.96 = 11.331 \text{ Newton}$$

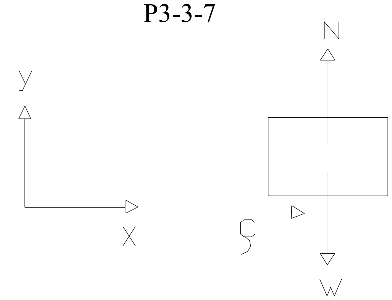
3-7.- El camión de la figura se encuentra viajando a 70 km/hr. Encuentre la distancia mínima en que puede detenerse sin que resbale la caja de 1200 Newton. Suponga que la caja no puede voltearse.



P3-3-7

Solución

1).- D.C.L. del cajón:



P3-7a

2).- Relaciones cinemáticas:

$$\bar{a}_{\Re} = \bar{a}_C + \bar{a}_{\Re/C} \quad \rightarrow \quad a_{\Re}\bar{i} = a_C\bar{i} + a_{\Re/C}\bar{i}$$

$$a_{\Re} = a_C + a_{\Re/C} \qquad (1)$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad N = mg$$

$$\sum F_X = ma_{\Re} \quad \rightarrow \quad f = \mu\, N = \mu\, mg = ma_{\Re}$$

$$\mu\, g = a_{\Re} \qquad (2)$$

3).- Para que la caja no resbale $a_{\Re/C} = 0$, luego en (1):

$a = a_{\Re} = a_C$:

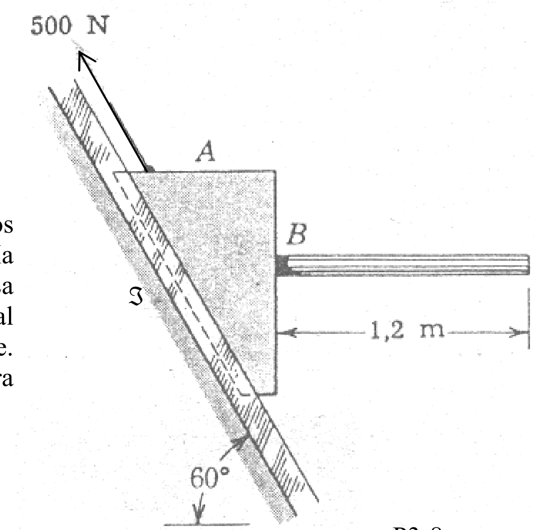
$$a = \frac{dV}{dt} * \frac{dX}{dX} \quad \rightarrow \quad \int_0^X a dX = \int_{V_0}^{V} V dV$$

$$aX = \frac{1}{2} V^2 \Big|_{V_0}^{V} = \frac{1}{2}\left(V^2 - V_0^2\right) \qquad (3)$$

En (3) si: $a = \mu\, g, V = 0\ y\ \ V_0 = 19.44$ m/seg

$$X = -\frac{19.44^2}{2*0.3*9.81} = -64.23 \text{ m}$$

Luego la distancia recorrida es de 64.23 m ($\leftarrow$)

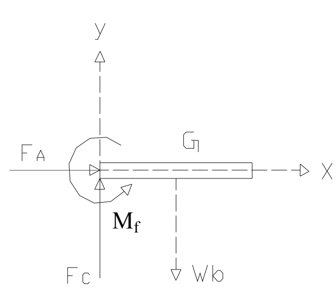


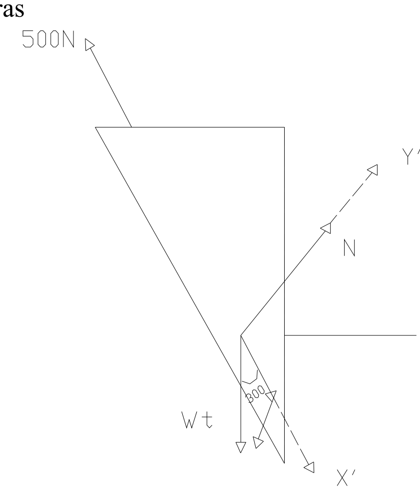
P3-8

3-8.- El bloque $\Re$ y la barra $\wp$ sujeta a él pesan juntos 450 N y están obligadas a moverse a lo largo de su guía de 60° bajo la acción de la fuerza aplicada de 500 N. La barra uniforme horizontal pesa 140 N y está soldada al bloque en B. El rozamiento en la guía es despreciable. Calcular el momento flector ejercido por la soldadura sobre la barra en B.

Solución

1).- D.C.L. (de la barra separada) y D.S.F. (ver figuras P3-8a):





P3-8a

(a) (b)

2).- Relaciones cinéticas en (b).- Para encontrar la aceleración del sistema (ver figura P3-8a):

$$\sum F_{X'} = m_t a$$

$$-500 + 450\cos 30° = \frac{450}{9.81} a \quad \rightarrow \quad a = -2.4 \text{ m/seg } (\nwarrow)$$

La aceleración de G en (a); movimiento del sistema en traslación:

$$\bar{a}_G = 2.4\left(-\cos 60°\bar{i} + sen60°\bar{j}\right) \quad \rightarrow \quad \bar{a}_G = -1.2\,\bar{i} + 2.078\bar{j} \quad (\text{m/seg}^2)$$

3).- Relaciones cinéticas en (a) (ver figura P3-8a):

$$\sum F_Y = m_b a_{GY}$$

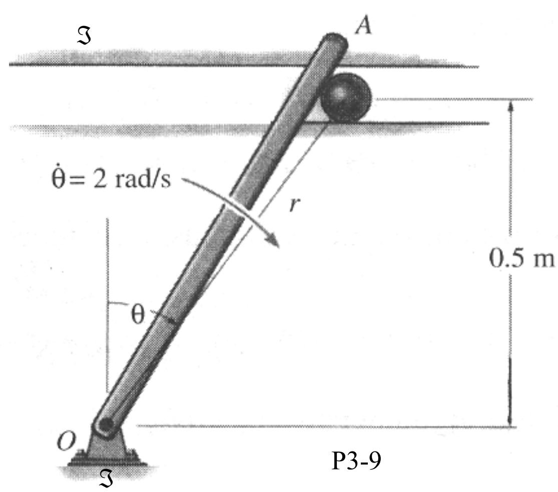
$$F_C - w_b = m_b(2.078)$$

$$F_C = 140 + \frac{140}{9.81} * 2.078 = 169.66 \text{ Newton}$$

$$\sum M_G = 0 \quad \rightarrow \quad M_f - 169.66 * 0.6 = 0$$

$$M_f = 101.796 \text{ N-m}$$

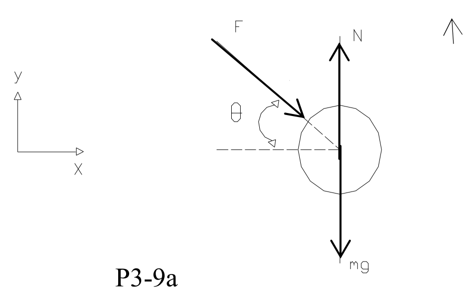
3-9.- Una partícula tiene una masa de 0.5 kg y se encuentre confinada a moverse en la ranura horizontal lisa debida a la rotación del brazo OA. Determínese la fuerza de la barra sobre la partícula y la fuerza normal de la ranura sobre la partícula, cuando θ = 30°, la barra gira con una aceleración angular $\ddot{\theta}$ = 3 rad/seg^2 y una velocidad angular $\dot{\theta}$= 2 rad/seg. Suponga que la partícula tiene contacto con sólo un lado de la ranura en cualquier instante.



P3-9

Solución

1).- D.C.L. de la partícula (ver figura 9a):



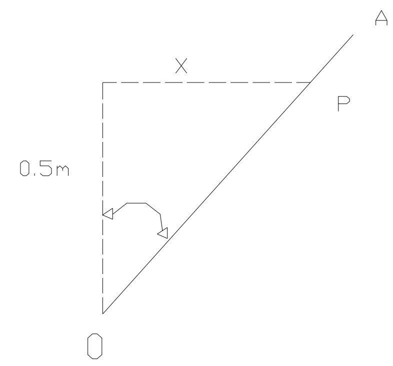
P3-9a

2).- Relaciones cinemáticas para la partícula P (ver figura P3-9b):

$$X = 0.5\, tg\theta$$

$$\dot{X} = 0.5 \sec^2 \theta\dot{\theta}$$

$$\ddot{X} = \sec^2 \theta\, tg\theta\, \dot{\theta}^2 + 0.5 \sec^2 \theta\, \ddot{\theta}$$



P3-9b

Reemplazando valores, para $\ddot{X}$:

$$\ddot{X} = 5.08 \ \text{m/seg}^2$$

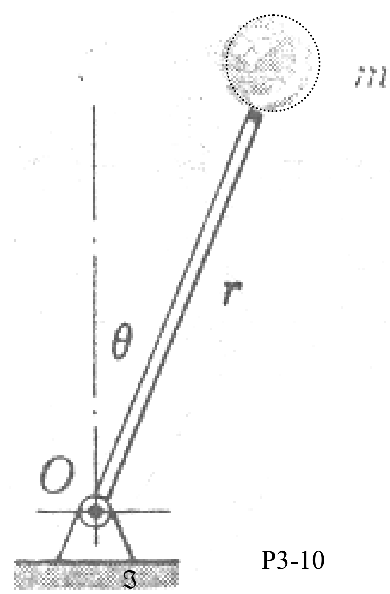
3).- Relaciones cinéticas, para la partícula P:

$$\sum F_X = m\ddot{X} \quad \rightarrow \quad F\cos 30° = 0.5 * 5.08 \quad \rightarrow \quad F = 2.93 \ \text{Newton}$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad -Fsen30° - mg + N = 0$$

$$N = 6.37 \ \text{Newton}$$

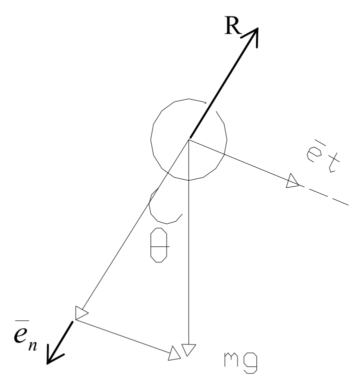
3-10.- La esfera de masa *m* está sostenida por una varilla ligera, girando alrededor del eje horizontal en O. La distancia entre O y el centro de la esfera es “r”; si la esfera se suelta partiendo del reposo con un ángulo θ igual a cero, determinar el valor de θ para el cual la fuerza en la barra cambia de compresión a tensión.



P3-10

Solución

1).- D.C.L.:



P3-10a

2).- Relaciones cinéticas (ver figura P3-10a):

$$\sum F_t = ma_t \quad \rightarrow \quad mgsen\theta = mr\ddot{\theta}$$

$$gsen\theta = r\frac{d\dot{\theta}}{dt} * \frac{d\theta}{d\theta}$$

Separando variables e integrando:

$$\int_0^\theta \frac{g}{r} sen\theta\, d\theta = \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\theta \quad \rightarrow \quad \frac{g}{r}(1-\cos\theta) = \frac{\dot{\theta}^2}{2} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{r}(1-\cos\theta) \qquad (1)$$

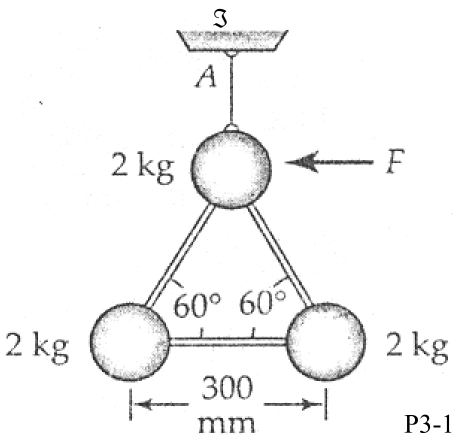
$$\sum F_n = ma_n \quad \rightarrow \quad mg\cos\theta - R = mr\dot{\theta}^2 \qquad (2)$$

Para que R cambie de compresión a tensión, debe ser igual a cero; luego de (2) y (1):

$$mg\cos\theta = mr * \frac{2g}{r}(1-\cos\theta) \quad \rightarrow \quad 3\cos\theta = 2$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\tfrac{2}{3}\right) = 48.19°$$

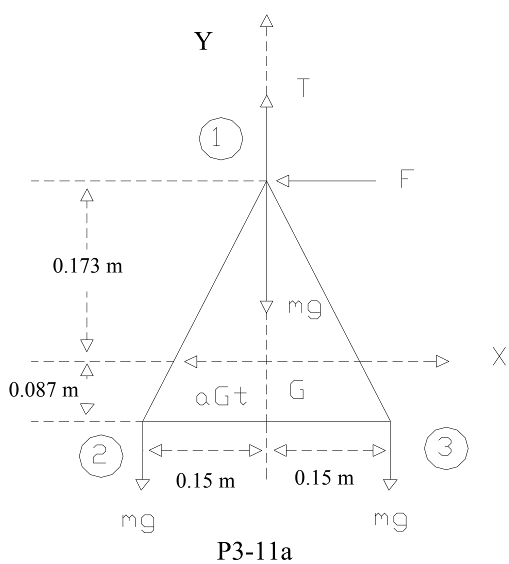
3-11.- Las tres esferas iguales de 2 kg están soldadas a las varillas de masas despreciables y cuelgan de A mediante una cuerda. La esfera se encuentra inicialmente en reposo cuando a la superior se le aplica una fuerza horizontal F = 16 N. Calcule la aceleración inicial a_G del centro de masa de las esferas, el aumento α por unidad de tiempo de la velocidad angular y la aceleración inicial "a" de la esfera superior.



P3-11

Solución

1).- D.S.F.:



P3-11a

2).- Cálculo de la aceleración del centro de masa:
Si:

$$\bar{a}_G = -a_{Gt}\bar{i} + \overbrace{a_{Gn}}^{0}\bar{j} = -a_{Gt}\bar{i} \quad (\text{m/seg}^2)$$

$$\sum \bar{F}_i = m_T\bar{a}_G \quad \rightarrow \quad \sum F_{Xi} = -m_T a_{Gt}$$

$$-16 = -3 * 2a_{Gt}$$

$a_G = a_{G\,t} = 2.67$ m/seg^2

3).- Cálculo de la aceleración angular α :

Si:

$$\sum \overline{M}_G = \sum \dot{\overline{H}}_G$$

a).- Cálculo del momento con respecto a "G":

Si:

$$\sum \overline{M}_G = \overline{\rho}_{G\,1} x \overline{F} = 0.1733\ \overline{j}\ x\left(-16\ \overline{i}\right)$$

$$\sum \overline{M}_G = 2.768\ \overline{k} \quad \text{(N-m)} \qquad (1)$$

b).- Cálculo de la aceleración angular α :

Si:

$$\sum \dot{\overline{H}}_G = \sum_{i=1}^{n} \overline{\rho}_{Gi} x m_i \overline{a}_i = m \sum_{i=1}^{n} \overline{\rho}_{Gi} x\ \overline{a}_i$$

$$\overline{\rho}_{G\,1} = 0.1733\ \overline{j} \quad \text{(m)}$$

$$\overline{\rho}_{G\,2} = -0.15\ \overline{i} - 0.0867\ \overline{j} \quad \text{(m)}$$

$$\overline{\rho}_{G\,3} = 0.15\ \overline{i} - 0.0867\ \overline{j} \quad \text{(m)}$$

$$\overline{a}_1 = \overline{a}_G + \overline{a}_{1/G} = \overline{a}_G + \alpha\ \overline{k} x \overline{\rho}_{G\,1} = -2.67\ \overline{i} + \alpha\ \overline{k} x 0.1733 \overline{j}$$

$$\overline{a}_1 = 2.67\ \overline{i} - 0.1733\alpha\ \overline{i} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\overline{a}_2 = -2.67\ \overline{i} + \alpha\ \overline{k} x\left(-0.15\ \overline{i} - 0.0867\ \overline{j}\right) = -2.67\ \overline{i} + 0.0867\alpha\ \overline{i} - 0.15\alpha\ \overline{j}$$

$$\overline{a}_3 = -2.67\ \overline{i} + \alpha\ \overline{k} x\left(0.15\ \overline{i} - 0.0867\ \overline{j}\right) = -2.67\ \overline{i} + 0.0867\alpha\ \overline{i} + 0.15\alpha\ \overline{j}$$

$$\overline{\rho}_{G\,1} x\ \overline{a}_1 = 0.1733 \overline{j} x\left(-2.67\ \overline{i} - 0.1733\alpha\ \overline{i}\right) = 0.463\ \overline{k} + 0.03\alpha\ \overline{k} \quad \text{(m/seg)}^2$$

$$\bar{\rho}_{G2} x\, \bar{a}_2 = \left(-0.15\,\bar{i} - 0.0867\,\bar{j}\right) x \left(-2.67\,\bar{i} + 0.0867\alpha\,\bar{i} - 0.15\alpha\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{\rho}_{G2} x\, \bar{a}_2 = -0.2314\,\bar{k} + 0.0225\alpha\,\bar{k} + 7.517 x 10^{-3}\,\alpha\,\bar{k} \quad (\text{m/seg})^2$$

$$\bar{\rho}_{G3} x\, \bar{a}_3 = \left(0.15\,\bar{i} - 0.0867\,\bar{j}\right) x \left(-2.67\,\bar{i} + 0.0867\alpha\,\bar{i} + 0.15\alpha\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{\rho}_{G3} x\, \bar{a}_3 = -0.2314\,\bar{k} + 0.0225\alpha\,\bar{k} + 7.517 x 10^{-3}\,\alpha\,\bar{k} \quad (\text{m/seg})^2$$

$$\sum \dot{\bar{H}}_G = 2 * 0.09\alpha\,\bar{k} = 0.18\alpha\,\bar{k} \quad (\text{N-m}) \qquad (2)$$

(2)= (1):

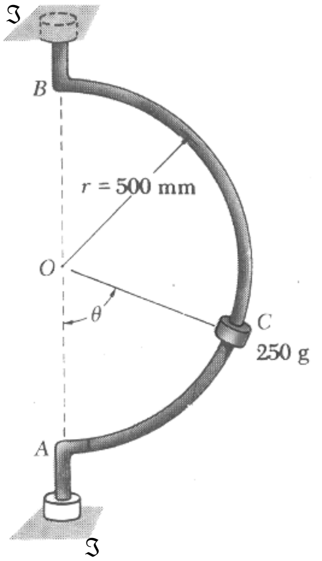
$$0.18\alpha\,\bar{k} = 2.768\,\bar{k} \quad \rightarrow \quad \alpha = 15.378 \ \text{rad/seg}^2$$

4).- Cálculo de la aceleración inicial de la esfera superior 1:

$$\bar{a}_1 = -2.67\,\bar{i} - 0.1733 * 15.378\,\bar{i} = -5.335\,\bar{i} \quad (\text{m/seg}^2)$$

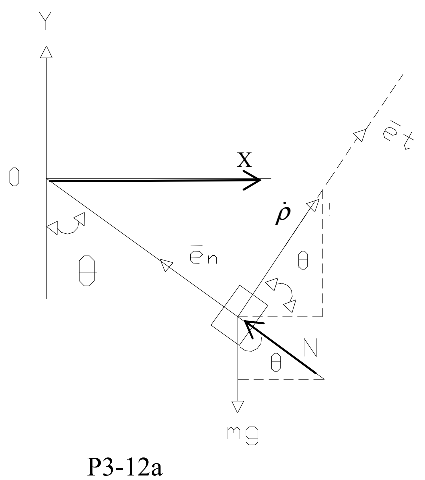
$$\left|\bar{a}_1\right| = 5.335 \ \text{m/seg}^2$$

3-12.- Un pequeño collarín C de 250 gr puede deslizarse sobre la barra semicircular, que se pone a girar respecto a la vertical AB con una velocidad angular constante de 7.5 rad/seg. Determínese los tres valores de θ para los cuales el collarín no deslizara sobre la barra, suponiendo que no existe rozamiento entre el collarín y la barra.



P3-12

Solución



P3-12a

1).- D.C.L. (ver figura P3.12a):

2).- Relaciones cinemáticas (marco móvil la barra semicircular):

a).- Movimiento del marco móvil y del punto base o conveniente “O”:

$$\overline{R} = \dot{\overline{R}} = \ddot{\overline{R}} = \overline{0}$$

$\overline{\omega} = 7.5\ \overline{j}$ (rad/seg) y $\dot{\overline{\omega}} = \overline{0}$

b).- Movimiento de "C" respecto al marco móvil:

$$\overline{\rho} = 0.5\left(sen\theta\ \overline{i} - \cos\theta\ \overline{j}\right)$$

$$\dot{\overline{\rho}} = 0.5\dot{\theta}\left(\cos\theta\ \overline{i} + sen\theta\ \overline{j}\right)$$

$$\ddot{\overline{\rho}} = 0.5\ddot{\theta}\left(\cos\theta\ \overline{i} + sen\theta\ \overline{j}\right) + 0.5\dot{\theta}^2\left(-sen\theta\ \overline{i} + \cos\theta\ \overline{j}\right)$$

$$\ddot{\overline{\rho}} = 0.5\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 sen\theta\right)\overline{i} + 0.5\left(\ddot{\theta}\ sen\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\overline{j}$$

c).- Aceleración de "C" respecto al marco inercial tierra:

$$\overline{a}_C = \overline{\omega}\ x\ \left(\overline{\omega}\ x\ \overline{\rho}\right) + 2\overline{\omega}\ x\dot{\overline{\rho}} + \ddot{\overline{\rho}}$$

$$\overline{\omega}\ x\overline{\rho} = 7.5\ \overline{j}\ x\ 0.5\left(sen\theta\ \overline{i} - \cos\theta\ \overline{j}\right) = -3.75 sen\theta\ \overline{k}$$

$$\overline{\omega}\ x\ \left(\overline{\omega}\ x\overline{\rho}\right) = 7.5\ \overline{j}\ x\ \left(-3.75 sen\theta\ \overline{k}\right) = -28.125 sen\theta\ \overline{i}$$

$$2\overline{\omega}\ x\dot{\overline{\rho}} = 15\overline{j}x0.5\dot{\theta}\left(\cos\theta\ \overline{i} + sen\theta\ \overline{j}\right) = -7.5\dot{\theta}\cos\theta\ \overline{k}$$

Para que el collarín no se mueva respecto a la barra semicircular debe cumplir, que:

$$\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$$

$$\overline{a}_C = -28.125\ sen\theta\ \overline{i}$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m\ a_{CX} \quad\rightarrow\quad -N\ sen\theta = m\left(-28.125\ sen\theta\right) \quad\rightarrow\quad N = 28.125\ m$$

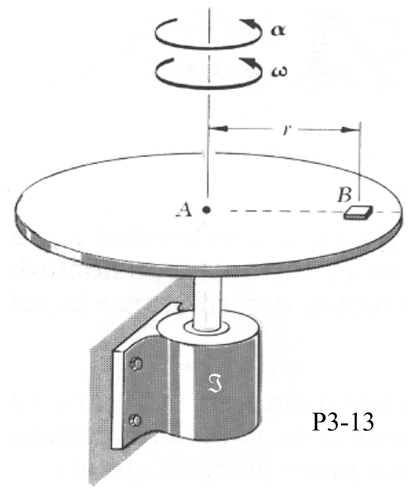
$$\sum F_Y = m\ a_{CY} = 0 \quad\rightarrow\quad N\cos\theta - mg = 0 \quad\rightarrow\quad 28.125 m\cos\theta = mg$$

$$\cos\theta = \frac{g}{28.125} = 0.3488 \quad\rightarrow\quad \theta = 69.586° \cong 69.6°$$

4).- También no tendrá movimiento cuando se encuentre sobre el eje fijo (en tierra), esto es si:

$\theta = 0°$ y $\theta = 180°$

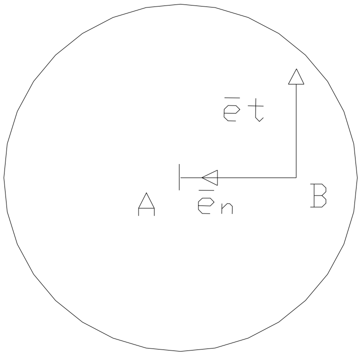
3-13.- Se sabe que, si se excediera la fuerza de rozamiento estático entre el bloque pequeño B y la placa, el bloque empezará a deslizarse sobre la placa, se da esto cuando la aceleración total del bloque alcanza los 4 m/seg^2. Si la placa parte del reposo en t = 0 y es acelerado uniformemente a razón de α = 5 rad/seg^2, determínese el tiempo y la velocidad de la placa cuando el bloque empieza a deslizarse, si: r = 250 mm.



P3-13

Solución

1).- D.C.L. (Para el movimiento inminente, la partícula B tiene un movimiento circular, por lo que utilizaremos las coordenadas tangencial y normal):



P3-13a

2).- Cálculo de la velocidad angular, cuando el movimiento es inminente:

Si:

$$\bar{a} = \alpha\, r\, \bar{e}_t + \omega^2 r\, \bar{e}_n$$

$$|\bar{a}|^2 = (\alpha\, r)^2 + (\omega^2 r)^2 \quad \rightarrow \quad 16 = (5 * 0.25)^2 + (0.25\omega^2)^2$$

$$0.25\omega^2 = 3.7997 \quad \rightarrow \quad \omega = 3.8986 \text{ rad/seg} \quad \rightarrow \quad \omega \cong 3.90 \text{ rad/seg}$$

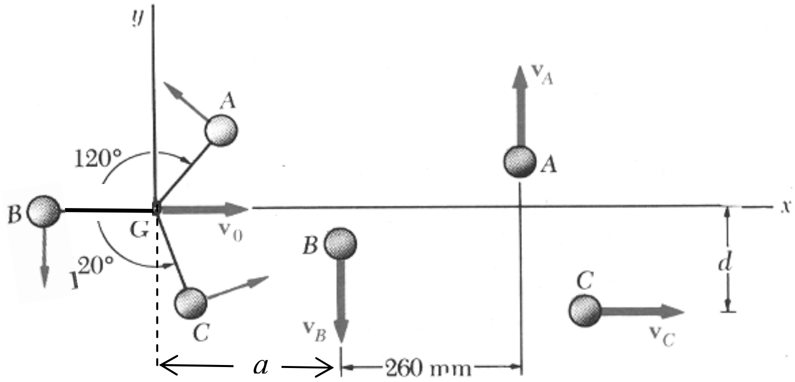
3).- Cálculo del tiempo, donde se dará el movimiento inminente:

Si:

$$\omega = \overbrace{\omega_0}^{0} + \alpha\, t \quad \rightarrow \quad t = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{3.8986}{5} = 0.7797 \text{ seg}$$

$$t \cong 0.78 \text{ seg}$$

3-14.- Tres pequeñas esferas idénticas A, B y C, que pueden deslizarse sobre una superficie horizontal sin rozamiento; están unidas por tres cuerdas de longitud ℓ atados al anillo G. Inicialmente las esferas giran alrededor del anillo que se mueve a lo largo del eje X con velocidad V_o. Súbitamente el anillo se rompe y las tres esferas se mueven libremente en el plano XY, como se muestra en la figura. Sabiendo que $\overline{V}_A$ = 0.732 $\bar{j}$ (m/seg), $\overline{V}_C$ = 1.2 $\bar{i}$ (m/seg), a = 0.208 m y d = 0.120 m. Determínese: a) la velocidad inicial del anillo, b) la longitud ℓ de las cuerdas y c) la velocidad angular en radianes sobre segundos a la cual las esferas giran alrededor de G.



P3-14

Solución

Como no hay fuerza externa resultante en el sistema, se conservará la energía cinética, el momentum lineal y el momentum angular:

1).- Por conservación de la cantidad del movimiento lineal:

Si:

$$\left(\sum m_i \overline{V}_i\right)_i = \left(\sum m_i \overline{V}_i\right)_f$$

$$\left(\sum m_i \overline{V}_i\right)_i = m\begin{bmatrix}\left(\overline{V}_0 + \omega\, \bar{k} x \ell(\cos 60° \bar{i} + sen 60° \bar{j})\right) + \left(\overline{V}_0 + \omega\, \bar{k} x \ell(-\bar{i})\right) + \\ \left(\overline{V}_0 + \omega\, \bar{k}\ x\ \ell(\cos 60° \bar{i} - sen 60° \bar{j})\right)\end{bmatrix}$$

$$\left(\sum m_i \overline{V}_i\right)_i = m\left[3\, V_0 \bar{i} + \omega\, \ell(2\cos 60° - 1)\bar{j}\right] = 3m\, V_0 \bar{i} \qquad (1)$$

$$\left(\sum m_i \overline{V}_i\right)_f = -m\, V_B \bar{j} + m\, V_A \bar{j} + m\, V_C \bar{i} = m(-V_B + 0.732)\bar{j} + 1.2m\, \bar{i} \qquad (2)$$

(1)= (2) e igualando componentes:

$$V_B = 0.732 \quad \text{m/seg}$$

$$V_0 = \frac{1.2}{3} = 0.4 \quad \text{m/seg}$$

2).- Por conservación de la cantidad de movimiento angular, respecto a "O":

Si:

$$\left(\sum \overline{H}_{O\,i}\right)_i = \left(\sum \overline{H}_{O\,i}\right)_f$$

$$\left(\sum \overline{H}_{O\,i}\right)_i = m\left\langle \begin{matrix} \left\{\left[\ell\left(\cos 60° \bar{i} + sen\ 60° \bar{j}\right)\right] x \left[\overline{V}_0 - \omega\,\ell\,\left(sen\ 60° \bar{i} - \cos 60° \bar{j}\right)\right]\right\} + \\ \left\{-\ell\ \bar{i}\ x\left(\overline{V}_0 - \omega\,\ell\ \bar{j}\right)\right\} + \\ \left\{\left[\ell\left(\cos 60° \bar{i} - sen\ 60° \bar{j}\right)\right] x \left[\overline{V}_0 + \omega\,\ell\,\left(sen\ 60° \bar{i} - \cos 60° \bar{j}\right)\right]\right\} \end{matrix} \right\rangle$$

$$\left(\sum \overline{H}_{O\,i}\right)_i = m\left(\omega\,\ell^2 - \ell sen60° V_0 + \ell^2\omega + \ell^2\omega + \ell sen60° V_0\right)\bar{k} = 3m\omega\,\ell^2\bar{k} \qquad (3)$$

$$\left(\sum \overline{H}_{O\,i}\right)_f = m\left[(a + 0.26)\,\bar{i}\ x\ 0.732\,\bar{j} + a\ \bar{i}\ x\left(-0.732\,\bar{j}\right) - d\ \bar{j}\ x\ 1.2\ \bar{i}\right]$$

$$\left(\sum \overline{H}_{O\,i}\right)_f = 0.334 m\ \bar{k} \qquad (4)$$

(3) = (4):

$$3m\omega\,\ell^2 = 0.334\ m \quad \rightarrow \quad \omega\,\ell^2 = 0.1113 \qquad (5)$$

3).- Por conservación de la energía cinética:

$$\left(\frac{1}{2} m_t V_G^2 + \frac{1}{2}\sum m_i V_{i/G}^2\right)_i = \left(\frac{1}{2}\sum m_i V_i^2\right)_f$$

Eliminando" ½ m "de ambos miembros, reemplazando valores y operando:

$$3\,V_0^2 + 3\omega^2\ell^2 = 2 * 0.732^2 + 1.2^2$$

$$\omega^2\ell^2 = 0.677 \qquad (6)$$

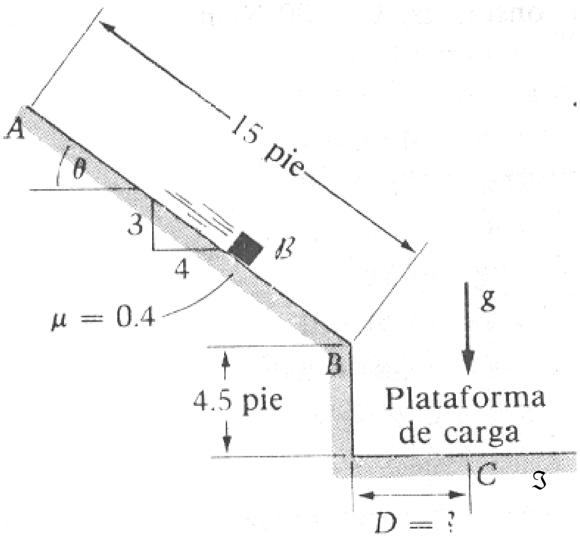
(5) en (6):

$$0.1113\omega = 0.677 \quad \rightarrow \quad \omega = 6.084 \text{ rad/seg}$$

En (5):

$$6.084\,\ell^2 = 0.1113 \quad \rightarrow \quad \ell = 135.25 \text{ mm}$$

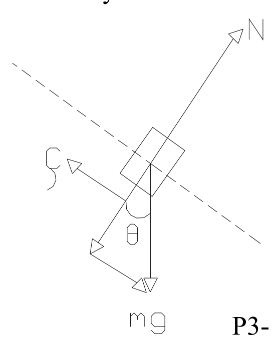
3-15.- Una caja pequeña β (ver figura P3-15) resbala desde el reposo sobre un plano inclinado rugoso de A a B y luego cae en una plataforma de carga. El coeficiente de fricción entre la caja y el plano es μ = 0.4. Encuentre la distancia D al punto C en que la caja toca la plataforma.

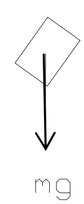


P3-15

Solución

1).- D.C.L. (s) en deslizamiento y caída libre:





P3-15a

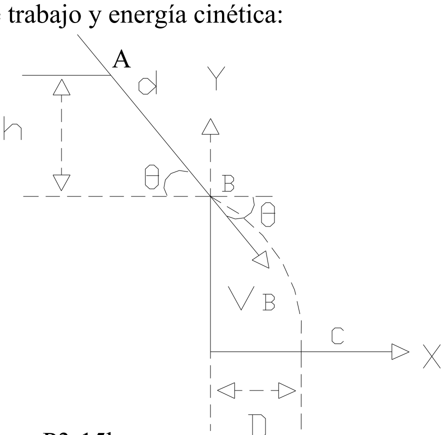
(a) (b)

2).- Cálculo de la velocidad de la caja en B, por el principio de trabajo y energía cinética:

$$W_{A-Bg} - W_{A-Bf} = \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}m\overbrace{V_A^2}^{0}$$

$$h = 15sen\theta = 15 * \frac{3}{5} = 9 \text{ pies}$$

$$mgh - f\ d = \frac{1}{2}mV_B^2 \qquad (1)$$



P3-15b

De (a) ver figura P3-15a:

$$f = mg\cos\theta\ \mu = 0.4 * \tfrac{4}{5}mg = 0.32\ mg$$

Luego en (1):

$$mg * 9 - 0.32mg * 15 = \tfrac{1}{2}mV_B^2$$

$V_B = 16.45$ pie/seg

$V_{BX} = V_B\cos\theta = 13.16$ pie/seg

$V_{BY} = -V_B sen\theta = -9.87$ pie/seg

3).- Cálculo del movimiento de B en (b), ver figura P3-15a:

a).- Si:

$$\sum F_Y = m\ddot{Y} \quad \rightarrow \quad -mg = m\ddot{Y} \quad \rightarrow \quad \frac{d\dot{Y}}{dt} = -g$$

$$\int_{V_{BY}}^{\dot{Y}} d\dot{Y} = \int_0^t -gdt \quad \rightarrow \quad \dot{Y} = \frac{dY}{dt} = V_{BY} - gt$$

$$\int_{Y_0}^{Y} dY = \int_0^t \left(V_{BY} - gt\right)dt \quad \rightarrow \quad Y = Y_0 + V_{BY}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

b).- Si:

$$\sum F_X = m\ddot{X} \quad \rightarrow \quad 0 = m\ddot{X} \quad \rightarrow \quad \dot{X} \Rightarrow cte, \quad \dot{X} = V_{BX}$$

$$X = V_{BX}t \qquad (3)$$

En (2) para:

$Y = 0,\ Y_0 = 4.5$ pies y $V_{BY} = -9.87$ pie/seg

$$0 = 4.5 - 9.87\,t - \frac{1}{2} * 32.2\,t^2 \quad \rightarrow \quad t^2 + 0.613\,t - 0.28 = 0$$

$$t=\frac{-0.613\pm\sqrt{0.613^2+4x0.28}}{2} \quad \rightarrow \quad t=0.305 \text{ seg}$$

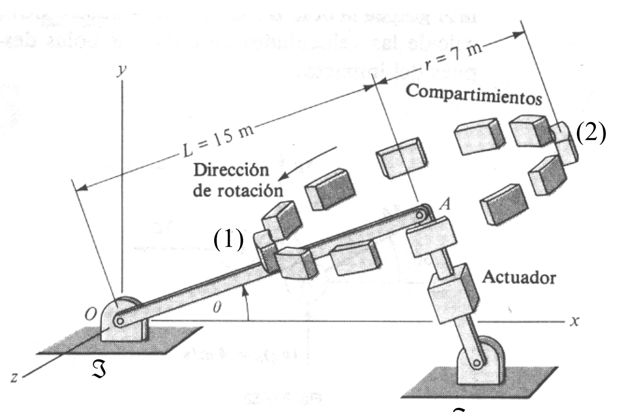
En (3) para:

$V_{BX}=13.16$ pie/seg

$X=D=13.16*0.3=4.01$ pies

$D=4$ pies

3-16.- El dispositivo mecánico en un parque de diversiones tiene 16 compartimientos de masa m = 200 kg cada uno, que giran alrededor del punto A a una velocidad de ω = 5 RPM con respecto al brazo OA. Los compartimientos con personas se mueven en un plano horizontal cuando θ = 0°. Un actuador hidráulico en el punto A levanta al brazo OA con los compartimientos en movimiento. Calcule la energía cinética de únicamente de dos de los compartimientos con respecto al punto O (un compartimiento es el más cercano y el otro el más lejano a O), cuando θ = 0° y la velocidad angular del brazo OA es de 0.3 RPM.



P3-16

Solución

1).- Relaciones cinemáticas:

a).- Cálculo de la velocidad de (1), cuando θ = 0°:

$$\bar{V}_1=\bar{V}_A+\bar{V}_{1/A}=0.3*\frac{\pi}{30}*15\;\bar{j}+5*\frac{\pi}{30}*7\;\bar{k}=0.471\;\bar{j}+3.665\;\bar{k} \quad \text{(m/seg)}$$

$\left|\bar{V}_1\right|=3.695$ m/seg

b).- Cálculo de la velocidad de (2), cuando θ = 0°:

$$\bar{V}_2=\bar{V}_A+\bar{V}_{2/A}=0.3*\frac{\pi}{30}*15\;\bar{j}-5*\frac{\pi}{30}*7\;\bar{k}=0.471\;\bar{j}-3.665\;\bar{k} \quad \text{(m/seg)}$$

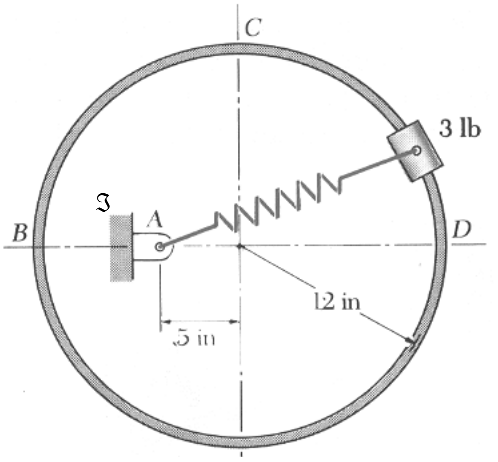
$\left|\bar{V}_2\right|=3.695$ m/seg

2).- Cálculo de las energías cinéticas de (1) y (2), cuando θ = 0°:

$$E_{K1} = \frac{1}{2} m V_1^2 = \frac{1}{2} * 200 * 3.695^2 = 1365.3 \text{ Joule}$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2} m V_2^2 = \frac{1}{2} * 200 * 3.695^2 = 1365.3 \text{ Joule}$$

3-17.- Un collarín de 3 lb está unido a un resorte y desliza sin rozamiento a lo largo de una barra circular que descansa en un plano horizontal. El resorte tiene una constante K = 15 lb/plg y no está deformado cuando el collarín está en B. Si el collarín pasa por el punto D con una velocidad de 6 pies/seg, determínese la velocidad del collarín cuando pase por: a) el punto C y b) por el punto B.



P3-17

Solución

La única fuerza que produce trabajo es la fuerza conservativa elásticas, luego la energía mecánica se conserva:

1).- Cálculo de la velocidad del collarín en C:

$$E_{KD} + U_D = E_{KC} + U_C$$

$$\frac{1}{2} m V_D^2 + \frac{1}{2} K \delta_D^2 = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} K \delta_C^2$$

$$\frac{3}{32.2} * 36 + 15 * 12 \left(\frac{10}{12} \right)^2 = \frac{3}{32.2} V_C^2 + 15 * 12 \left(\frac{6}{12} \right)^2$$

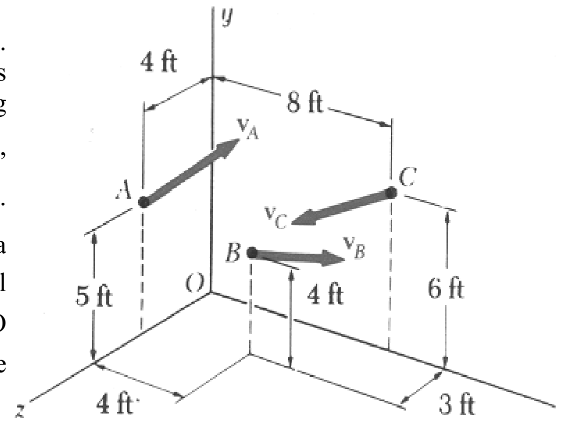
$$V_C = 29.91 \text{ pie/seg}$$

2).- Cálculo de la velocidad del collarín en B (de la misma manera del anterior):

$$64.177 = 0.0466\, V_B^2$$

$V_B = 37.11$ pie/seg

3-18.- Un sistema consta de tres partículas A, B y C. Se sabe $w_A = 5$ lb, $w_B = 4$ lb y $w_C = 3$ lb y las velocidades de las partículas expresadas en pies/seg son respectivamente: $\overline{V}_A = 2\,\overline{i} + 3\overline{j} - 2\,\overline{k}$, $\overline{V}_B = V_X\overline{i} + 2\overline{j} + V_Z\overline{k}$ y $\overline{V}_C = -3\,\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$. Determínese: a) las componentes V_X y V_Z de la velocidad de la partícula B para los cuales el momentum angular $\overline{H}_0$ del sistema con respecto a O es paralelo al eje X y b) el valor correspondiente de $\overline{H}_0$.



P3-18

Solución

1).- Cálculo del momento cinético para cada partícula, respecto a "O":

$$\overline{H}_{OA} = \overline{r}_A x m_A \overline{V}_A = \left(5\overline{j} + 4\,\overline{k}\right) x \frac{5}{32.2}\left(2\,\overline{i} + 3\overline{j} - 2\,\overline{k}\right)$$

$$\overline{H}_{0A} = -3.41\,\overline{i} + 1.24\,\overline{j} - 1.55\,\overline{k}$$ (lb-pie-seg)

$$\overline{H}_{OB} = \overline{r}_B x m_B \overline{V}_B = \left(4\,\overline{i} + 4\,\overline{j} + 3\,\overline{k}\right) x \frac{4}{32.2}\left(V_X\overline{i} + 2\,\overline{j} + V_Z\overline{k}\right)$$

$$\overline{H}_{OB} = \frac{4}{32.2}\left[\left(4\,V_Z - 6\right)\overline{i} + \left(3\,V_X - 4\,V_Z\right)\overline{j} + \left(8 - 4\,V_X\right)\overline{k}\right]$$ (lb-pie-seg)

$$\overline{H}_{OC} = \overline{r}_C x m_C \overline{V}_C = \left(8\,\overline{i} + 6\overline{j}\right) x \frac{3}{32.2}\left(-3\,\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}\right)$$

$$\overline{H}_{OC} = \frac{3}{32.2}\left(6\,\overline{i} - 8\overline{j} + 2\,\overline{k}\right)$$ (lb-pie-seg)

2).- Si: $\sum \overline{H}_{O\,i} = \sum H_{OX\,i}\overline{i}$

$$0 = 1.24 + \left(3\,V_X - 4\,V_Z\right) * 0.124 - 0.745 \qquad (1)$$

$$0 = -1.55 + (8 - 4\,V_X) * 0.124 + 0.186 \quad \rightarrow \quad V_X = -0.75 \text{ pie/seg}$$

En (1):

$$V_Z = 0.436 \text{ pie/seg}$$

3).- Cálculo de la cantidad de movimiento angular respecto a "O":

$$\sum \overline{H}_{O\,i} = \overline{H}_{OA} + \overline{H}_{OB} + \overline{H}_{OC}$$

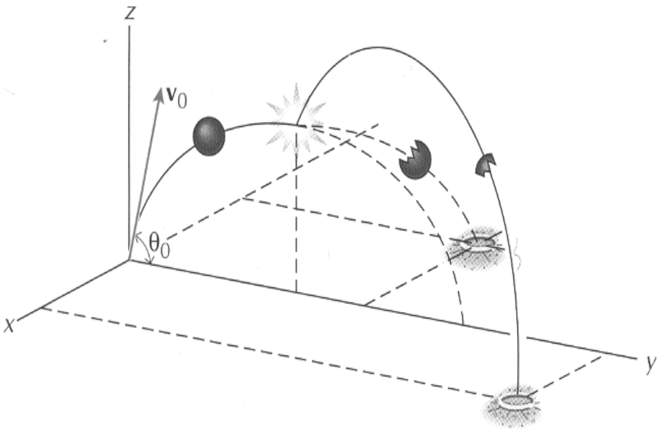
$$\sum \overline{H}_{0\,i} = \left[-3.41 + 0.124\,(4 * 0.436 - 6) + 0.56\,\right]\bar{i}$$

$$\sum \overline{H}_{O\,i} = -3.378\,\bar{i} \quad \text{(lb-pie-seg)}$$

3-19.- Se dispara una granada de 5 kg con una velocidad inicial V_o = 125 m/seg y θ_o = 75°, según se indica en la figura. En el punto más alto de su trayectoria la granada explota (durante 2 milésimas de segundos) y se rompe en dos. Un fragmento de 2 kg llega al suelo en X = 50 m e Y = 350 m cuando t = 25 seg, determinar:

a).- Cuando y donde llega al suelo el fragmento de 3 kg.

b).- El impulso ejercido sobre el fragmento de 2 kg por la explosión.



P3-19

Solución

La única fuerza externa en el sistema es la fuerza de gravedad.

1).- Cálculo del movimiento del centro de masa "G":

$$\bar{a}_G = -9.81\,\bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\overline{V}_G = 125\cos 75°\,\bar{j} + (125 sen 75° - 9.81\,t)\,\bar{k}$$

$$\overline{V}_G = 32.35\,\bar{j} + (120.74 - 9.81\,t)\,\bar{k} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{r}_G = 32.35\,t\,\bar{j} + \left(120.74\,t - 4.905\,t^2\right)\bar{k} \quad \text{(m)}$$

2).- El punto más alto de la trayectoria corresponde al instante en que $\frac{dZ_G}{dt} = 0$:

$120.74 - 9.81\,t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 12.3$ seg (instante de la explosión)

Luego:

$X = 0 \quad , \quad Y = 32.35 * 12.3 = 397.905$ m

$Z = 1485.1 - 742.08 = 743.02$ m

3).- Cálculo del movimiento de la partícula "1" de 2 kg (después de la explosión, sobre la masa de 2 kg sólo actúa la fuerza de gravedad):

$\bar{a}_1 = -9.81\,\bar{k}$ (m/seg^2)

$\bar{V}_1 = V_{OX1}\bar{i} + V_{OY1}\bar{j} + \left[V_{0Z1} - 9.81(t - 12.3)\right]\bar{k}$ (m/seg) (0)

$X_1 = V_{OX1}(t - 12.3)$ m (1)

$Y_1 = 397.905 + V_{OY1}(t - 12.3)$ m (2)

$Z_1 = 743.02 + V_{OZ1}(t - 12.3) - 4.905(t - 12.3)^2$ (3)

Para: t = 25 seg, X = 50 m , Y = 350 m , y Z = 0

En (1):

$$V_{OX1} = \frac{50}{(25 - 12.3)} = 3.94 \text{ m/seg}$$

En (2):

$$V_{OY1} = \frac{-397.905 + 350}{(25 - 12.3)} = -3.77 \text{ m/seg}$$

En (3):

$$V_{OZ1} = \frac{-743.02 + 4.905(25 - 12.3)^2}{(25 - 12.3)} = 3.79 \text{ m/seg}$$

4).- Por el principio de impulso y cantidad de movimiento en el sistema durante la explosión (la única fuerza exterior que da impulso, es la fuerza de gravedad):

$$\int_0^t \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}\ dt = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{V_i} \right)_f - \left(m\overline{V_G} \right)_i$$

$$5\left(-9.81\ \overline{k}\right)\Delta\, t = 2\left(3.94\ \overline{i} - 3.77\ \overline{j} + 3.79\ \overline{k}\right) + 3\overline{V_{O2}} - 5 * 32.5\ \overline{j}$$

$$\overline{V_{O2}} = -2.63\ \overline{i} + 56.67\ \overline{j} - 2.56\ \overline{k} \quad \text{(m/seg)}$$

5).- Cálculo del movimiento de la partícula "2" de 3 kg (después de la explosión, la única fuerza exterior que actúa es la fuerza de gravedad):

$$\overline{a_2} = -9.81\ \overline{k} \quad (\text{m/seg}^2)$$

$$\overline{V_2} = -2.63\ \overline{i} + 56.67\ \overline{j} - \left[2.56 + 9.81(t - 12.3)\right]\overline{k} \quad \text{(m/seg)}$$

$$X_2 = 2.63\ (t - 12.3)\ \text{ m} \qquad (4)$$

$$Y_2 = 397.905 + 56.67\ (t - 12.3)\ \text{ m} \qquad (5)$$

$$Z_2 = 743.02 - 2.56(t - 12.3) - 4.905(t - 12.3)^2 \qquad (6)$$

Para, Z = 0 en (6):

$$0 = 743.02 - 2.56\ t + 31.488 - 4.905\ t^2 - 742.08 + 120.66\ t$$

$$t^2 - 24.08\ t - 6.61 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{24.08 \pm \sqrt{24.08^2 + 4x6.61}}{2}$$

$$t_1 = 24.35\ \text{ seg (bueno)} \quad \text{y} \quad t_2 = -0.27\ \text{(no)}$$

$$X_{2Z=0} = -2.63(24.35 - 12.3) = -31.69\ \text{ m}$$

$$Y_{2Z=0} = 397.905 + 56.67\ (24.35 - 12.3) = 1080.78\ \text{ m}$$

6).- Cálculo del impulso en la masa "1" de 2 kg:

$$\bar{I} = \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i dt = m_1\left(\bar{V}_{O1} - \bar{V}_{Gt=12.3}\right) \qquad (7)$$

Si:

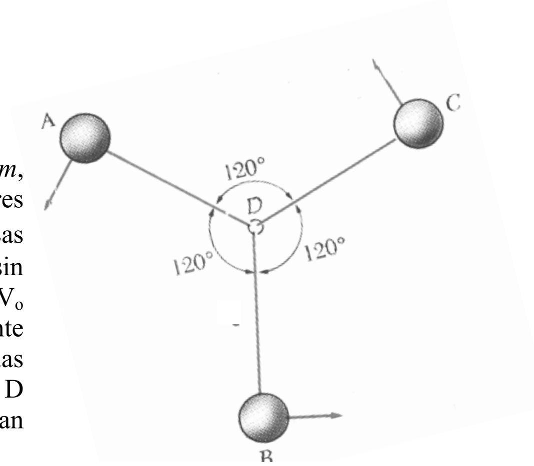
$$\bar{V}_{O1} = 3.94\,\bar{i} - 3.77\,\bar{j} + 3.79\,\bar{k} \text{ (m/seg)} \quad \text{y} \quad \bar{V}_{Gt=12.3} = 32.35\,\bar{j} \text{ (m/seg)}$$

En (7):

$$\bar{I} = 2\left(3.94\,\bar{i} - 36.12\,\bar{j} + 3.79\,\bar{k}\right)$$

$$\bar{I} = 7.88\,\bar{i} - 72.24\,\bar{j} + 7.58\,\bar{k} \text{ (kg m/seg)}$$

3-20.- Tres esferas pequeñas A, B y C, cada una de masa *m*, están conectadas a un anillo pequeño D por medio de tres cuerdas inelásticos de longitud ℓ que están equidistantes. Las esferas pueden resbalar sobre una superficie horizontal sin rozamiento e inicialmente están girando con una velocidad V_o alrededor del anillo D que se encuentra en reposo. De repente se rompe la cuerda CD. Después que las otras dos cuerdas vuelven a estar tensas, obténgase: a) la velocidad del anillo D y b) la velocidad relativa con que las esferas A y B giran alrededor de D.



P3-20

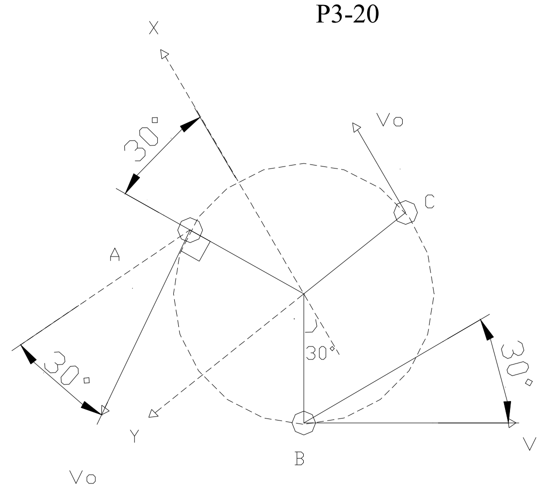
Solución

Como no hay fuerzas externas resultantes, la cantidad de movimiento lineal y la energía cinética del sistema se conservan:

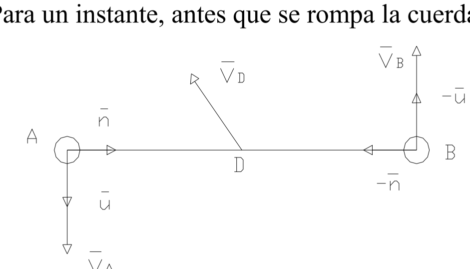
Al romperse la cuerda DC, la velocidad de C es tangente a su trayectoria que tenia antes de romperse.

1).- D.S.F. (ver figuras P3-20a y P3-20b):

a).- Para un instante, antes que se rompa la cuerda:



P3-20a



P3-20b

b).- Para el instante, en que la cuerda de nuevo está tensa:

2).- Por conservación de la cantidad de movimiento lineal:
Si:

$$\left(\sum m_i\bar{V}_i\right)_i = \left(\sum m_i\bar{V}_i\right)_f$$

$$\left(\sum m_i\bar{V}_i\right)_i = m\begin{bmatrix} V_O\left(-sen30°\bar{i} - \cos 30°\bar{j}\right)+ \\ V_O\left(-sen30°\bar{i} + \cos 30°\bar{j}\right)+V_O\bar{i}\end{bmatrix} = \bar{0} \qquad (1)$$

$$\left(\sum m_i\bar{V}_i\right)_f = m\left(\bar{V}_A + \bar{V}_B + \bar{V}_C\right) = \begin{bmatrix} \bar{V}_D + \omega\,\bar{k}x\left(-\ell\,\bar{n}\right)+ \\ \bar{V}_D + \omega\,\bar{k}x\ell\,\bar{n} + V_O\bar{i}\end{bmatrix} = m\left(2\bar{V}_D + V_O\bar{i}\right) \qquad (2)$$

(1) = (2):

$$\bar{0} = 2\bar{V}_D + V_O\bar{i} \quad \rightarrow \quad \bar{V}_D = -\frac{V_O}{2}\,\bar{i}$$ (Unidades de velocidad)

$$V_D = \frac{V_O}{2}$$ (Unidades de velocidad)

3).- Por conservación de la energía cinética (no hay fuerzas que produzcan trabajo):

$$E_{K1} = 3\left(\frac{1}{2}mV_O^2\right) = \frac{3}{2}mV_O^2 \qquad (3)$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2}m\left[\left(\bar{V}_D + \omega\,\ell\bar{u}\right)^2 + \left(\bar{V}_D - \omega\,\ell\bar{u}\right)^2 + V_O^2\right]$$

Reemplazando y operando:

$$E_{K2} = m\left(\omega^2\ell^2 + \frac{3}{4}V_O^2\right) \qquad (4)$$

(3) = (4):

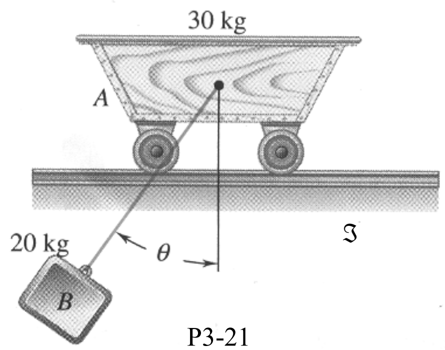
$$\frac{3}{2}mV_O^2 = m\left(\omega^2\ell^2 + \frac{3}{4}V_O^2\right) \quad \rightarrow \quad \omega^2\ell^2 = \frac{3}{4}V_O^2$$

Si: $V_{A/D} = V_{B/D} = \omega\,\ell$

Luego:

$$V_{A/D} = \sqrt{\frac{3}{4}}\, V_O \quad \text{(Unidad de velocidad)}$$

3-21.- El bloque B de 20 kg cuelga de la cuerda de 2m de longitud, sujeta al carro A de 30 kg, que puede rodar libremente por una pista horizontal lisa. Si el sistema se suelta desde el reposo cuando θ = 35°, hallar las velocidades de A y B cuando θ = 0°.

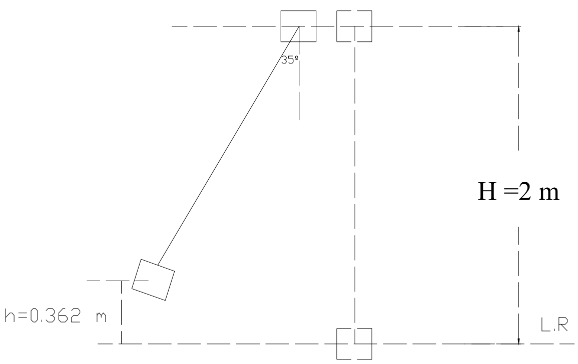


P3-21

Solución

La resultante de las fuerzas horizontales son nulas, luego la cantidad de movimiento lineal se conservan en esta dirección, además la dirección de las velocidades de las dos partículas para el instante pedido son horizontales, respecto al marco inercial tierra.
La única fuerza que produce trabajo es el peso, luego la energía mecánica se conserva.

1).- Diagrama, para el instante inicial y final:



P3-21a

2).- Por conservación del momentum lineal, en la dirección horizontal:

$$0 = m_A V_A + m_B V_B \quad \rightarrow \quad V_A = -\frac{m_B}{m_A} V_B \qquad (1)$$

3).- Por conservación de la energía mecánica (reemplazando (1) en la energía cinética en "2"):

$$E_{K1} = 0$$

$$U_1 = m_B gh + m_A gH = 20*9.81*0.362 + m_A gH = 71.02 + m_A gH$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2} m_B V_B^2 + \frac{1}{2} m_A \left(-\frac{m_B}{m_A} V_B \right)^2 = \frac{1}{2} m_B V_B^2 \left(1 + \frac{m_B}{m_A} \right) = 16.667\, V_B^2$$

$$U_2 = m_A gH$$

Si: $E_{M1} = E_{M2}$

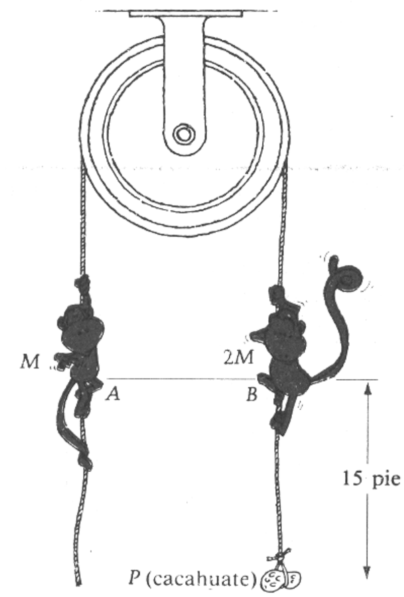
$$71.02 + m_A gH = 16.667\, V_B^2 + m_A gH$$

$V_B = 2.064$ m/seg $(\rightarrow)$

En (1):

$V_A = 1.376$ m/seg $(\leftarrow)$

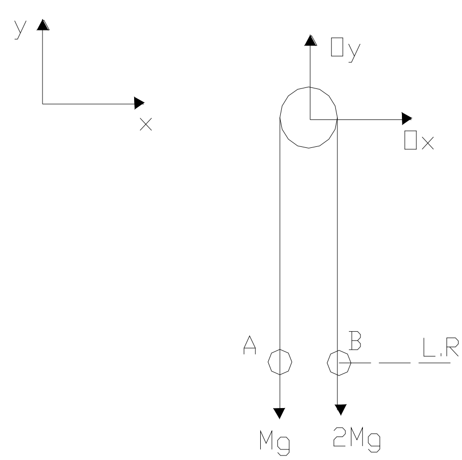
3-22.- Una cuerda sin masa cuelga sobre una polea sin masa y sin fricción, la cuerda soporta dos monos (uno de masa M y otro de masa 2M). El sistema se libera del reposo en t = 0 seg, como se muestra en la figura. Durante los siguientes 2 seg, el mono B desciende 15 pies a lo largo de la cuerda para tomar un maní (masa despreciable) que se encuentra en el extremo P. El mono A se mantiene en la cuerda durante esos 2 seg. Encuentre el desplazamiento de A durante ese intervalo de tiempo.



P3-22

Solución

1). - D.S.F (ver figura P3-22a).:



P3-22a

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum \overline{M}_O = -2Mgr\,\bar{k} + Mgr\,\bar{k} = -Mgr\,\bar{k}$$

Si:

$$\int_0^t \sum \overline{M}_O dt = \left(\sum \overline{H}_{O\,i}\right)_f - \overbrace{\left(\sum \overline{H}_{O\,i}\right)_i}^{0}$$

$$\left(\sum \overline{H}_{0i}\right)_f = r\,\bar{i}x2M\,\dot{Y}_B(\bar{j}) + r(-\bar{i})M\,\dot{Y}_A\bar{j}$$

$$\left(\sum \overline{H}_{0i}\right)_f = -2Mr\,\dot{Y}_B\bar{k} - MR\,\dot{Y}_A\bar{k}$$

Remplazando:

$$-Mgr\,\bar{k}\,t = -r(2M)\,\dot{Y}_B\,\bar{k} + rM\,\dot{Y}_A(-\bar{k}) \quad \rightarrow \quad \dot{Y}_A = -2\dot{Y}_B + g\,t$$

Separando variables y integrando, para t = 0, $Y_{Ao} = Y_{Bo} = 0$:

$$Y_A = -2Y_B + \frac{1}{2} g\, t^2 \qquad (1)$$

3).- Relaciones Cinemáticas:

$$\dot{Y}_{B/A} = \dot{Y}_B - \dot{Y}_A$$

Integrando, para: $t = 0,\; Y_{A0} = Y_{B0} = Y_{B/A} = 0$

$$Y_{B/A} = Y_B - Y_A \quad \rightarrow \quad Y_B = Y_{B/A} + Y_A$$

Reemplazando Y_B en (1):

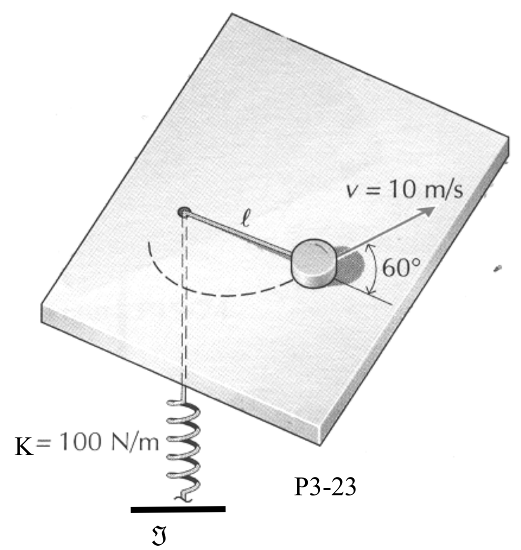
$$Y_A = -2\left(Y_{B/A} + Y_A\right) + \frac{1}{2} g\, t^2 \quad \rightarrow \quad 3\,Y_A = \frac{1}{2} g\, t^2 - 2\,Y_{B/A} \qquad (2)$$

Para; $Y_B = -15$ pies y t = 2 seg en (2):

$$3\,Y_A = \frac{32.2*4}{2} - 30 \quad \rightarrow \quad Y_A = 11.47 \text{ pies}$$

El mono A se habrá desplazado 11.47 pies de su posición original.

3-23.- Una masa de 0.6 kg sujeto al extremo de una cuerda inextensible, se desliza por una superficie horizontal (ver figura). El otro extremo, tras pasar por un orificio practicado en dicha superficie, está sujeto a un resorte que tiene K = 100 N/m. El resorte tiene una longitud natural cuando $\ell = 0$. Si en el instante representado V = 10 m/seg y $\ell = 0.5$ m, determinar los valores mínimo y máximo de ℓ del movimiento resultante.



P3-23

Solución

El momento con respecto al orificio de las fuerzas es nulo, por lo que se conserva la cantidad de movimiento angular con respecto a un eje que pasa por el orificio.

La única fuerza que produce trabajo es la fuerza elástica por la que la energía mecánica se conserva.
1).- Por conservación de la cantidad de movimiento angular:

Si:

$$H_{O\,i} = H_{O\,f} \qquad (1)$$

a).- La cantidad de movimiento angular, para el instante representado es:

$$H_{O\,i} = 0.5*0.6*10 sen 60° = 2.6 \text{ N-m-seg}$$

b).- Momentum angular cuando la cuerda esté a su longitud mínimo o máximo (la velocidad de su movimiento es perpendicular a la cuerda):

$$H_{0\,f} = \ell(0.6)V \text{ N-m-seg}$$

Luego en (1):

$$2.6 = 0.6\,\ell\,V \quad \rightarrow \quad \ell\,V = 4.33 \qquad (2)$$

2).- Por conservación de la energía mecánica:

$$E_{M1} = E_{M2}$$

$$E_{K1} + U_1 = E_{K2} + U_2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}*0.6*10^2 + \frac{1}{2}*100*0.5^2 = \frac{1}{2}0.6\,V^2 + \frac{1}{2}100\,\ell^2$$

Reemplazando (2) y operando:

$$85\,\ell^2 = 11.25 + 100\,\ell^4 \quad \rightarrow \quad u^2 - 0.85\,u + 0.113 = 0 \quad \rightarrow \quad u = \frac{0.85 \pm \sqrt{0.85^2 - 4x0.113}}{2}$$

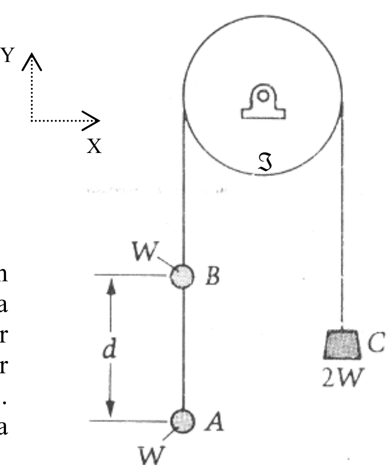
$$u_1 = 0.685 \text{ y } u_2 = 0.165$$

Lo pedido, serán solo las raíces positivas:

$$\ell_{\max} = 0.827 \text{ m}$$

$$\ell_{\min} = 0.406 \text{ m}$$

3-24.- Dos gimnastas A y B, cada uno de peso w, se mantienen colgados en el mismo lado de una cuerda que pasa sobre una polea ligera y el otro extremo tiene un contrapeso 2w (ver figura). Inicialmente A se encuentra a una distancia “d” por debajo de B. El gimnasta A trepa sobre la cuerda para unirse a B. Determine el desplazamiento del contrapeso, cuando A alcanza a B.



P3-24

Solución

1).- Como, la sumatoria de momentos con respecto a "O" es nulo; la cantidad de movimiento angular se conserva:

$$\sum \overline{M}_O = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\left(\sum \overline{H}_{O\,i}\right)_i}^{0} = \left(\sum \overline{H}_{O\,i}\right)_f$$

$$\left(\overline{H}_O^A + \overline{H}_O^B + \overline{H}_O^C\right)_f = \overline{0} \qquad \rightarrow \qquad -\frac{w}{g} r\,\dot{Y}_A - \frac{w}{g} r\,\dot{Y}_B + \frac{2w}{g} r\,\dot{Y}_C = 0$$

$$-\dot{Y}_A - \dot{Y}_A + 2\,\dot{Y}_C = 0 \qquad (1)$$

2).- Relaciones cinemáticas:

$$\dot{Y}_C = \dot{Y}_{Cu} \;\;,\;\; \dot{Y}_B = -\dot{Y}_{Cu} \quad y \quad \dot{Y}_A = \dot{Y}_{A\,rel} - \dot{Y}_{Cu} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\dot{Y}_{Cu} - \dot{Y}_{A\,rel} + \dot{Y}_{Cu} + 2\dot{Y}_{Cu} = 0 \quad \rightarrow \quad 4\dot{Y}_{Cu} - \dot{Y}_{A\,rel} = 0$$

Separando variables e integrando:

$$4Y_{Cu} - Y_{A\,rel} = C_1$$

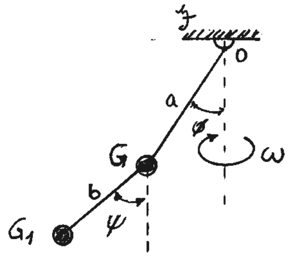
Si para t = 0, $Y_{oCu} = 0$ y $Y_{oA\,rel} = 0$ $\rightarrow$ $C_1 = 0$

Luego:

$$Y_{Cu} = \frac{1}{4} Y_{A\,rel} \quad \text{y si: } Y_{Cu} = Y_C \quad \text{y} \quad Y_{A\,rel} = d$$

$$\therefore \quad Y_C = \frac{1}{4} d \quad (\uparrow) \text{ (Unidades de longitud)}$$

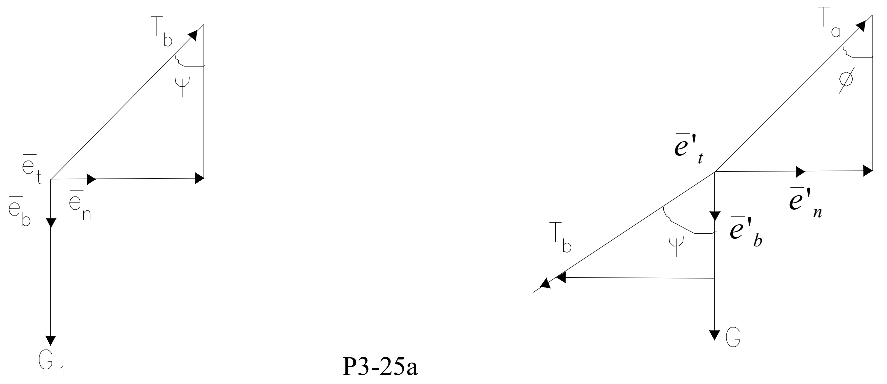
3-25.- Dos puntos materiales de pesos G y G_1, están unidas entre si por dos hilos inextensibles de longitudes a y b, y sujetos a un punto fijo O en $\Im$ (ver figura). El sistema gira alrededor de la vertical que pasa por O, con una velocidad angular constante ω. Determinar las ecuaciones trigonométricas para hallar los ángulos ϕ y Ψ en la posición de equilibrio dinámico (estabilización del movimiento) y las tensiones en los dos cables.



P3-25

Solución

1).- D.C.L.



P3-25a

(a) (b)

2).- Relaciones cinéticas:

a).- En (a):

$$\sum F_b = 0 \quad \rightarrow \quad G_1 = T_b \cos\psi$$

$$T_b = \frac{G_1}{\cos\psi} \quad \text{(Unidad de fuerza)} \qquad (1)$$

$$\sum F_n = ma_n \quad \rightarrow \quad T_b sen\psi = \frac{G_1}{g}\left(bsen\psi + asen\phi\right)\omega^2 \qquad (2)$$

(1) en (2):

$$G_1 tg\psi = \frac{G_1}{g}\left(bsen\psi + asen\phi\right)\omega^2$$

$$tg\psi = \frac{\omega^2}{g}\left(bsen\psi + asen\phi\right) \qquad (\text{I})$$

También:

$$asen\phi\ \omega^2 = g\ tg\psi - bsen\psi\ \omega^2 \qquad (3)$$

b). En (b):

$$\sum F_b = 0 \quad \rightarrow \quad T_a \cos\phi - T_b \cos\psi - G = 0 \tag{4}$$

(1) en (4):

$$T_a = \frac{G + G_1}{\cos\phi} \quad \text{(Unidades de fuerza)} \tag{5}$$

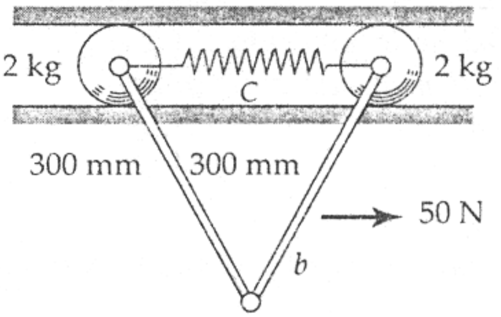
$$\sum F_n = ma_n \quad \rightarrow \quad T_a sen\phi - T_b sen\psi = \frac{G}{g} asen\phi\ \omega^2 \tag{6}$$

(1), (3) y (5) en (6):

$$\left(G + G_1\right) tg\phi - G_1\ tg\psi = G\ tg\psi - \frac{G}{g} bsen\psi\ \omega^2 \ \rightarrow\ \left(G + G_1\right) tg\psi - \left(G + G_1\right) tg\phi = \frac{\omega^2}{g} bsen\psi\ \omega^2$$

$$\frac{\omega^2}{g} b\ sen\psi = \frac{\left(G + G_1\right)}{G}\left(tg\psi - tg\phi\right) \qquad \text{(II)}$$

3-26.- El sistema está compuesto de dos esferas lisas, de masa 2 kg cada una. Se hallan enlazadas por un resorte sin masa y mediante las dos barras de masas despreciables articuladas libremente en sus extremos y que cuelgan en un plano vertical. Las esferas están obligadas a moverse en la guía horizontal lisa. Si se aplica una fuerza horizontal F = 50 N a una de las barras en la posición que se indica ¿cuál será la aceleración del centro C del resorte? ¿Por qué no depende el resultado de la dimensión b?

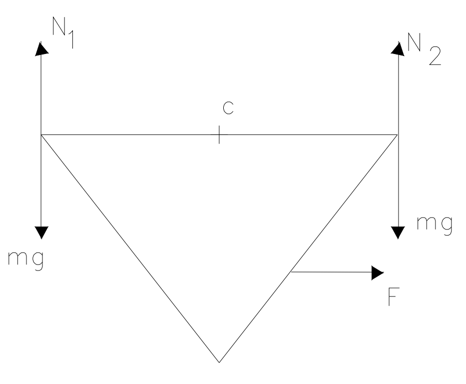


P3-26

Solución

Se trata de un sistema de partículas discretas indeformable, por que no hay ninguna fuerza externa como interna que pueda deformar el resorte; luego el sistema tiene un movimiento de traslación.

1). - D.S.F.:



P3-26a

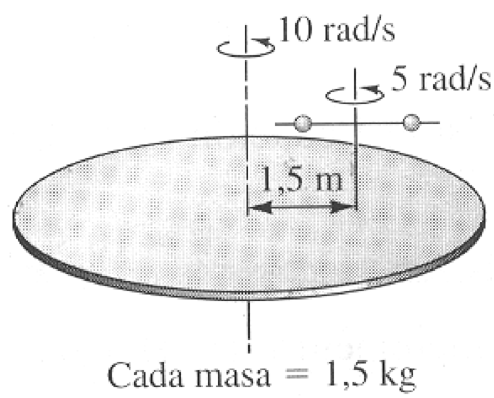
2). - Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m_T a_C \quad \rightarrow \quad F = \left(m + m\right) a_C$$

$$a_C = \frac{50}{4} = 12.5 \quad \text{m/seg}^2$$

3).- El movimiento no depende de b" ", por que el sistema no tiene movimiento de traslación (sistema estable)

3-27.- Se monta un dispositivo sobre una plataforma que está girando con una velocidad angular de 10 rad/seg. El dispositivo consiste en dos masa de 1.5 kg cada una, girando sobre un huso con una velocidad angular de 5 rad/seg respecto a la plataforma. Las masas se están moviendo radialmente hacia fuera con una velocidad de 3 m/seg y todo el conjunto se está elevando con una velocidad de 1.5 m/seg. Calcule la energía cinética del sistema de dos partículas cuando están a una distancia de 1 pie del huso.

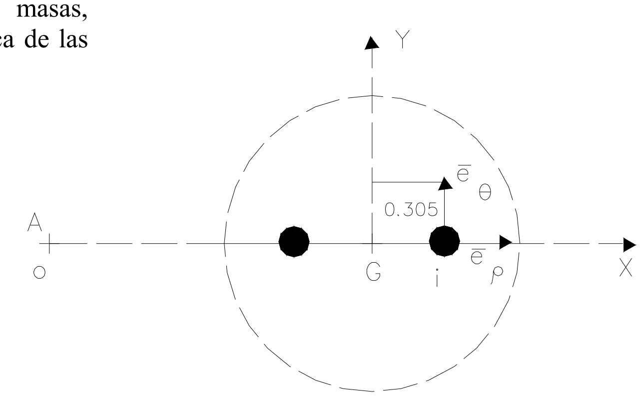


P3-27

Solución

1).- Relaciones cinéticas.

a).- cálculo de la velocidad de una de las masas, respecto al centro de masa y la energía cinética de las dos masas respecto al centro de masa:



P3-27a

$$\overline{V}_{G\,i} = \dot{\rho}\,\overline{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\overline{e}_\theta = 3\,\overline{e}_\rho + 0.305x5\,\overline{e}_\theta$$

$$\overline{V}_{G\,i} = 3\,\overline{e}_\rho + 1.525\,\overline{e}_\theta \quad \text{(m/seg)}$$

$$V_{G\,i}^2 = 9 + 1.525^2 = 11.326 \quad \text{(m/seg)}^2$$

$$\sum_{i=1}^{2} \tfrac{1}{2} m_i V_{G\,i}^2 = 1.5x11.326 = 16.989 \quad \text{Joule}$$

b).- Cálculo de la velocidad del centro de masa y su respectiva energía cinética:

$$\overline{V}_G = \overline{V}_A + \overline{V}_{G/A} = \overline{V}_A + \overline{\omega} x \overline{r}_{AG}$$

$$\overline{V}_G = 1.5\,\overline{k} + 10\,\overline{k}x1.5\,\overline{i} = 15\,\overline{j} + 1.5\,k \quad \text{(m/seg)}$$

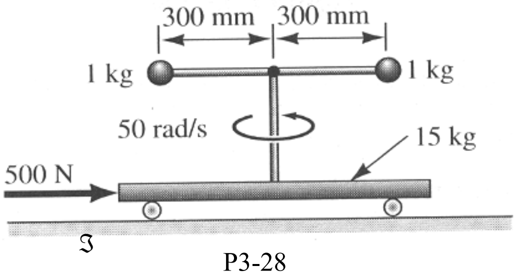
$$\frac{1}{2}mV_G^2 = 1.5x227.25 = 340.875 \quad (\text{m/seg})^2$$

2).- Cálculo de la energía cinética del sistema de dos partículas:

$$E_K = \frac{1}{2}mV_G^2 + \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}m_iV_{G\,i}^2 = 340.875 + 16.989$$

$$E_K = 357.864 \quad \text{Joule}$$

3-28.- Un vehículo de 15 kg tiene dos cuerpos (con una masa de 1 kg cada uno) montados sobre él y estos cuerpos giran con una velocidad angular de 50 rad/seg relativa al vehículo. Si se aplica una fuerza de 500 N sobre el vehículo durante una distancia de 17 m ¿Cuál será la energía cinética del sistema, suponiendo que el vehículo parte del reposo? Desestimar el rozamiento, la inercia de las ruedas y las masas de las barras.

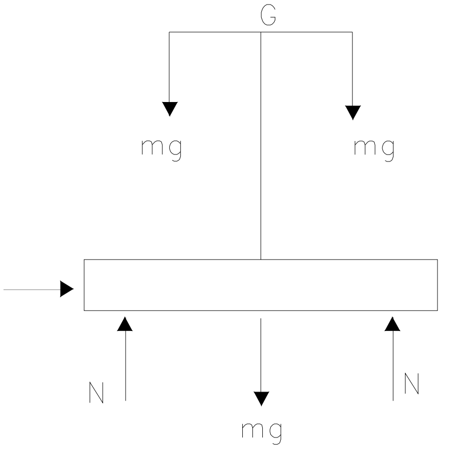


P3-28

Solución

1).- Cálculo de la velocidad de G:

a).- D.S.F.:



P3-28a

b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m_T\ddot{X}_G \quad \rightarrow \quad 500 = (15+2)\,a$$

$$a = \frac{500}{17} = 29.412 \quad \text{m/seg}^2$$

c).- Relaciones cinemáticas:

$$\dot{X}_G^2 = 2aX = 2*29.412*17 = 1000 \quad (\text{m/seg})^2$$

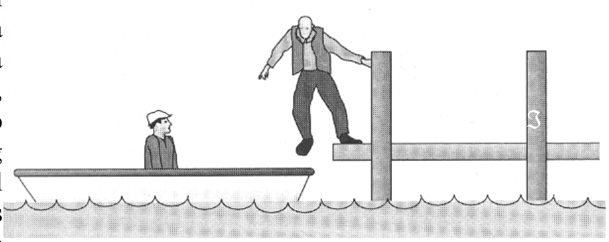
2).- Cálculo de la energía cinética del sistema, para X = 17 m:

$$E_K = E_{K\,C} + \sum\frac{1}{2}m_iV_i^2 \qquad \rightarrow \qquad E_K = \frac{1}{2}m_C\dot{X}_G^2 + \frac{1}{2}m_t\dot{X}_G^2 + \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}m_1V_{G\,i}^2$$

$$E_K = \frac{1}{2} * (15+2) * 1000 + \frac{1}{2} * 1 * 2(0.3\omega)^2$$

$$E_K = 17 * 500 + (0.3 * 50)^2 = 8725 \text{ Joules}$$

3-29.- Una persona de 800 N aparta del embarcadero un bote de 890 N que transporta otra persona de 668 N. La velocidad que se le comunica al bote al ser empujado es de 0.3 m/seg. Entonces, la primera persona salta desde el embarcadero hacia el bote con una velocidad de 0.6 m/seg relativa al embarcadero y en la dirección del movimiento del bote. Cuando ambos pasajeros están instalados en el bote y antes de que comiencen a remar ¿Cuál será la velocidad del bote? Despreciar el rozamiento del agua.



P3-29

Solución

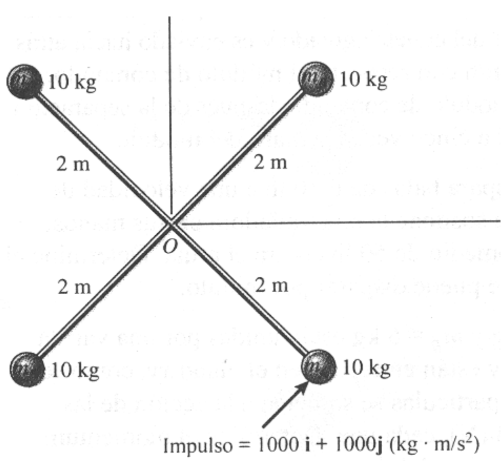
Como no hay fuerzas horizontales externas resultantes, la cantidad de movimiento lineal se conserva en esa dirección:

$$\left(\sum m_i V_{H\,i}\right) i = \left(\sum m_i V_{H\,i}\right)_f$$

$$\frac{(890+668)}{g} * 0.3 + \frac{800}{g} * 0.6 = \frac{(890+668+800)}{g} * V$$

$$V = 0.402 \text{ m/seg}$$

3-30.- Un sistema consta de cuatro partículas y la masa de cada una es de 10 kg. Las partículas están unidas por varillas delgadas de masas despreciables. El sistema, que inicialmente está en reposo, comienza su movimiento y permanece en el plano xy al aplicarse un impulso de $1000\,\bar{i} + 1000\,\bar{j}$ (kg-m/seg) en C, como se ilustra. Determine: a) la velocidad del centro de masa y b) la velocidad angular ω del sistema.



P3-30

Solución

1).- Cálculo de la velocidad del centro de masa por el principio de impulso y cantidad de movimiento lineal.

$$\bar{I} = \int_o^t \bar{F}\, dt = \bar{F}\, \Delta t = 1000\, i + 1000\, \bar{j} \text{ (kg-m/seg)}$$

$$\bar{I} = \Delta\, \bar{L} = m_t \left(\bar{V}_G - \overbrace{\bar{V}_{Go}}^{0} \right)$$

$$1000\, \bar{i} + 1000\, \bar{j} = 40\, \bar{V}_G$$

$$\bar{V}_G = 25\, \bar{i} + 25\, \bar{j} \quad \text{(m/seg)}$$

2).- Por el principio de impulso angular y cantidad de movimiento angular:

Si: $\bar{F} \perp \bar{r}_{OC} \;\Rightarrow\; \bar{r}\; x\; \bar{F} = r\; F\; \bar{k} \quad \rightarrow \quad \sum \bar{M}_0 = r\; F\; \bar{k}$

Luego:

$$\int_0^t \sum \bar{M}_0 dt = r\; F\; \Delta\; t\; \bar{k} = \Delta\; \bar{H}_0 = \left(\sum H_{0\,Z}\right)_i \bar{k} - \left(\sum H_{0\,Z}\right)_f \bar{k} \qquad (1)$$

a).- Cálculo del impulso angular:

$$F\; \Delta\; t = \sqrt{1000^2 + 1000^2} = 1000\sqrt{2} \text{ N-seg}$$

$$r\; F\; \Delta\; t = 2x1000\sqrt{2} = 2828.43 \quad \text{(kg-m}^2\text{/seg)} \qquad (2)$$

b).- Cálculo de la cantidad de movimiento angular final:

$$\bar{r}_A = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\bar{i} + \bar{j}\right) = \sqrt{2}\left(-\bar{i} + \bar{j}\right) \;,\; \bar{r}_B = \sqrt{2}\left(\bar{i} + \bar{j}\right)$$

$$\bar{r}_C = \sqrt{2}\left(\bar{i} - \bar{j}\right) \quad y \quad \bar{r}_D = \sqrt{2}\left(-\bar{i} - \bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_A = \bar{V}_G + \omega\, \bar{k} x \bar{r}_A = \bar{V}_G + \omega\, \bar{k} x \sqrt{2}\left(-\bar{i} + \bar{j}\right) = \bar{V}_G + \sqrt{2}\omega\left(-\bar{i} - \bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_G + \omega\, \bar{k} x \bar{r}_B = \bar{V}_G + \omega\, \bar{k} x \sqrt{2}\left(\bar{i} + \bar{j}\right) = \bar{V}_G + \sqrt{2}\omega\left(-\bar{i} + \bar{j}\right)$$

$$\overline{V}_C = \overline{V}_G + \omega\,\overline{k}x\overline{r}_C = \overline{V}_G + \omega\,\overline{k}x\sqrt{2}\left(\overline{i} - \overline{j}\right) = \overline{V}_G + \sqrt{2}\omega\left(\overline{i} + \overline{j}\right)$$

$$\overline{V}_D = \overline{V}_G + \omega\,\overline{k}x\overline{r}_D = \overline{V}_G + \omega\,\overline{k}x\sqrt{2}\left(-\overline{i} - \overline{j}\right) = \overline{V}_G + \sqrt{2}\omega\left(\overline{i} - \overline{j}\right)$$

$$\overline{H}_{OA} = \overline{r}_A xm\overline{V}_A = \overline{r}_A xm\overline{V}_G + \overline{r}_A xm\sqrt{2}\omega\left(-\overline{i} - \overline{j}\right) = \overline{r}_A xm\overline{V}_G + 2m\omega\left(\overline{k} + \overline{k}\right)$$

$$\overline{H}_{OB} = \overline{r}_A xm\overline{V}_B = \overline{r}_B xm\overline{V}_G + \overline{r}_B xm\sqrt{2}\omega\left(-\overline{i} + \overline{j}\right) = \overline{r}_B xm\overline{V}_G + 2m\omega\left(\overline{k} + \overline{k}\right)$$

$$\overline{H}_{OC} = \overline{r}_A xm\overline{V}_C = \overline{r}_C xm\overline{V}_G + \overline{r}_C xm\sqrt{2}\omega\left(\overline{i} + \overline{j}\right) = \overline{r}_C xm\overline{V}_G + 2m\omega\left(\overline{k} + \overline{k}\right)$$

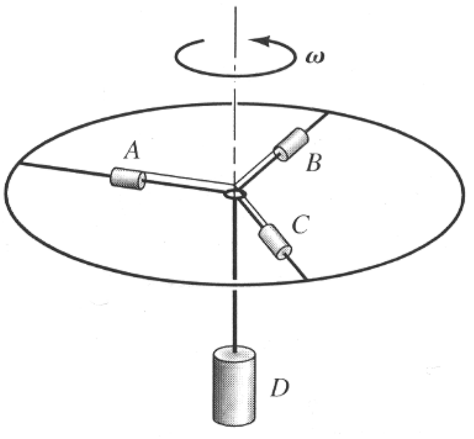
$$\overline{H}_{OD} = \overline{r}_A xm\overline{V}_D = \overline{r}_D xm\overline{V}_G + \overline{r}_D xm\sqrt{2}\omega\left(\overline{i} - \overline{j}\right) = \overline{r}_D xm\overline{V}_G + 2m\omega\left(\overline{k} + \overline{k}\right)$$

$$\left(\sum H_{0z}\right)_f = \overbrace{\left(\overline{r}_A + \overline{r}_B + \overline{r}_C + \overline{r}_D\right)}^{0} xm\overline{V}_G + 16m\omega\,\overline{k} = 160\,\omega\,\overline{k} \quad \text{(kg-m}^2\text{/seg)} \qquad (3)$$

(2) = (3):

$$2828.43 = 160\,\omega \quad \rightarrow \quad \omega = 17.68 \ \text{rad/seg}$$

3-31.- Un sistema mecánico está compuesto de tres cuerpos idénticos A, B y C de 1.5 kg de masa cada uno, que se mueven sin rozamiento a lo largo de tres barras ligeras que forman 120° entre ellos y están fijados sobre una rueda ligera. Cada uno de estos cuerpos está conectado mediante un cordón inextensible a un peso colgante D. La conexión de los cordones con D es tal que no puede transmitir ningún momento a D. Inicialmente, las tres masas A, B y C se mantienen a una distancia de 0.6 m del eje mientras la rueda gira a 3 rad/seg ¿Cuál será la velocidad angular de la rueda y la velocidad de descenso de D si, después de soltar los cuerpos radiales, el cuerpo D recorre 0.3 m? Suponer que D está inicialmente estacionario (es decir sin girar). El cuerpo D tiene una masa de 50 kg.

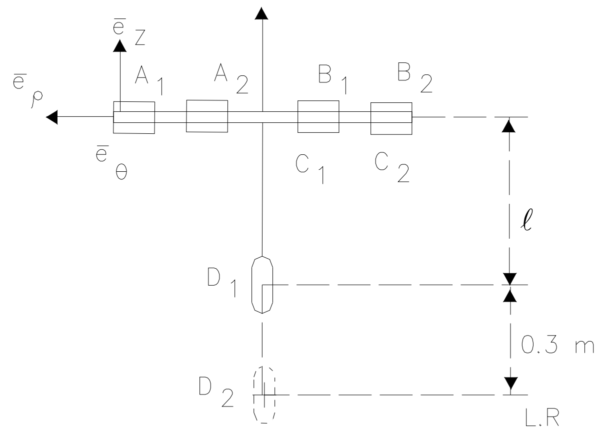


P3-31

Solución

Como no hay momentos resultantes con respecto al eje vertical, la cantidad de movimiento angular se conserva en el sistema, además la única fuerza que produce trabajo es el peso, luego la energía mecánica en el sistema se conserva.

1).- Representación grafica del estado inicial y final del sistema:



P3-31a

2).- Por conservación de la cantidad de movimiento angular:

$$(H_{0Z\,i})_i = (H_{0Z\,i})_f$$

$$3m\,r_1 V_{\theta 1} = 3m\,r_2 V_{\theta 2}$$

$$V_{\theta 2} = \frac{r_1}{r_2} V_{\theta 1} = \frac{0.6}{0.3} * 0.6 * 3 = 3.6 \text{ m/seg}$$

$$V_{\theta 2} = \omega_2 r_2 = 3.6 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = \frac{3.6}{0.3} = 12 \text{ rad/seg}$$

2).- Por conservación de le energía mecánica:

$$U_{g1} = 3mg(\ell + 0.3) + m_D g * 0.3 \quad \rightarrow \quad U_{g1} = 3mg(\ell + 0.3) + 147.15 \text{ Joule}$$

$$E_{K1} = \frac{1}{2} * 3mV_{\theta 1}^2 = \frac{3}{2} m\,(0.6 * 3)^2 = 7.29 \text{ Joules}$$

$$U_{g2} = 3mg(\ell + 0.3) \text{ Joules}$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2} * 3mV_{\theta 2}^2 + \frac{1}{2} * 3mV_{r2}^2 + \frac{1}{2} * m_D V_{r2}^2 \quad \rightarrow \quad E_{K2} = 1.5^2 (0.3 * 12)^2 + V_{r2}^2 (1.5^2 + 25)$$

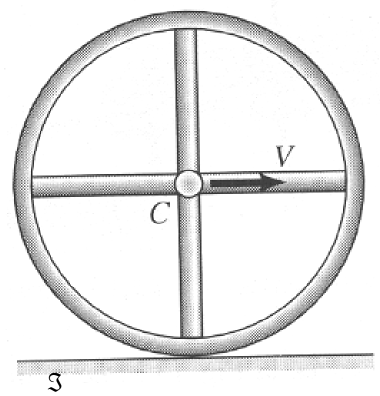
$$E_{K2} = 27.25\, V_{r2}^2 + 29.16 \text{ Joule}$$

Si: $E_{M1} = E_{M2}$

$$3m(\ell + 0.3) + 147.15 + 7.29 = 3m(\ell + 0.3) + 27.25\, V_{r2}^2 + 29.16$$

$$V_{r2} = 2.144 \text{ m/seg}$$

3-32.- Un aro con cuatro radios, rueda sin deslizar de forma que su centro C se mueve con una velocidad de V = 1.7 m/seg. El diámetro del aro es de 3.3 m y el peso por unidad de longitud de la llanta es de 14 N/m. Los radios son barra uniformes que tienen también un peso por unidad de longitud de 14 N/m. Suponer que la llanta y los radios son delgados. Utilizando la teoría de los sistemas de partículas encuentre la energía cinética del cuerpo.



P3-32

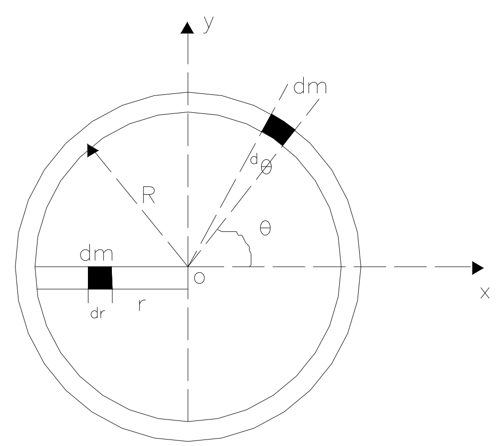
Solución

1).- Relaciones cinemáticas.- velocidades relativas al centro de masas.

a).- De un punto cualquiera de la llanta:

$$\overline{V}_{i\,a} = \overline{V}_C + \dot{\overline{\rho}}_{C\,i\,a} = \overline{V}_C + \omega\,\overline{k} x \overline{r}_{CC\,i\,a} = V_C \overline{i} + \omega\, R\, \overline{u}$$

$$\therefore \quad \dot{\rho}^2_{C\,i\,a} = (\omega\, R)^2$$



P3-32a

b).- De un punto cualquiera de una de las barras:

$$\overline{V}_{i\,b} = \overline{V}_C + \dot{\overline{\rho}}_{C\,i\,b} = \overline{V}_C + \omega\,\overline{k} x \overline{r}_{CC\,i\,b} = V_C \overline{i} + \omega\, r\, \overline{n}$$

$$\therefore \quad \dot{\rho}^2_{C\,i\,b} = (\omega\, r)^2$$

c).- Se conoce por rodamiento:

$$\omega = \frac{V}{R}$$

2).- Cálculo de la energía cinética del cuerpo.

$$E_K = \frac{1}{2} m_t V_C^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\rho}^2_{C\,i}$$

a).- Cálculo de la energía cinética del centro de masa C:

$$E_{K\,cm} = \frac{1}{2} m_t V_C^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} (2\pi\, R + 4R)\, V_C^2 = \frac{\gamma}{g} R(\pi + 2) V_C^2$$

$$E_{K\ cm} = \frac{14}{9.81}\,x\,\frac{3.3}{2}(\pi + 2) * 1.7^2 = 34.989 \text{ Joules}$$

b).- Cálculo de la energía cinética relativa al centro de masa:

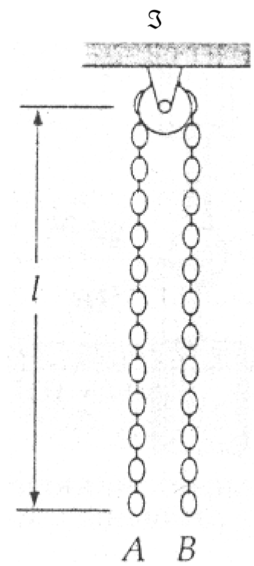
$$E_{Krel\ cm} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\rho}_{C\,i}^2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma}{g} R\, d\theta\,(\omega R)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\int_0^{R} \frac{\gamma}{g}\, dr\,(\omega\, r)^2\right)$$

$$E_{Krel\ cm} = \frac{\gamma}{g} R\, V_C^2\left(\pi + \frac{2}{3}\right) = \frac{14}{9.81} * \frac{3.3}{2} * 1.7^2\left(\pi + \frac{2}{3}\right) = 25.92 \text{ Joules}$$

Luego:

$$E_K = 34.99 + 25.92 = 60.91 \text{ Joules}$$

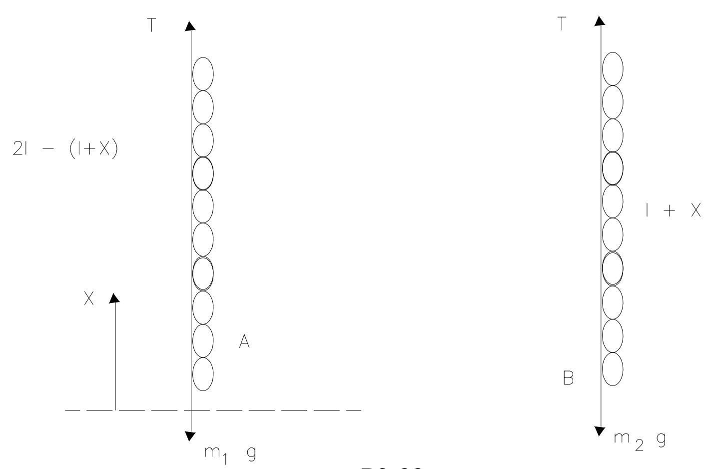
3-33.- Una cadena de longitud $2\,\ell$ y masa ρ por unidad de longitud cuelga del modo representado. Si al extremo B se le da un leve desplazamiento hacia abajo, el desequilibrio genera una aceleración. Hallar la aceleración de la cadena en función del desplazamiento hacia arriba X del extremo A y determinar la velocidad V del extremo A cuando llega arriba. Despreciar la masa y el diámetro de la polea.



P3-33

Solución

1).- D.C.L. (de las dos partes, que fueron cortadas para un X cualquiera):



(a) P3-33a (b)

2).- Relaciones cinéticas:

$$T - \rho\, g\, [2\, l - (l + X)] = \rho\, [\overbrace{2\, l - (l + X)}^{l-X}]\, \ddot{X} \qquad (1)$$

$$-T + \rho\, g\, (l + X) = \rho\, (l + X)\, \ddot{X} \qquad (2)$$

(1) + (2) $\quad \rho\, g\, (2X) = \rho\, \ddot{X}\, (2\, l)$

$$\ddot{X} = \frac{g}{l}\, X \quad \text{(Unid. de aceleración)} \qquad (3)$$

De (3):

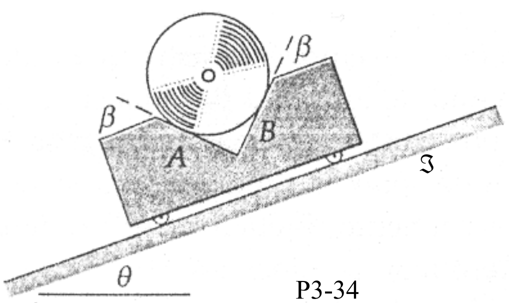
$$\frac{d\dot{X}}{dt} * \frac{dX}{dX} = \frac{g}{l}\, X \quad \rightarrow \quad \dot{X}\, d\dot{X} = \frac{g}{l}\, X\, dX$$

Integrando:

$$\int_0^{\dot{X}} \dot{X}\, d\dot{X} = \frac{g}{l} \int_0^{l} X\, dx \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{X}^2}{2} = \frac{g}{2\, l}\, X^2 \Big|_0^{l}$$

$$\dot{X}^2 = \frac{g}{l}\, l^2 \quad \rightarrow \quad V = \sqrt{g\, l} \quad \text{(Unid. de velocidad)}$$

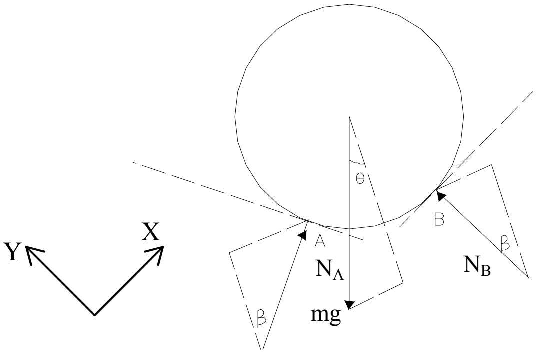
3-34.- Un cilindro de masa *m* descansa sobre un carrito base tal como se representa. Si β = 45° y θ = 30°, calcular la aceleración pendiente arriba máxima a que puede comunicarse al carrito, sin que el cilindro pierda contacto en B.



P3-34

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P3.34a):



P3-34a

2).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m\, a$$

$$N_A sen\beta - N_B sen\beta - mg\ sen\theta = m\ a \qquad (1)$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$N_A \cos\beta + N_B \cos\beta - mg\cos\theta = 0$$

$$N_A = mg\,\frac{\cos\theta}{\cos\beta} - N_B \qquad (2)$$

3).- Para el caso, donde el movimiento es inminente del cilindro respecto al carrito, luego: $N_B = 0$, β = 45° y θ = 30°:

En (2):

$$N_A = mg\,\frac{\cos\theta}{\cos\beta}$$

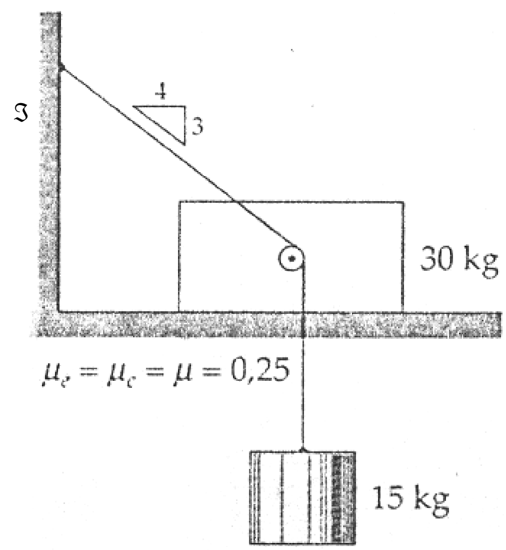
En (1):

$$mg\ tg\beta\cos\theta - mg\ sen\theta = m\ a$$

$$a = g\ (tg45°\cos 30° - sen30°)$$

$$a = 0.366\ g \quad \text{(Unid. de aceleración)}$$

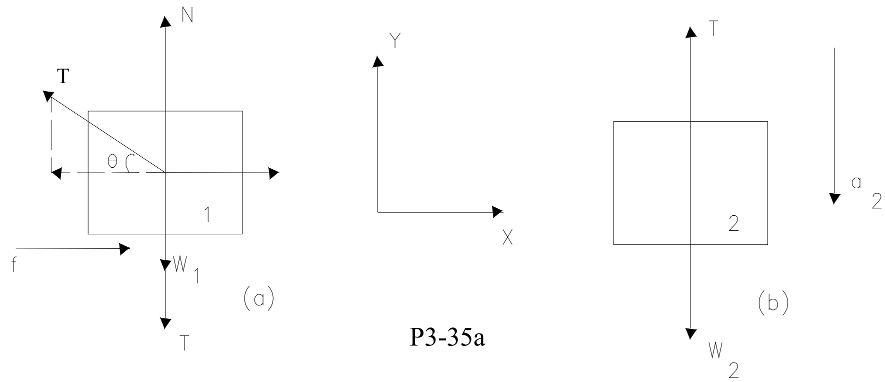
3-35.- El sistema se abandona desde el reposo en la posición representada. Calcular la tensión T de la cuerda y la aceleración del bloque de 30 Kg. Se desprecian la masa de la pequeña polea sujeta al bloque y el rozamiento en la misma *(sugerencia: empezar estableciendo la relación cinemática entre aceleraciones de los dos cuerpos)*.



P3-35

Solución

1).- D.C.L. (s) (ver figura P3-35a):

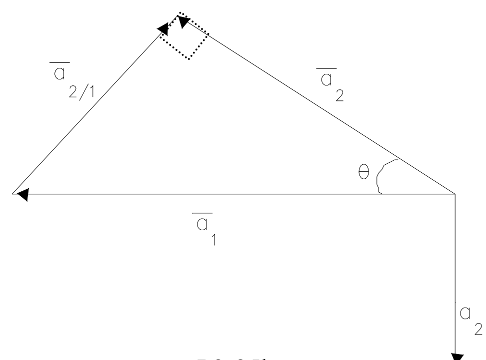


P3-35a

2).- Relaciones cinemáticas.- Si el sistema se abandona del reposo, solo existe en ese momento la aceleración tangencial del bloque "2" con respecto a "1" en la polea (ver figura P3-35b):

$$\bar{a}_2 = \bar{a}_1 + \bar{a}_{1/2}$$

$$a_2 = a_1 \cos\theta = \frac{4}{5}\, a_1 \qquad (1)$$



P3-35b

3).- Relaciones cinéticas:

En (a):

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{5}T + N - w_1 - T = 0 \quad \rightarrow \quad N = w_1 + \frac{2}{5}T$$

Luego:

$$f = \mu\, N = \mu\left(w_1 + \tfrac{2}{5}\, T\right) \qquad (2)$$

$$\sum F_X = m_1\, a_1 \quad \rightarrow \quad -\frac{4}{5}T + f = -m_1\, a_1 \quad \rightarrow \quad \frac{4}{5}T - \mu\left(w_1 + \frac{2}{5}T\right) = m_1\, a_1$$

$$T\left(\frac{4}{5} - \frac{2\,\mu}{5}\right) - \mu\, w_1 = m_1 a_1 \quad \rightarrow \quad 0.7\, T - 73.575 = 30\, a_1 \qquad (3)$$

Para (b):

$$\sum F_Y = m_2 a_2 \quad \rightarrow \quad w_2 - T = m_2 a_2 \quad \rightarrow \quad T = 147.15 - 12\, a_1 \qquad (4)$$

(4) en (3):

$$103 - 8.4\, a_1 - 73.575 = 30\, a_1 \quad \rightarrow \quad 38.4\, a_1 = 29.425$$

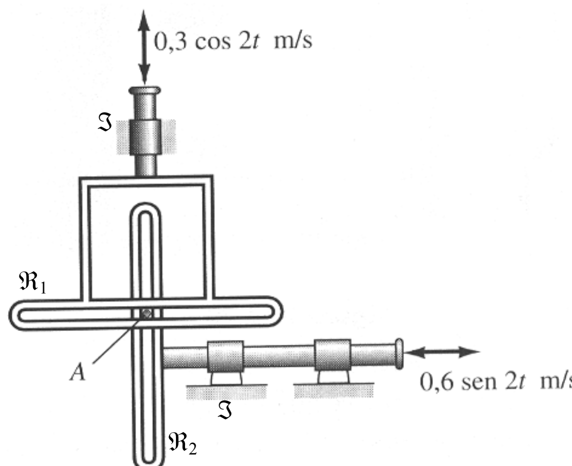
$$a_1 = 0.766 \quad \text{m/seg}^2$$

En (4):

$$T = 147.15 - 12 * 0.766 = 137.958 \quad \text{Newton}$$

$$T \cong 138 \quad \text{Newton}$$

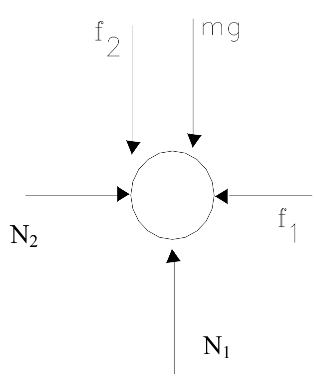
3-36.- Un cuerpo A de 0.5 kg de masa se hace mover mediante el dispositivo que se muestra. ¿Qué fuerza total se ejercerá sobre el cuerpo en el instante t = 6 seg? ¿Cuál será la máxima fuerza total sobre el cuerpo y cuando se ejercerá esta fuerza por primera vez, después de t = 0?



P3-36

Solución

1):- D.C.L.:



P3-36a

2).- Relaciones cinemáticas.- Cálculo de la aceleración de A:

a).- Tomando como marco de referencia $\Re_1$ (A_1 coincidente con A):

$$\bar a_A = \bar a_{A1/\Im} + \bar a_{A/\Re 1} + \overbrace{2\, \bar\omega_1}^{0}\, x\, \bar V_{A/\Re 1} = \mp 0.6\, sen\, 2\, t\, \bar j + a_{A/\Re 1}\, \bar i \qquad (1)$$

b).- Tomando como marco de referencia $\Re_2$ (A_2 coincidente con A):

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{A2/\Im} + \bar{a}_{A/\Re 2} + \overbrace{2\,\bar{\omega}_2}^{0}\; x\; \bar{V}_{A/\Re 2} = \pm 1.2\cos 2\,t\;\bar{i} + a_{A/\Re 2}\;\bar{j} \qquad (2)$$

(1)=(2) e igualando componente:

$$a_{A/\Re 1} = \pm 1.2\cos 2\,t \qquad \text{y} \qquad a_{A/\Re 2} = \mp 0.6\;sen\;2\,t$$

En (1):

$$\bar{a}_A = \pm 1.2\cos 2\,t\;\bar{i} \mp 0.6\;sen\;2\,t\;\bar{j} \quad \text{(Newton)}$$

3).- La fuerza total o resultante sobre la partícula A, será:

$$\bar{F} = m\,\bar{a}_A = 0.5\left(\pm 1.2\cos 2\,t\;\bar{i} \mp 0.6\;sen\;2\,t\;\bar{j}\right) = \pm\,0.6\cos 2\,t\;\bar{i} \mp 0.3\;sen\;2\,t\;\bar{j} \qquad (3)$$

a).- En (3): para el caso, donde t = 6 seg:

$$\bar{F} = \pm\,0.6\cos 12\;\bar{i} \mp 0.3\;sen\;12\;\bar{j} \quad \rightarrow \quad \left|\bar{F}\right| = 0.592 \;\text{ Newton}$$

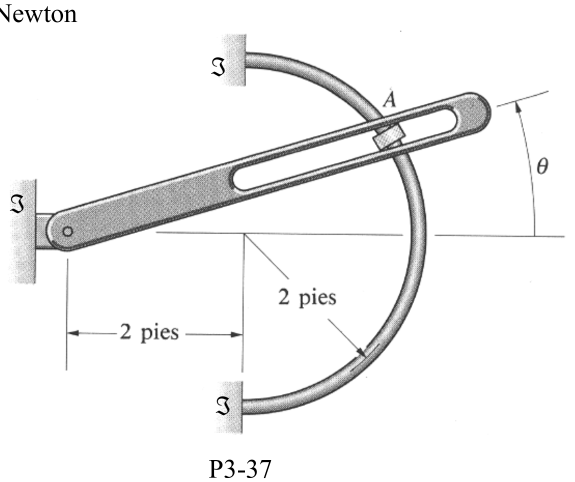
b).- En (3): el tiempo después de 0 seg en que F será máximo:

$$0.3\;sen\;2\,t = 0 \quad \rightarrow \quad 2\,t = \pi \quad \rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2}\;\text{ seg}$$

Luego:

$$\bar{F}_{máx} = \pm\,0.6\;\bar{i} \;\text{ (Newton)} \quad \rightarrow \quad \left|\bar{F}_{máx}\right| = 0.6 \;\text{ Newton}$$

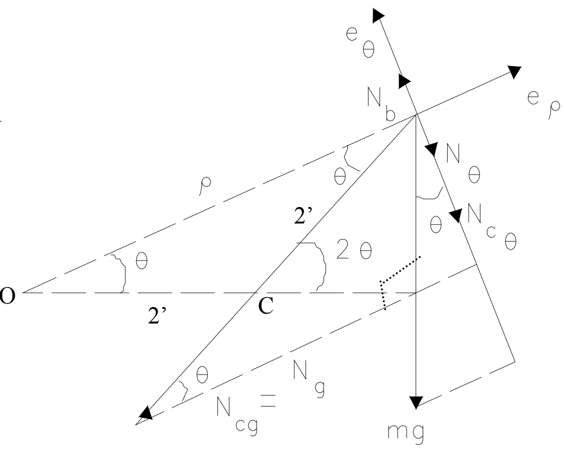
3-37.- El deslizador A de ¼ lb es empujado a lo largo de la barra circular, por la barra ranurada. La barra circular está en el plano vertical. La posición angular de la barra ranurada es θ = 10 t^2 rad. Determine las componentes radial y transversal de la fuerza total ejercida sobre el deslizador por las barras circular y ranurada, cuando t = 0.25 seg.



P3-37

Solución

1).- D.C.L. (Ver figura P3-37a):



P3-37a

2).- Relaciones cinemáticas:

a).- Identificación de los parámetros, que definen el movimiento en coordenadas polares, para t = 0.25 seg:

$$\theta = 10\, t^2 = 10 * 0.25^2 = 0.625 \quad \text{rad}$$

$$\theta = 35.81°$$

$$\dot{\theta} = 20\, t = 20 * 0.25 = 5 \quad \text{rad/seg}$$

y $\ddot{\theta} = 20$ rad/seg^2

$$\rho = 2\, r \cos\theta = 4 \cos 35.81° = 3.244 \quad \text{pies}$$

$$\dot{\rho} = -4\, sen\, \theta\, \dot{\theta} = -4\, sen\, 35.81° * 5 = -11.7 \quad \text{pie/seg}$$

$$\ddot{\rho} = -4 \cos\theta\, \dot{\theta}^2 - 4\, sen\, \theta\, \ddot{\theta} = -4 \cos 35.81° * 25 - 4\, sen\, 35.81° * 20 = -127.91 \quad \text{pie/seg}^2$$

b).- Cálculo de la aceleración de A:

$$\bar{a}_A = (-127.91 - 3.244 * 25)\, \bar{e}_\rho + (-2 * 11.7 * 5 + 3.244 * 20)\, \bar{e}_\theta$$

$$\bar{a}_A = -209.01\, \bar{e}_\rho - 52.12\, \bar{e}_\theta \quad (\text{pie/seg}^2)$$

3).- Relaciones cinéticas:

Si: $N_\rho = N_{C\rho} = N_C \cos\theta$ y $N_\theta = N_{C\theta} - N_b = N_C\, sen\theta - N_b$

$$\sum F_\rho = m\, a_\rho \quad \rightarrow \quad -N_\rho - mg\, sen\, \theta = -\frac{0.25}{32.2} * 209.01$$

$$N_\rho = -0.25 * sen\, 35.81° + 1.623 = 1.4767 \quad \text{lb} \quad \rightarrow \quad N_C = \frac{N_\rho}{\cos\theta} = 1.82 \quad \text{lb}$$

$$\sum F_\theta = m\, a_\theta \quad \rightarrow \quad -N_\theta - mg \cos\theta = -\frac{0.25}{32.2} * 52.12$$

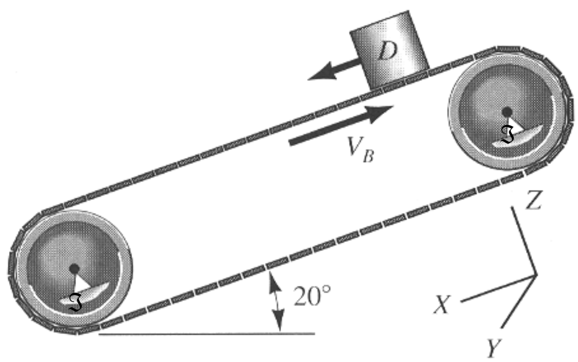
$$N_\theta = -0.25 * \cos 35.81° + 0.4047 = 0.202 \ \text{ lb}$$

$$N_\theta = N_C \ sen 35.81° - N_b \quad \rightarrow \quad N_b = 1.065 - 0.202 = 0.863 \ \text{ lb}$$

Luego, las componentes radial y transversal están en:

$$\overline{N} = -1.477\ \overline{e}_\rho - 0.202\ \overline{e}_\theta \quad \text{(lb)}$$

3-38.- La figura muestra una cinta transportadora que está inclinada 20° respecto a la horizontal. Como consecuencia de un vertido de aceite sobre la cinta, existe una fuerza de rozamiento viscoso entre el cuerpo D y la cinta. Esta fuerza es igual a 1.5 por unidad de velocidad relativa entre el cuerpo D y la cinta (N). La cinta se mueve hacia arriba con una velocidad constante $V_{B/\Im}$, mientras que inicialmente el cuerpo D tiene una velocidad $\left(V_{D/\Im}\right)_0 = 0.6$ m/seg relativa al terreno y en la dirección descendente de la cinta.

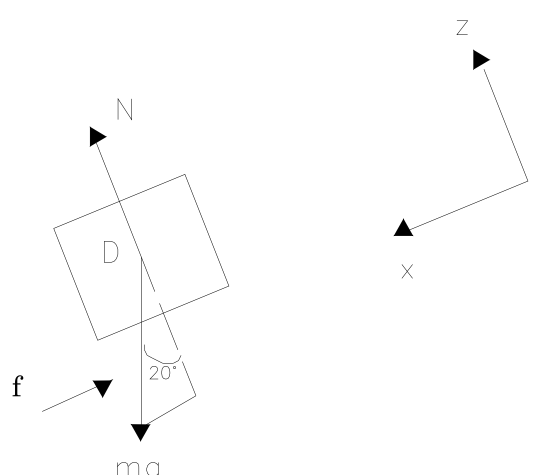


P3-38

¿Qué velocidad $V^*_{B/\Im}$ debe tener la cinta para conseguir que el cuerpo D adquiera una velocidad nula respecto al terreno? Para la velocidad $V^*_{B/\Im}$ y para la velocidad inicial para el cuerpo D dada, es decir $\left(V_{D/\Im}\right)_0 = 0.6$ m/seg, determine en qué instante de tiempo el cuerpo D adquiere una velocidad de 0.3 m/seg respecto al terreno. La masa de D es de 2.5 Kg.

Solución

1).- D.C.L.:



P3-38a

2).- Relaciones cinemáticas, para un instante cualquiera:

$$\overline{V}_{D/\Im} = \overline{V}_{D/B} + \overline{V}_{B/\Im} = V_{D/B}\,\overline{i} - V_{B/\Im}\,\overline{i}$$

$$V_{D/B}\,\overline{i} = \left(V_{D/\Im} + V_{B/\Im}\right)\overline{i}$$

$$\bar{a}_{D/\Im} = \bar{a}_{D/B} + \bar{a}_{B/\Im} = a_{D/B}\,\bar{i} + a_{B/\Im}\,\bar{i} = a_{D/\Im}\,\bar{i}$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_X = m\, a_{D/\Im} \quad \rightarrow \quad -f + 2.5\, g\, sen\, 20° = 2.5\, a_{D/\Im}$$

$$-(1.5)\left(V_{D/\Im} + V_{B/\Im}\right) + 2.5\, g\, sen\, 20° = 2.5\, a_{D/\Im} \qquad (1)$$

Para el caso de $V_{D/\Im} = 0$ (Permanente y teóricamente nula), la aceleración $a_{D/\Im} = 0$ (movimiento rectilíneo), donde $V_{B/\Im} = V^*_{B/\Im}$:

Luego en (1):

$$-1.5\, V^*_{B/\Im} + 2.5\, g\, sen\, 20° = 0 \quad \rightarrow \quad V^*_{B/\Im} = 5.592 \quad \text{m/seg}$$

4).- Si: $V_{D/\Im} = 0.3$ m/seg, $V_{B/\Im} = 5.592$ m/seg y $\left(V_{D/\Im}\right)_0 = 0.6$ m/seg:

En (1):

$$-(1.5)\left(V_{D/\Im} + V_{B/\Im}\right) + 2.5\, g\, sen\, 20° = 2.5\, \frac{dV_{D/\Im}}{dt}$$

$$-\frac{1.5}{2.5}\left(V_{D/\Im} + 5.592\right) + 9.81\, sen\, 20° = \frac{dV_{D/\Im}}{dt}$$

$$-0.6\, V_{D/\Im} = \frac{dV_{D/\Im}}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dV_{D/\Im}}{V_{D/\Im}} = -0.6\, dt \qquad (2)$$

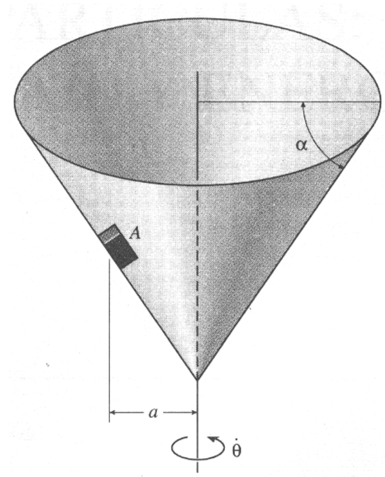
Integrando:

$$\int_{0.6}^{0.3} \frac{dV_{D/\Im}}{V_{D/\Im}} = \int_0^t -0.6\, dt \quad \rightarrow \quad \ln V_{D/\Im}\Big|_{0.6}^{0.3} = -0.6\, t \quad \rightarrow \quad \ln \frac{0.3}{0.6} = -0.6\, t$$

$t = 1.1555$ seg

Nota: De (2) se tiene $V_{D/\Im} = 0.6\, e^{-0.6\,t}$ y $a_{D/\Im} = -0.36\, e^{-0.6\,t}$; para los cuales, se da $V_{D/\Im} = 0$ y $a_{D/\Im} = 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, por lo que, teóricamente la velocidad del cuerpo D podrá aproximarse a una velocidad nula respecto al terreno.

3-39.- Usando coordenadas esféricas y coordenadas cilíndricas, determine la velocidad angular constante mínimo $\dot{\phi}$ con la cual puede hacerse girar el cono que aparece en la figura de manera, que el bloque A no deslice hacia abajo por el lado del cono. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la pared es μ_s.

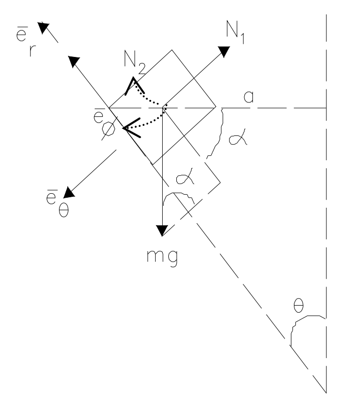


P3-39

Solución

1).- Usando coordenadas esféricas:

a).- D.C.L. (ver figura P3-39a):



P3-39a

b).- Relaciones cinemáticas:

$r = \frac{a}{\cos\alpha}$	$\theta = 90 - \alpha$	$\dot{\phi} = ?$
$\dot{r} = 0$	$\dot{\theta} = 0$	
$\ddot{r} = 0$	$\ddot{\theta} = 0$	$\ddot{\phi} = 0$

$$\bar{a}_A = -r\,\dot{\phi}^2\ sen^2\theta\ \bar{e}_r - r\,\dot{\phi}^2\ sen\,\theta\cos\theta\ \bar{e}_\theta$$

$$\bar{a}_A = -\frac{a}{\cos\alpha}\dot{\phi}^2\cos^2\alpha\ \bar{e}_r - \frac{a}{\cos\alpha}\dot{\phi}^2\cos\alpha\ sen\alpha\ \bar{e}_\theta$$

$$\bar{a}_A = -a\dot{\phi}^2\cos\alpha\ \bar{e}_r - a\dot{\phi}^2\ sen\ \alpha\ \bar{e}_\theta$$

c).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_\phi = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 = 0$$

$$\sum F_\theta = m\,a_\theta \quad \rightarrow \quad mg\cos\alpha - N_1 = -m\,a\,\dot{\phi}^2 sen\,\alpha$$

$$N_1 = m\left(g\cos\alpha + a\dot{\phi}^2 sen\,\alpha\right) \tag{1}$$

$$\sum F_r = m\,a_r \quad \rightarrow \quad f - mg\ sen\,\alpha = -m\,a\dot{\phi}^2\cos\alpha \tag{2}$$

Remplazando en $f = \mu\, N_1$ (1) y luego estos en (2):

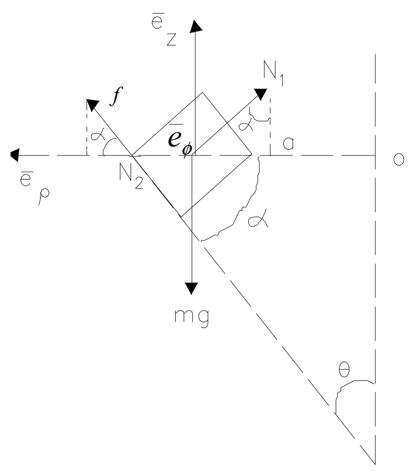
$$\mu\, m\left(g\cos\alpha + a\,\dot{\phi}^2 sen\,\alpha\right) - mg\ sen\,\alpha = -m\,a\dot{\phi}^2\cos\alpha$$

$$\dot{\phi}^2 a\left(\cos\alpha + \mu\ sen\,\alpha\right) = g\left(sen\,\alpha - \mu\cos\alpha\right)$$

$$\dot{\phi} = \pm\sqrt{\frac{g}{a}\left(\frac{sen\,\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\ sen\,\alpha}\right)}$$ (Unid. de velocidad angular)

2).- Usando coordenadas cilíndricas:

a).- D.C.L. (ver figura P3-39b):



P3-39b

b).- Relaciones cinemáticas:

$$\left|\begin{array}{l|l|l} \rho = a & \dot{\phi} = ? & \dot{Z} = 0 \\ \dot{\rho} = 0 & & \\ \ddot{\rho} = 0 & \ddot{\phi} = 0 & \ddot{Z} = 0 \end{array}\right|$$

$$\bar{a}_A = -\rho\dot{\phi}^2\ \bar{e}_\rho = -a\,\dot{\phi}^2\ \bar{e}_\rho$$

c).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_Z = 0 \quad \rightarrow \quad f\ sen\,\alpha - mg + N_1\cos\alpha = 0 \tag{3}$$

$$\sum F_\rho = m\,a_\rho \quad \rightarrow \quad f\cos\alpha - N_1 sen\,\alpha = -m\,a\,\dot{\phi}^2 \tag{4}$$

$$\sum F_\phi = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 = 0$$

Si: $f = \mu\, N_1$

En (3):

$$\mu\, N_1 sen\,\alpha + N_1 \cos\alpha = mg \quad \rightarrow \quad N_1 = \frac{mg}{\cos\alpha + \mu\, sen\,\alpha}$$

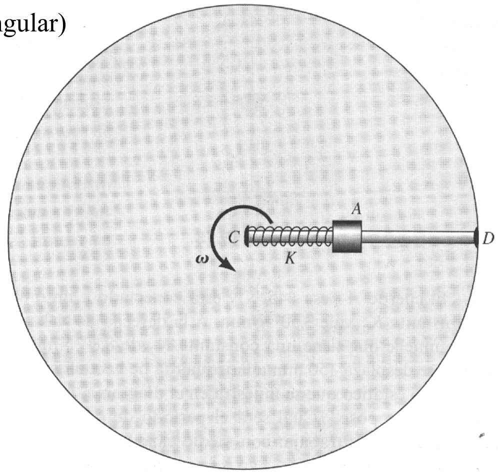
En (4):

$$\frac{\mu\, mg \cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\, sen\alpha} - \frac{mg\, sen\,\alpha}{\cos\alpha + \mu\, sen\,\alpha} = -m\, a\dot{\phi}^2$$

$$\dot{\phi}^2 = -\frac{g}{a}\left(\frac{\mu \cos\alpha - sen\,\alpha}{\cos\alpha + \mu\, sen\,\alpha}\right)$$

$$\dot{\phi} = \pm\sqrt{\frac{g}{a}\left(\frac{sen\,\alpha - \mu \cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\, sen\,\alpha}\right)}$$ (Unid. de velocidad angular)

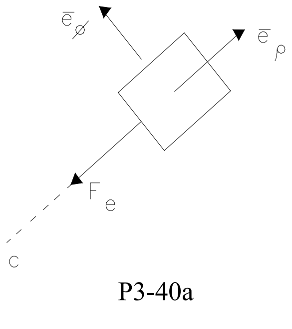
3-40.- Una plataforma horizontal está girando con una velocidad angular uniforme de ω rad/seg. Sobre la plataforma se encuentra una barra CD sobre la que desliza un cilindro A, cuya masa es *m*. El cilindro está conectado a C mediante un muelle lineal que tiene una constante K. ¿Cuál es la ecuación diferencial del movimiento de A relativa a la plataforma después de que éste haya recibido una perturbación? Tomar r_o como la longitud no deformada del muelle.



P3-40

Solución

1).- D.C.L (ver figura P3-40a):



P3-40a

2).- Relaciones cinemáticas:

$$\left|\begin{array}{l|l} \rho = r & \dot{\phi} = \omega \\ \dot{\rho} = \dot{r} & \\ \ddot{\rho} = \ddot{r} & \ddot{\phi} = 0 \end{array}\right|$$

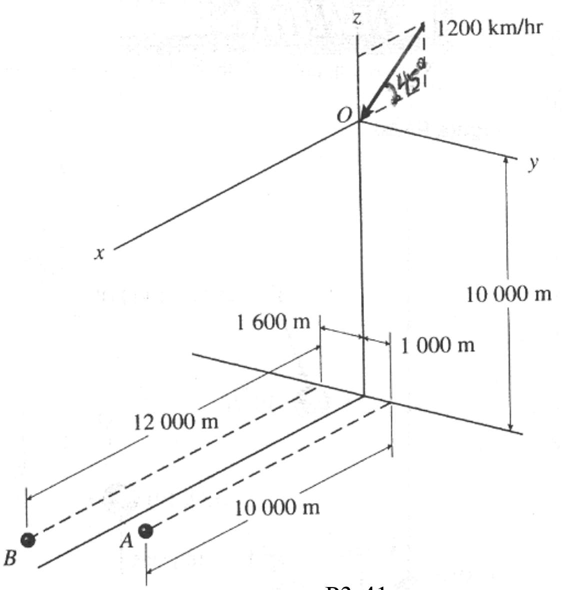
$$\bar{a}_A = \left(\ddot{r} - r\,\omega^2\right)\bar{e}_\rho + 2\,\dot{r}\,\omega\,\bar{e}_\phi$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_\rho = m\,a_\rho \quad \rightarrow \quad -K\,(r - r_0) = m\left(\ddot{r} - r\,\omega^2\right) \quad \rightarrow \quad m\,\ddot{r} - m\,r\,\omega^2 + K\,r - K\,r_0 = 0$$

$$\ddot{r} + \left(\frac{K}{m} - \omega^2\right) r = \frac{K}{m}\,r_0 \quad \text{(Movimiento vibratorio no amortiguado)}$$

3-41.-Un Satélite vuelve a entrar a la atmósfera de la tierra a una altitud de 10 km y velocidad de 1200 km/hr en el plano xz, como se ilustra, cuando súbitamente se desintegra en tres partes iguales A, B y C. Las partes producto del fraccionamiento pegan en el suelo en el mismo instante por la influencia de la gravedad (asumir que es constante). Se reportan dos de ellas desde los lugares en que han sido encontradas, cuyas posiciones relativas al punto de fragmentación se dan como $\bar{r}_A = 10\,000\,\bar{i} + 1000\,\bar{j} - 10\,000\,\bar{k}$ (m) y $\bar{r}_B = 12\,000\,\bar{i} - 1\,600\,\bar{j} - 10\,000\,\bar{k}$ (m), siendo $\bar{k}$ la normal unitaria en la dirección vertical ascendente. Despreciando la resistencia del aire determine: a) La posición del centro de masa cuando toda las partes del sistema pegan en el terreno y b) El lugar en que la parte C tiene la probabilidad de haber pegado al terreno. Considerar al terreno como un plano horizontal.



P3-41

Solución

La única fuerza externa que actúa es la fuerza de gravedad.

1).- Cálculo del movimiento del centro de masa G:

$$\bar{a}_G = -9.81\,\bar{k} \quad (\text{m/seg}^2)$$

$$V_{G0} = 1200 * \frac{1000}{3\,600} = 333.33 \quad \text{m/seg}$$

$$\bar{V}_G = 333.33\cos 45°\,\bar{i} - \left(333.33\,sen\,45° + 9.81\,t\right)\bar{k}$$

$$\bar{V}_G = 235.7\,\bar{i} - (235.7 + 9.81\,t)\,\bar{k} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{r}_G = 235.7\,t\,\bar{i} - \left(235.7\,t + 4.905\,t^2\right)\bar{k} \quad \text{(m)}$$

Cálculo del tiempo t, cuando $Z_G = -10\,000$ m (llega al terreno)

$$-\left(235.7\,t + 4.905\,t^2\right) = -10\,000 \quad \rightarrow \quad t^2 + 48.05\,t - 2038.736 = 0$$

$$t = \frac{-48.05 + \sqrt{48.05^2 + 4 * 2038.736}}{2} = 27.12 \quad \text{seg}$$

Luego, se tiene la posición del centro de masa cuando las partes llegan al terreno al mismo tiempo:

$$\bar{r}_G = 235.7 * 27.12\,\bar{i} - 10\,000\,\bar{k} = 6392.184\,\bar{i} - 10\,000\,\bar{k} \quad \text{(m)}$$

2).- Cálculo del lugar, donde ha pegado C:

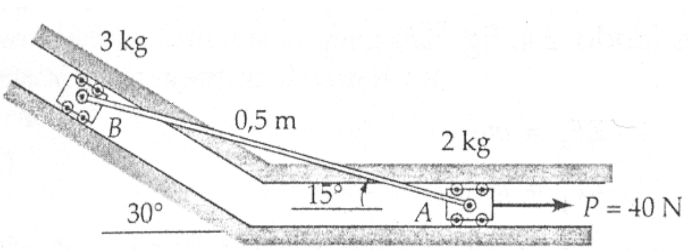
$$X_G = 6392.184 = \frac{\sum m_i X_i}{m} = \frac{\frac{1}{3} m\,(10\,000 + 12\,000 + X_C)}{m} \quad \rightarrow \quad X_C = -2\,823.465 \quad \text{m}$$

$$Y_G = 0 = \frac{\sum m_i Y_i}{m} = \frac{\frac{1}{3} m\,(1\,000 - 1\,600 + Y_C)}{m} \quad \rightarrow \quad Y_C = 600 \quad \text{m}$$

$$Z_G = Z_C = -10\,000 \quad \text{m}$$

$$\bar{r}_C = -2\,823.465\,\bar{i} + 600\,\bar{j} - 10\,000\,\bar{k} \quad \text{(m)}$$

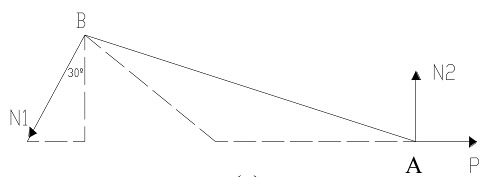
3-42.- Las correderas A y B están conectadas mediante una barra rígida liviana y se mueven sin rozamiento, por las ranuras las cuales se hallan ambas en el plano horizontal. En la posición ilustrada, la velocidad de A es de 0.4 m/seg hacia a la derecha. a).- Usando la teoría de la cinética de los sistemas de partículas para el sistema, hallar la aceleración de cada corredera y b).- La fuerza sobre la barra en ese instante.



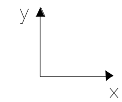
P3-42

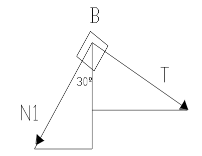
Solución

1).- D.S.F. y D.C.L. de B (ver figura P3-42a):



(a)





(b)

2).- Relaciones cinemáticas:

a).- Cálculo de la velocidad angular de la barra liviana:

$$V_B\left(\cos 30°\ \bar{i} - sen\ 30°\ \bar{j}\right) = V_A\ \bar{i} + \omega\ \bar{k}\ x\ 0.5\ \left(-\cos 15°\ \bar{i} + sen\ 15°\ \bar{j}\right)$$

Igualando componentes y operando:

$$-V_B sen\ 30° = -0.5\ \omega \cos 15°$$

$$V_B \cos 30° = 0.4 - 0.5\ \omega\ sen\ 15°$$

$$tg 30° = \frac{0.5\ \omega \cos 15°}{0.4 - 0.5\ \omega\ sen\ 15°} \rightarrow\ 0.23 - 0.0747\ \omega = 0.483\ \omega\ \rightarrow\ \omega = 0.412\ \text{ rad/seg}$$

b).- Relaciones de las aceleraciones:

$$a_B\left(\cos 30°\bar{i} - sen\ 30°\bar{j}\right) = a_A\bar{i} + \alpha\ \bar{k}\ x\ 0.5\begin{pmatrix} -\cos 15°\bar{i} + \\ sen\ 15°\bar{j}\end{pmatrix} - 0.412^2 * 0.5\begin{pmatrix} -\cos 15°\bar{i} + \\ sen\ 15°\bar{j}\end{pmatrix}$$

Igualando componentes y operando:

$$\overbrace{-a_B sen\ 30°}^{a_{BY}} = -0.483\ \alpha - 0.022 \qquad (1)$$

$$\overbrace{a_B \cos 30°}^{a_{BX}} = a_A - 0.129\ \alpha + 0.0822$$

$$tg 30° = \frac{0.483\ \alpha + 0.022}{a_A - 0.129\ \alpha + 0.0822}$$

$$\overbrace{a_A - 0.129\ \alpha + 0.0822}^{a_{BX}} = 0.837\ \alpha + 0.038 \qquad (2)$$

$$a_A = 0.966\,\alpha - 0.0442 \qquad (3)$$

3).- Relaciones cinéticas:

a).- En (a):

$$\sum F_X = \sum m_i a_{iX}$$

$$-N_1\ sen\ 30° + 40 = 3\left(0.837\,\alpha + 0.038\right) + 2\left(0.966\,\alpha - 0.0442\right) \rightarrow N_1 = 79.95 - 8.886\,\alpha$$

$$\sum M_A = \sum m_i a_i d_i$$

$$\left\{\begin{matrix} 0.483\left[\cos 30°\begin{pmatrix}70.95 - \\ 8.886\alpha\end{pmatrix}\right] + \\ 0.129\left[sen 30°\begin{pmatrix}79.95 - \\ 8.886\alpha\end{pmatrix}\right] \end{matrix}\right\} = \left\{3\left[\begin{matrix} -0.483\begin{pmatrix}0.483\alpha + \\ 0.022\end{pmatrix} - \\ 0.129\begin{pmatrix}0.837\alpha + \\ 0.038\end{pmatrix}\end{matrix}\right]\right\}$$

$$38.6 - 4.29\,\alpha = 0.376\,\alpha - 0.017$$

$$4.666\,\alpha = 38.6017 \quad \rightarrow \quad \alpha = 8.27 \ \text{rad/seg}^2$$

Luego:

En (3):

$$a_A = 0.966 * 8.27 - 0.0442 = 7.946 \ \text{m/seg}^2$$

En (2):

$$a_{BX} = 0.837 * 8.27 + 0.038 = 6.96 \ \text{m/seg}^2$$

En (1):

$$a_{BY} = -\left(0.483 * 8.27 + 0.022\right) = -4.02 \ \text{m/seg}^2$$

$$\left|\bar{a}_B\right| = a_B = 8.035 \ \text{m/seg}^2$$

$$N_1 = 79.95 - 8.886 * 8.27 = 6.463 \ \text{Newton}$$

En (b):

$$\sum F_X = m_B a_{BX} \quad \rightarrow \quad T_X + 6.463\, sen\, 30° = 3 * 6.96 \quad \rightarrow \quad T_x = 24.11 \text{ Newton}$$

$$\sum F_Y = m_B a_{BY} \quad \rightarrow \quad T_Y - 6.463 \cos 30° = -3 * 4.02 \quad \rightarrow \quad T_Y = -6.463 \text{ Newton}$$

$$\left|\overline{T}\right| = T = 24.96 \text{ Newton} \qquad \searrow$$

3-43.- El motor de un automóvil de 2500 lb, al partir del reposo, desarrolla una potencia de 90 HP (1HP = 550 lb-pie/seg) para acelerar a 60 pie/seg en 12 seg. Determine la eficiencia mecánica del motor.

Solución

Considerando al automóvil como una partícula, con movimiento lineal.

1).- Cálculo de la fuerza, para mover un bloque de 2500 lb de peso:

$$\sum F_i = F = m\, a = \frac{2500}{32.2} * \frac{60}{12} = 388.2 \text{ lb}$$

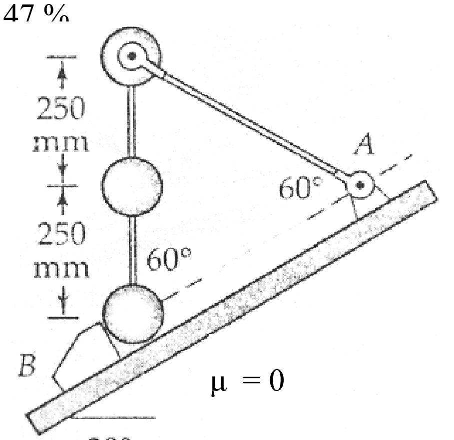
2).- Cálculo de la potencia, para mover dicho bloque:

$$P = F \cdot V = \frac{388.2}{550} * 60 = 42.35 \text{ HP}$$

3).- Cálculo de la eficiencia mecánica η:

$$\eta = \frac{Potencia\ de\ salida}{Potencia\ de\ entrada} = \frac{42.35}{90} = 0.47 \quad \text{ó} \quad \eta\,\% = 47\,\%$$

3-44.- Las tres esferas iguales, de masa *m* cada una, están sujetas en el plano vertical sobre el plano inclinado de 30°. Están también soldadas a las dos varillas de masas despreciables. La varilla superior, también de masa despreciable, está articulada libremente a la esfera superior y al soporte A. Si repentinamente se retira el tope B, hallar la velocidad v con que la esfera superior golpeará al plano inclinado. (Obsérvese que la correspondiente velocidad de la esfera central será $\frac{v}{2}$).

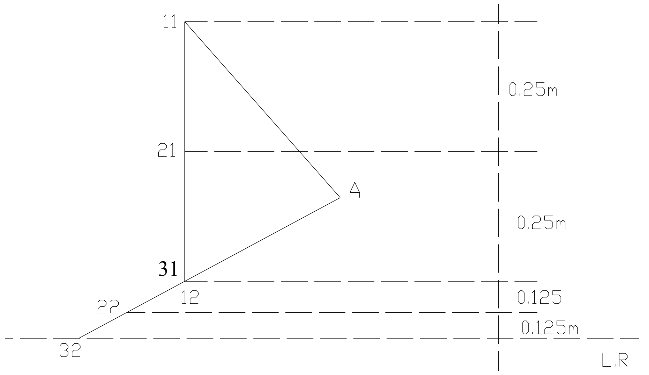


P3-44

Solución

Como la única fuerza, que produce trabajo es el peso la energía mecánica se conserva.

1).- Diagrama del estado inicial y final del sistema (ver figura P3-44a):



P3-44a

2).- Por conservación de la energía mecánica:

$$E_{M1} = E_{M2}$$

$$U_1 = mg\ (0.25 + 0.5 + 0.75) = 1.5\ mg$$

$$E_{K1} = 0$$

$$U_2 = mg\ (0.125 + 0.25) = 0.375\ mg$$

$$E_{K2} = ?$$

Si:

$$\bar{V}_{32} = \bar{0}$$

$$\bar{V}_{12} = \omega_1\ \bar{k}\ x\ (-\ell\ \bar{i}) = -\omega_1 \ell\ \bar{j} = \bar{v} \quad \rightarrow \quad v = \omega_1 \ell \qquad (1)$$

$$\bar{V}_{12} = -\omega_2\ \bar{k}\ x\ (\ell\ \bar{i}) = -\omega_2 \ell\ \bar{j} \qquad (2)$$

(1) = (2):

$$-\omega_1 \ell = -\omega_2 \ell \quad \rightarrow \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega \quad \Rightarrow \quad v = \omega\ \ell$$

Para 22:

$$\bar{V}_{22} = -\omega\ \bar{k}\ x \left(\frac{\ell}{2}\ \bar{i}\right) = -\omega\ \frac{\ell}{2}\ \bar{j} = -\frac{v}{2}\ \bar{j}$$

Luego:

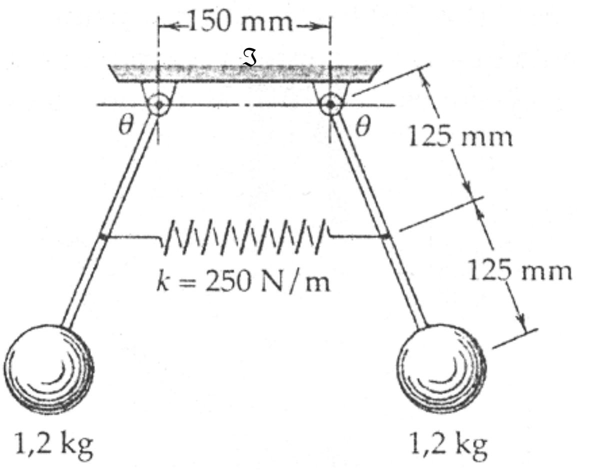
$$E_{K2} = \frac{1}{2} m\ v^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{5}{8} m\ v^2$$

$$\therefore \quad 1.5\ mg = 0.375\ mg + \frac{5}{8} m\ v^2$$

$$11.04 = \frac{5}{8}v^2 \quad \rightarrow \quad v^2 = 17.568$$

$v = 4.2$ m/seg

3-45.- Las dos barras iguales de masas despreciables, parten a la vez del reposo con θ = 30°. Hallar la velocidad V de cada esfera de 1.2 kg cuando θ = 90°, posición en que el resorte tiene su longitud natural.

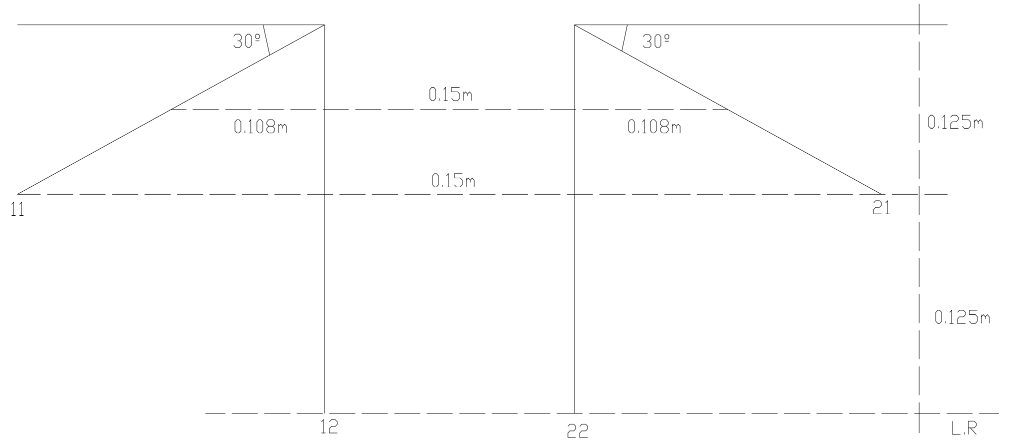


P3-45

Solución

Las únicas fuerzas que producen trabajo en el sistema, son la fuerza elástica y los pesos; por lo que; la energía total (mecánica) en el sistema se conserva.

1).- Diagrama de la posición inicial y final (ver figura P3-45a):



P3-45a

2).- Por el principio de la conservación de la energía total en el sistema:

$$E_{M1} = E_{M2}$$

$$E_{K1} = 0$$

$$U_{i\,e1} = \frac{1}{2} K\, \delta^2 = \frac{1}{2} * 250 * (2 * 0.108)^2 = 5.832\ J$$

$$U_{e\,g1} = 2mg\ h = 2 * 1.2 * 9.81 * 0.125 = 2.943\ J$$

$$E_{K2} = 2\left(\frac{1}{2} m V^2\right) = 1.2\, V^2\ J$$

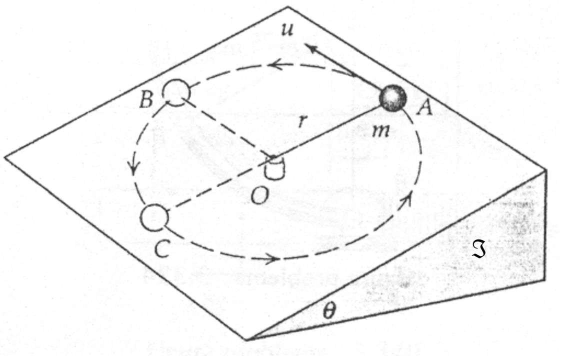
$$U_{i\,e2} = 0$$

$$U_{e\,g2} = 0$$

Luego:

$$5.832 + 2.943 = 1.2\, V^2 \quad \rightarrow \quad V = 2.7 \ \text{m/seg}$$

3-46.- La esferita de masa *m* está unida mediante una cuerda a un pivote O y describe una circunferencia de radio r sobre el plano liso, inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal. Si en la posición más alta A la esferita tiene una celeridad u, hallar la tracción T que sufre la cuerda, cuando la esferita pasa por las posiciones B y C hacia abajo.



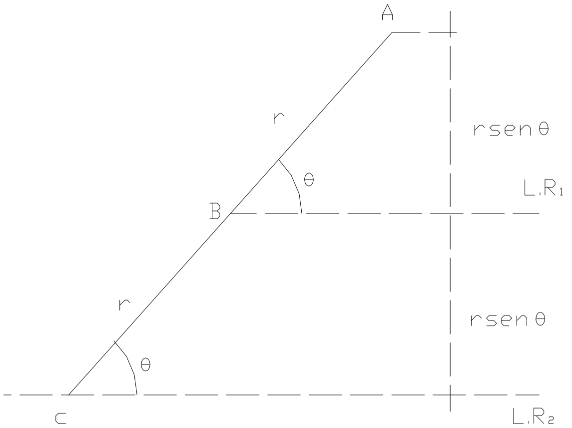
P3-46

Solución

Como la única fuerza, que produce trabajo es el peso de la partícula, la energía mecánica se conserva.

1).- Cálculo de las velocidades en los puntos B y C:

a).- Grafico de las posiciones (ver figura P3-46a):



P3-46a

b).- Por conservación de la energía mecánica, calculamos la velocidad de B:

$$mg\ r\ sen\ \theta + \frac{1}{2} m\ u^2 = \frac{1}{2} m\ V_B^2$$

$$V_B^2 = u^2 + 2\ gr\ sen\ \theta$$

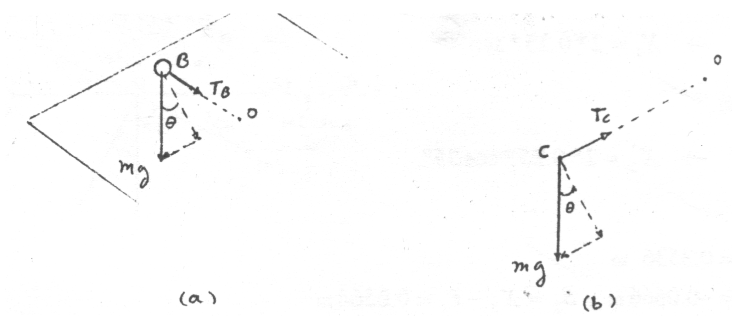
c).- Por conservación de la energía mecánica, calculamos la velocidad de C:

$$mg\ (2\ r\ sen\ \theta) + \frac{1}{2} m\ u^2 = \frac{1}{2} m\ V_C^2$$

$$V_C^2 = u^2 + 4\ g\ r\ sen\ \theta$$

2).- Cálculo de las tensiones:

a).- D.C.L. (s):



P3-46b

b).- Para (a), se tiene la tensión en B:

$$\sum F_n = m\ a_n$$

$$T_B = m\,\frac{V_B^2}{r} = m\left(\frac{u^2}{r} + 2\ g\ sen\ \theta\right)$$ (Unid. de fuerza)

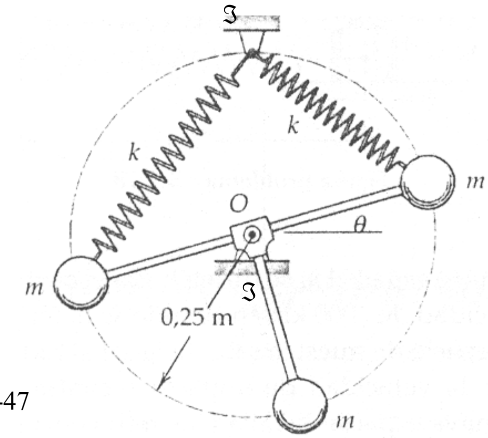
c).- Para (b), se tiene la tensión en C:

$$\sum F_n = m\ a_n$$

$$T_C - mg\ sen\theta = m\,\frac{V_C^2}{r} = m\left(\frac{u^2}{r} + 4\ g\ sen\theta\right)$$

$$T_C = m\left(\frac{u^2}{r} + 5\ g\ sen\ \theta\right)$$ (Unid. de fuerza)

3-47.- Los dos resortes, ambos de rigidez K = 1.2 KN/m, tienen longitudes iguales y están sin deformar cuando θ = 0°. Si el mecanismo parte del reposo en la posición θ = 20°, hallar su velocidad angular $\dot{\theta}$ cuando θ = 0°. La masa *m* de cada esfera es de 3 kg. Tratar las esferas como partículas y despreciar las masas de las varillas y los resortes.

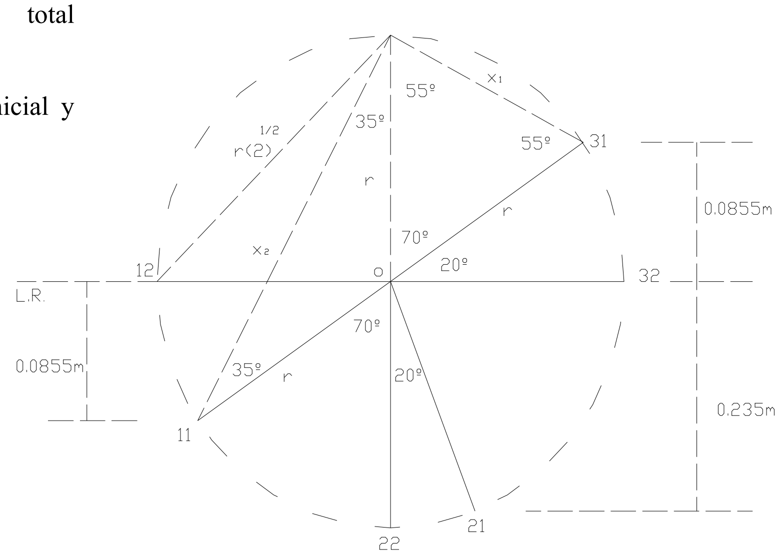


P3-47

Solución

Las únicas fuerzas, que producen trabajo en el sistema son conservativas, la energía total (mecánica) se conserva.

1).- Grafico de la posición inicial y final del sistema:



P3-47a

$$sen35° = \frac{X_1}{2\,r}$$

$$X_1 = 2*0.25*sen35°$$

$$X_1 = 0.287 \quad \text{m}$$

$$\cos 35° = \frac{X_2}{2\,r}$$

$$X_2 = 2*0.25*\cos 35° \quad \rightarrow \quad X_2 = 0.41 \quad \text{m}$$

$$\ell_i = 0.25\sqrt{2} = 0.3536 \quad \text{m}$$

$$\delta_1 = X_1 - \ell_i = -0.0666\,\text{m} \;\; \text{y} \;\; \delta_2 = X_2 - \ell_i = 0.0564\,\text{m}$$

2).- Por conservación de la energía total en el sistema:

$$E_{M1} = E_{M2}$$

$$E_{K1} = 0$$

$$U_{e1} = \frac{1}{2} K \left(0.0666^2 + 0.0564^2\right) = 4.57\ J$$

$$U_{g1} = -mg\ h = -3 * 9.81 * 0.235 = -6.916\ J$$

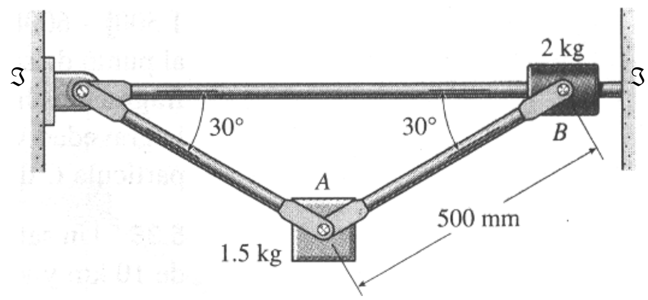
$$E_{K2} = 3\left(\frac{1}{2} m\, r^2 \dot{\theta}^2\right) = 3 * \frac{3}{2} * 0.25^2 * \dot{\theta}^2 = 0.28\, \dot{\theta}^2\ J$$

$U_{e2} = 0$ y $U_{g2} = -mg\ r = -3 * 9.81 * 0.25 = -7.3575\ J$

Luego:

$$4.57 - 6.916 = 0.28\, \dot{\theta}^2 - 7.3575 \quad \rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = 17.8982 \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = 4.23 \ \text{rad/seg}$$

3-48.- El mecanismo que se ilustra está formado por una masa de 2 kg, que desliza sobre una barra horizontal lisa y una masa de 1.5 kg, que está unida a la barra horizontal y a la masa de 2 kg por eslabones sin peso. El mecanismo se suelta del reposo en la posición que se ilustra. Determine la velocidad de la masa A, cuando el ángulo entre los eslabones de conexión y la barra horizontal sea de 60°.

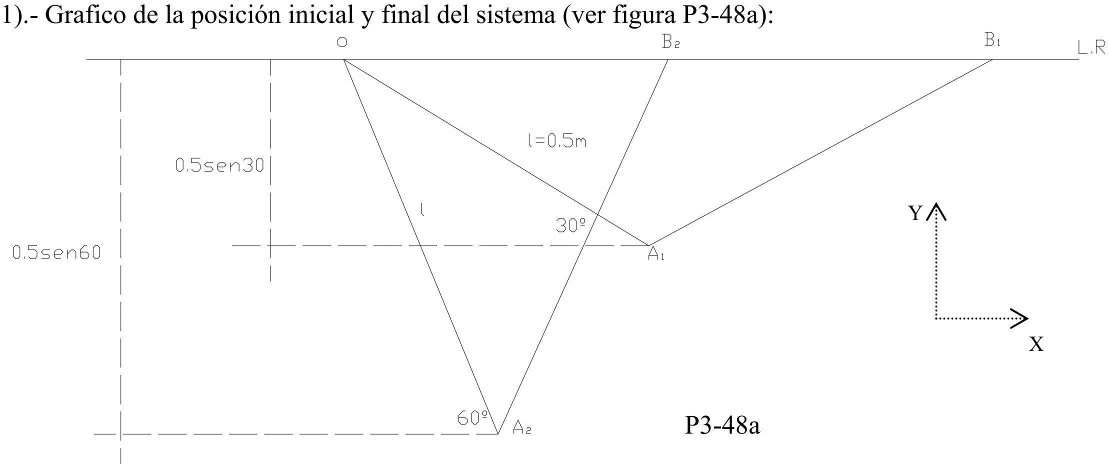


P3-48

Solución

En el sistema, la única fuerza que produce trabajo es el peso, por lo que se conserva la energía total en el sistema.

1).- Grafico de la posición inicial y final del sistema (ver figura P3-48a):



P3-48a

2).- Relaciones cinemáticas, para el estado 2 del sistema:

$$\bar{V}_{A2} = \omega_{OA}\bar{k}\ x\ \ell\left(\cos 60°\ \bar{i} - sen\ 60°\ \bar{j}\right) = \ell\ \omega_{OA}\left(sen\ 60°\ \bar{i} + \cos 60°\ \bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_{B2} = \bar{V}_{A2} + \omega_{AB}\bar{k}\ x\ \ell\left(\cos 60°\ \bar{i} + sen\ 60°\ \bar{j}\right) = \bar{V}_{A2} + \ell\ \omega_{AB}\left(-sen\ 60°\ \bar{i} + \cos 60°\ \bar{j}\right)$$

Si:

$$-V_{B2}\ \bar{i} = \ell\ \omega_{OA}\left(sen\ 60°\ \bar{i} + \cos 60°\ \bar{j}\right) + \ell\ \omega_{AB}\left(-sen 60°\ \bar{i} + \cos 60°\ \bar{j}\right)$$

Igualando componentes y operando:

$$0 = \omega_{OA}\cos 60° + \omega_{AB}\cos 60° \quad \rightarrow \quad \omega_{OA} = -\omega_{AB}$$

$$-V_{B2} = \ell\left(-\omega_{AB} sen\ 60° - \omega_{AB} sen\ 60°\right) \quad \rightarrow \quad V_{B2} = 0.866\ \omega_{AB}$$

3).- Por conservación de la energía total en el sistema:

$$E_{M1} = E_{M2}$$

$$E_{K1} = 0$$

$$U_1 = -m_A g\ \ell\ sen\ 30°$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2} m_A\left(-\ell\ \omega_{AB}\right)^2 + \frac{1}{2} m_B\left(0.866\ \omega_{AB}\right)^2$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2} * 1.5\left(0.5\ \omega_{AB}\right)^2 + \frac{1}{2} * 2\left(0.75\ \omega_{AB}\right)^2 = 0.9375\ \omega_{AB}^2$$

$$U_2 = -m_A g\ \ell\ sen\ 60°$$

Luego:

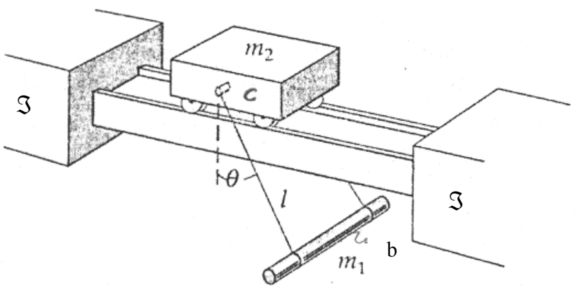
$$-m_A g\ \ell\ sen\ 30° = -m_A g\ \ell\ sen\ 60° + 0.9375\ \omega_{AB}^2$$

$$m_A g\ \ell\left(sen\ 60° - sen\ 30°\right) = 0.9375\ \omega_{AB}^2$$

$$1.5 * 9.81 * 0.5\left(sen\ 60° - sen\ 30°\right) = 0.9375\ \omega_{AB}^2 \quad \rightarrow \quad \omega_{AB} = 1.695\ \text{ rad/seg}$$

$\therefore \quad V_B = 1.4678$ m/seg y $V_A = 0.847$ m/seg

3-49.- Una barra horizontal de masa m_1 y pequeño diámetro cuelga mediante dos alambres de longitud ℓ de un carrito de masa m_2 que puede rodar sobre los dos rieles horizontales. Si el conjunto se abandona desde el reposo con los alambres formando un ángulo θ con la vertical, hallar la velocidad $V_{b/C}$ de la barra relativa al carrito y la velocidad V_C del carrito en el instante θ = 0°. Despreciar el rozamiento, tratar el carrito y a la barra como si fueran masas puntuales en el plano del movimiento vertical.

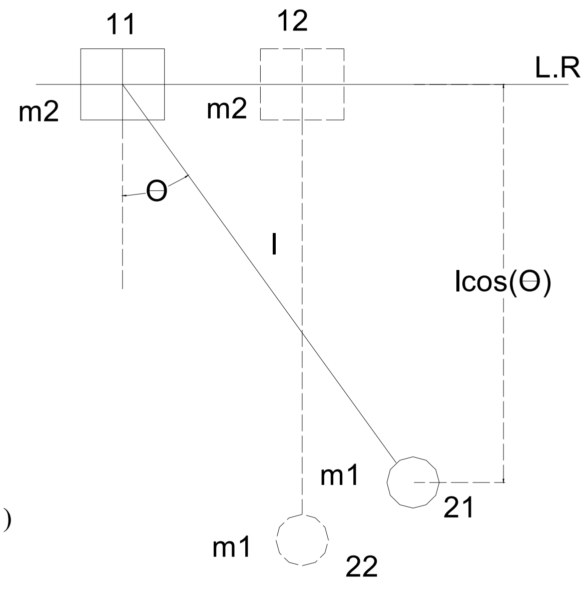


P3-49

Solución

Como no hay fuerzas resultante externas horizontales, la cantidad de movimiento lineal en esa dirección se conserva, además la única fuerza que produce trabajo es el peso la energía total (mecánica) se conserva en el sistema.

1).- Diagrama del sistema, para el estado inicial y final del sistema:



P3-49a

2).- Por conservación de la cantidad de movimiento lineal, en la dirección horizontal:

$$0 = m_2 V_C + m_1 V_b \quad \rightarrow \quad V_b = -\frac{m_2}{m_1} V_C \qquad (1)$$

Si:

$$\bar{V}_b = \bar{V}_C + \bar{V}_{b/C}$$

Para θ = 0° $\rightarrow$ $\bar{V}_b = V_C\ \bar{i} - V_{b/C}\,\bar{i}$

$$V_b = V_C - V_{b/C}$$

En (1):

$$V_C - V_{b/C} = -\frac{m_2}{m_1} V_C \quad \rightarrow \quad V_{b/C} = \frac{m_2 + m_1}{m_1} V_C \tag{2}$$

3).- Por conservación de la energía total en el sistema:

$$E_{M1} = E_{M2}$$

$$E_{K1} = 0$$

$$U_{g1} = -m_1 g\ \ell \cos\theta$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} m_1 V_b^2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(-\frac{m_2}{m_1} V_C \right)^2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)$$

$$E_{K2} = \frac{m_2}{2\, m_1} (m_1 + m_2) V_C^2$$

$$U_{g2} = -m_1 g\ \ell$$

Luego:

$$-m_1 g\ \ell \cos\theta = \frac{m_2}{2\, m_1}(m_1 + m_2) V_C^2 - m_1 g\ \ell \quad \rightarrow \quad m_1 g\ \ell\,(1 - \cos\theta) = \frac{m_2}{2\, m_1}(m_1 + m_2) V_C^2$$

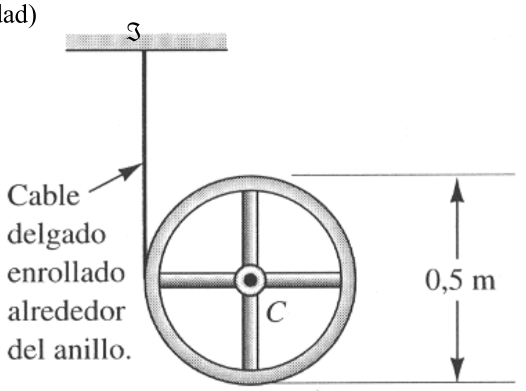
$$V_C^2 = \frac{2g\ \ell\,(1-\cos\theta)}{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} \quad \rightarrow \quad V_C = \sqrt{\frac{2g\ \ell\,(1-\cos\theta)}{\left(m_2/m_1\right)\left(1 + m_2/m_1\right)}} \quad \text{(Unid. de velocidad)}$$

Reemplazando este valor en (2):

$$V_{b/C} = \sqrt{\frac{(m_2 + m_1)^2}{m_1^2} * \frac{2g\ \ell\,(1-\cos\theta)}{\left(m_2/m_1\right)\left(1 + m_2/m_1\right)}} = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)^2\, 2g\ \ell\,(1-\cos\theta)}{m_2 (m_1 + m_2)}}$$

$$V_{b/C} = \sqrt{\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) 2\, g\, \ell\, (1-\cos\theta)} \quad \text{(Unid. de Velocidad)}$$

3-50.- Un anillo con cuatro radios, inicialmente en reposo, se suelta desde una posición vertical. El anillo y cada uno de los cuatros radios tienen un peso por unidad de longitud de 15 N/m y se considera delgadas. El alambre está enrollado alrededor del aro y es su único soporte. Hallar la velocidad del punto C después de recorrer 1.3 m, usando la teoría de los sistemas de partículas.



P3-50

Solución

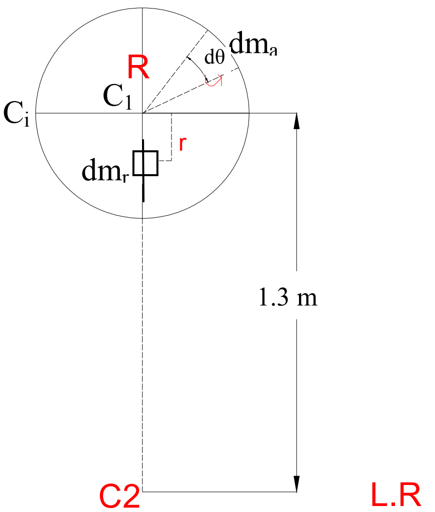
Como la única fuerza que produce trabajo es el peso, la energía total o mecánica se conserva.

1).- Relaciones cinemáticas:

a).- Velocidad del centro de masa:

$$V = \omega R$$

b).- Velocidades relativa al centro de masa de una partícula iésima en el anillo y de sus cuatro radios:



P3-50a

i).- Para del anillo:

$$\dot{\bar{\rho}}_{G\,i\,a} = \omega\,\bar{k}\ x\ \bar{\rho}_{c\,i\,a} = \omega\, R\, \bar{u}$$

$$\dot{\rho}^2_{G\,i\,a} = (\omega\, R)^2 = V^2$$

ii).- Para de los radios:

$$\dot{\bar{\rho}}_{G\,i\,r} = \omega\,\bar{k}\ x\ \bar{\rho}_{c\,i\,r} = \omega\, r\, \bar{e} \quad \rightarrow \quad \dot{\rho}^2_{G\,i\,r} = (\omega\, r)^2$$

2).- Cálculo de la energía cinética del cuerpo, para un instante cualquiera:

Si:

$$E_K = \frac{1}{2} m_t V^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\rho}^2_{G\,i} = E_{K\,G} + E_{K\,rel.\,a\,G} \quad \text{y } \gamma \text{ es el peso especifico por unidad de longitud}$$

a).- Energía cinética del centro de masa:

$$E_{K\,G} = \frac{1}{2} m_t V^2 = \frac{1}{2} * \frac{\gamma}{g} (2\pi\ R + 4\ R) V^2 = \frac{15}{9.81} (\pi * 0.25 + 2 * 0.25) V^2 = 1.965\ V^2$$

b).- Energía cinética relativa al centro de masa:

$$E_{K\,rel.aG} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\rho}_{G\,i}^2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma}{g} R\ d\theta\ (\omega\ R)^2 + 4 * \left[\frac{1}{2} \int_0^{R} \frac{\gamma}{g} dr\ (\omega\, r)^2 \right]$$

$$E_{K\,rel.a\,G} = \frac{1}{2} * \frac{\gamma}{g} R * V^2 * (2\pi) + 2 * \frac{\gamma}{g} * \frac{R^3}{3} * \frac{V^2}{R^2} = \frac{\gamma}{g} R \left(\pi + \frac{2}{3} \right) V^2$$

$$E_{K\,rel.a\,G} = \frac{15}{9.81} * 0.25 \left(\pi + \frac{2}{3} \right) V^2 = 1.456\ V^2$$

Luego:

$$E_K = (1.965 + 1.456) V^2 = 3.421\, V^2\ J$$

3).- Por conservación de la energía total en el sistema (cuerpo):

$$E_{M1} = E_{M2}$$

$$E_{K1} = 0$$

$$U_{g1} = m_t g\ h = \frac{\gamma}{g} (2\pi\ R + 4R) * g * 1.3 = 15\ (2\pi * 0.25 + 4 * 0.25) * 1.3 = 50.13\ J$$

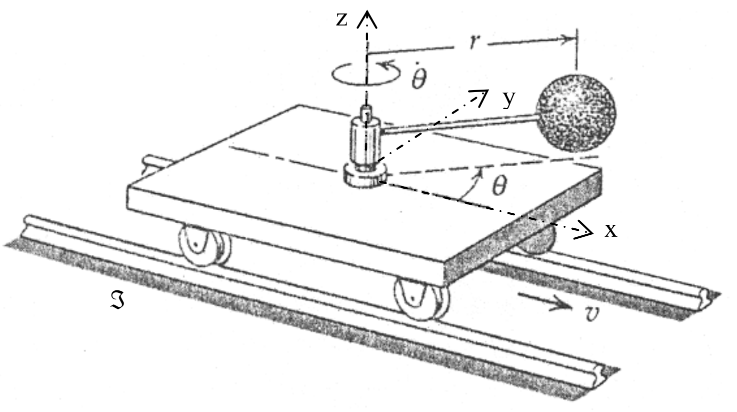
$$E_{K2} = 3.421\, V^2\ J$$

$$U_{g2} = 0$$

Luego:

$$3.421\, V^2 = 50.13 \quad \rightarrow \quad V = 3.83 \ \text{ m/seg}$$

3-51.- La pequeña vagoneta de 20 kg de masa rueda libremente por la vía horizontal transportando la esfera de 5 kg montada en la barra giratoria de masa despreciable en la que r = 0.4 m. Un accionamiento por motor con reductor de velocidad mantiene la barra a una celeridad angular constante $\dot{\theta}$ = 4 rad/seg. Si la velocidad de la vagoneta es V_o = 0.6 m/seg cuando θ = 0°, calcular el valor máximo de la velocidad $V_{máx}$ de la vagoneta y el ángulo θ correspondiente.



P3-51

Solución

No hay fuerzas resultantes en la dirección de la velocidad de la vagoneta V, luego se conserva la cantidad de movimiento en esa dirección.

1).- Relaciones cinemáticas, para un instante t cualquiera:

$$\bar{V}_{e/V} = 4\,\bar{k}\ x\ 0.4\left(\cos\theta\,\bar{i} + sen\ \theta\ \bar{j}\right) = 1.6\left(-sen\ \theta\,\bar{i} + \cos\theta\ \bar{j}\right)$$

2).- Por conservación de la cantidad de movimiento lineal:

Si: $\sum F_X = 0 \quad \rightarrow \quad L_{0X} = L_{iX}$ (constante)

$$m_V V_0 + m_e\left(V_0 + \overbrace{V_{e/VO}}^{0}\right)_X = m_V V + m_e\left(V + V_{e/V}\right)_X$$

$$20*0.6 + 5*0.6 = 20\,V + 5\,V - 5*1.6\ sen\ \theta$$

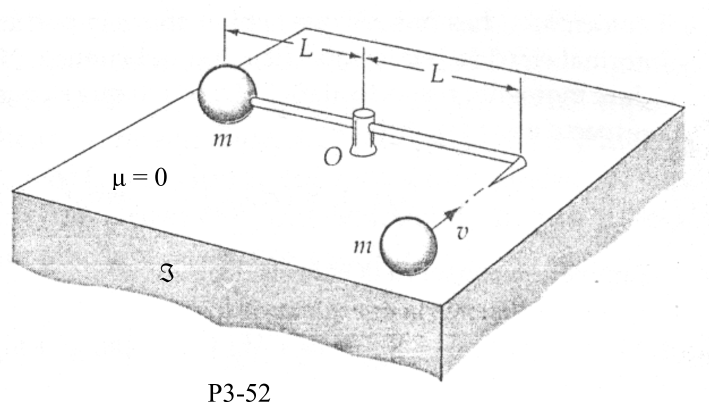
$$15 = 25\,V - 8\ sen\ \theta$$

$$V = \frac{15 + 8\ sen\ \theta}{25} \quad \text{(Unid. de velocidad)}$$

3).- Para $V_{máx}$, sen θ = 1 $\Rightarrow$ θ = 90°:

$$V_{máx} = \frac{23}{25} = 0.92 \quad \text{m/seg}$$

3-52.- La pequeña esfera de masa *m*, que se desplaza con celeridad V choca y se queda unida al extremo del dispositivo liviano inmóvil que puede girar libremente en torno a un eje vertical que pasa por O. Hallar la velocidad angular ω del conjunto después del impacto y calcular la variación ΔE que experimenta la energía del sistema.



P3-52

Solución

No hay momentos resultantes respecto al eje vertical, por lo que se conserva la cantidad de movimiento angular.

1).- Cálculo de la velocidad angular de la barra liviana, por conservación de la cantidad de movimiento angular:

$$H_{OZ1} = H_{OZ2}$$

$$m\,V\,L = 2\,m\,(\omega\,L)\,L \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{V}{2\,L} \quad \text{(Unid. de velocidad angular)}$$

3).- Cálculo de la variación de la energía ΔE, solo existe la energía cinética:

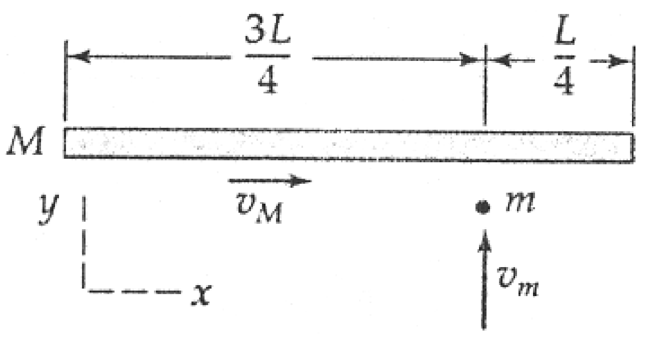
$$E_{K1} = \frac{1}{2} m\,V^2 \quad \text{y} \quad E_{K2} = 2 * \frac{1}{2} m \left(\frac{V}{2\,L} * L \right)^2 = \frac{1}{4} m\,V^2$$

Luego:

$$\Delta E = E_{K1} - E_{K2} = \frac{1}{2} m\,V^2 - \frac{1}{4} m\,V^2$$

$$\Delta E = \frac{1}{4} m\,V^2 \quad \text{(Unid. de Energía)}$$

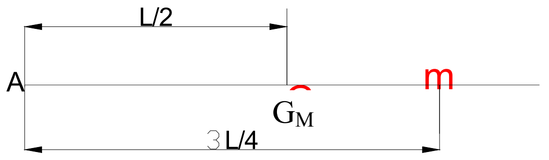
3-53.- Una barra delgada uniforme de masa M y longitud L se traslada sobre el plano horizontal liso X-Y con una velocidad V_M, cuando una partícula de masa *m* que se mueve con una velocidad V_m tal como se muestra, choca y se incrusta en ella. Hallar las velocidades lineal del centro de masa del sistema y angular de la barra con la partícula incrustada. Usando la teoría para un sistema de partículas.



P3-53

Solución

Como no hay fuerzas resultantes, las cantidades de movimiento lineal del sistema se conserva y la cantidad de movimiento angular con respecto al cualquier punto de la barra se conserva.



P3-53a

1).- Determinación del centro de masa en X, con respecto a A un instante después del choque:

$$r_{G2} = \frac{\frac{L}{2}M + \frac{3}{4}L\,m}{M+m} = \frac{L}{4}\left(\frac{2\,M + 3\,m}{M+m}\right)$$ (Unid. de longitud)

2).- Cálculo de la velocidad del centro de masa, por conservación de la cantidad de movimiento lineal:

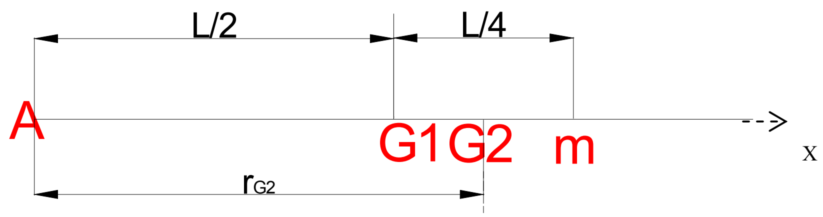
$$M\,V_M\,\bar{i} + m\,V_m\,\bar{j} = (M+m)\,\overline{V}_{G2}$$

$$\overline{V}_{G2} = \frac{M\,V_M}{M+m}\,\bar{i} + \frac{m\,V_m}{M+m}\,\bar{j}$$

$$V_{G2\,X} = \frac{M\,V_M}{M+m} \quad \text{y} \quad V_{G2\,Y} = \frac{m\,V_m}{M+m}$$

3).- Cálculo de la velocidad angular del sistema, por conservación de la cantidad de movimiento angular respecto al centro de masa sin la incrustación de m (El momento de la cantidad de movimiento lineal, es positivo en giro antihorario):

$$\left(\sum_{i=1}^{n} H_{G\,i}\right)_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} H_{G\,i}\right)_2 \qquad (1)$$



P3-53b

a).- Cálculo de la cantidad de moviendo angular de la barra, un instante después del choque:

Si: $\rho = \dfrac{M}{L} \quad \Rightarrow \quad dM = \rho\, dX$ y $\overline{H}_G = \sum_{i=1}^{n} \overline{\rho}_{G\,i} x\, m_i \dot{\overline{\rho}}_{G\,i}$

i).- Para la partícula iésima:

Si:

$$\overline{\rho}_{G\,i} = X\,\overline{i} \quad \text{y} \quad \dot{\overline{\rho}}_{G\,i} = \omega\,\overline{k}\ x\ X\,\overline{i} = \omega\,X\,\overline{j}$$

$$\overline{H}_{G\,i} = \overline{\rho}_{G\,i} x\, m_i \dot{\overline{\rho}}_{G\,i} = X\,\overline{i}\ x\ m_i \omega\,X\,\overline{j} = m_i \omega\,X^2\,\overline{k}$$

ii).- Para la barra, en la dirección perpendicular al plano:

$$H_G = \int_{-L/2}^{L/2} \omega\,X^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} \omega\,X^2 \rho\,dX = \omega\,\rho\,\frac{X^3}{3}\Bigg|_{-L/2}^{L/2} = \omega\,\rho\left(\frac{L^3/8 + L^3/8}{3}\right) = \omega\frac{M}{L}\left(\frac{L^3}{12}\right)$$

$H_G = \dfrac{1}{12} M\,L^2\,\omega$ (Unid. de cantidad de movimiento angular)

b).- En (1):

$$\frac{1}{4} L\,m\,V_m = \frac{1}{12} M\,L^2\,\omega + \frac{1}{4} L\,m\left[\frac{m\,V_m}{M+m} + \omega\left(\frac{3}{4}L - \frac{L}{4}\left(\frac{2M+3m}{M+m}\right)\right)\right]$$

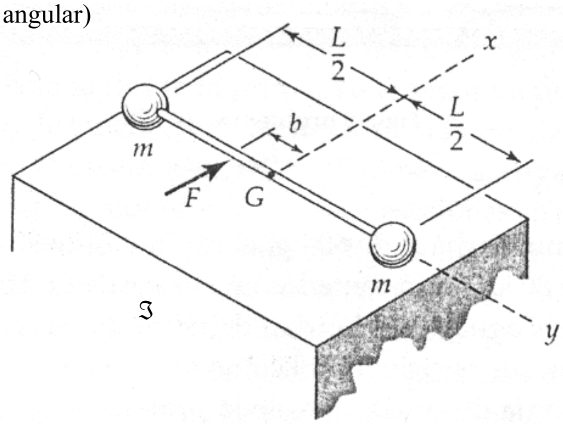
$$m\,V_m = \frac{M\,L}{3}\omega + m\left[\frac{m\,V_m}{M+m} + \frac{\omega\,L}{4}\left(\frac{M}{M+m}\right)\right]$$

$$m\,V_m\left(1-\frac{m}{M+m}\right)=\omega\,L\,M\left(\frac{4\,(M+m)+3m}{12\,(M+m)}\right)$$

$$m\,V_m\left(\frac{M}{M+m}\right)=\frac{\omega\,L\,M}{12\,(M+m)}(4\,M+7\,m)$$

$$\omega=\frac{12\,V_m}{L}\left(\frac{m}{4\,M+7\,m}\right)$$ ↺ (Unid. de velocidad angular)

3-54.- Dos bolas de acero de masa *m* cada una, están soldadas a una varilla liviana de longitud L e inicialmente reposan sobre una superficie horizontal lisa. Repentinamente se aplica a la varilla, tal como se indica, una fuerza horizontal de módulo F. Hallar: a) La aceleración instantánea del centro de masa G y b) La correspondiente variación $\dot{\theta}$ por unidad de tiempo de la velocidad angular del conjunto alrededor del centro de masa G.

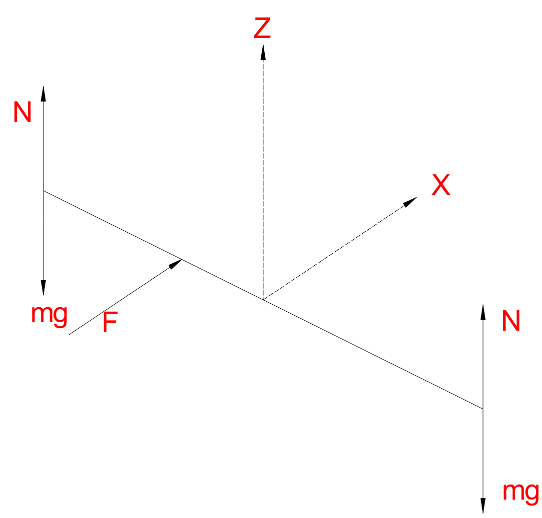


P3-54

Solución

1).- Cálculo de la aceleración del centro de masa, para el instante mostrado:

a).- D.S.F. (ver figura P3-54a):



P3-54a

b).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_Z=0\quad\rightarrow\quad 2\,N-2\,mg=0$$

$$N=mg$$

$$\sum F_X=m\,a_G\quad\rightarrow\quad F=m_t a_G$$

$$F=2\,m\,a_G$$

$$a_G=\frac{F}{2\,m}$$ (Unid. de aceleración)

Nota.- Obsérvese que el resultado depende sólo del módulo y dirección de F y no de b.

2).- Cálculo de la aceleración angular de la barra, por el principio de Momento y cantidad de movimiento angular respecto al centro de masa:

$$\overline{M}_G = \sum \dot{\overline{H}}_{G\,i}$$

Si:

$$\overline{H}_{G\,i} = \left(\overline{H}_{G\,i}\right)_r = \overline{\rho}_{G\,i} x\, m_i \dot{\overline{\rho}}_{G\,i} = \frac{L}{2}\,\bar{j}\ x\ m\left(\omega\,\bar{k}\ x\ \frac{L}{2}\,\bar{j}\right) = \frac{L^2}{4}\,m\,\omega\,\bar{k}$$

Luego:

$$\sum \overline{H}_{G\,i} = 2*\left(\frac{L^2}{4}\,m\,\omega\,\bar{k}\right) = \frac{L^2}{2}\,m\,\omega\,\bar{k} \quad \text{y} \quad \sum \dot{\overline{H}}_{G\,i} = \frac{L^2}{2}\,m\,\ddot{\theta}\,\bar{k} \qquad (1)$$

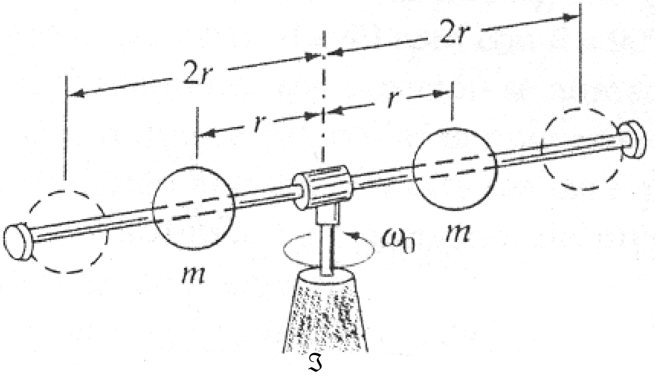
También:

$$\overline{M}_G = \bar{r}_{G\,F}\, x\ \overline{F} = -b\ \bar{j}\ x\ F\ \bar{i} = b\ F\ \bar{k} \qquad (2)$$

(1)=(2):

$$\frac{L^2}{2}\,m\,\ddot{\theta} = b\,F \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{2\,b}{m\,L^2}\,F \quad \text{(Unid. de aceleración angular)}$$

3-55.- Las dos esferas de masas iguales *m* pueden deslizarse a lo largo de la barra horizontal giratoria. Si inicialmente están trabadas a una distancia r del eje de giro, estando el conjunto girando a una velocidad ω_o, hallar la nueva velocidad angular ω después de soltar las esferas y que éstas se hayan finalmente situado en los extremos de la barra a una distancia radial 2 r. Hallar asimismo que fracción η de la energía cinética inicial se pierde. Despreciar la pequeña masa de la barra y el eje.



P3-55

Solución

El momento respecto al eje vertical del sistema, en todo instante es nulo, por lo que el impulso angular en el sistema se conserva.

1).- Cálculo de la velocidad angular, por conservación del la cantidad de movimiento angular en el sistema:

$$\left(\sum \overline{H}_{O\,i}\right)i = \left(\sum \overline{H}_{O\,i}\right)_f$$

Si:

$$\overline{H}_{o\,i} = r\,\overline{e}_r x\, m\left(\dot{r}\,\overline{e}_r + r\dot{\phi}\,\overline{e}_\phi\right) = m\,r^2\dot{\phi}\,\overline{e}_Z$$

Luego:

$$2\,m\,r^2\,\omega_0 = 2\,m\left(4\,r^2\omega\right) \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{\omega_0}{4}$$ (Unid. de velocidad angular)

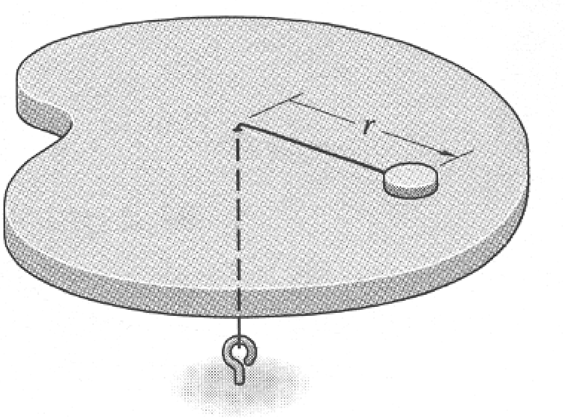
3).- Cálculo de la fracción de energía cinética que se pierde:

$$E_{K1} = 2\left[\frac{1}{2}m\left(\omega_0 * r\right)^2\right] = m\,\omega_0^2\,r^2$$

$$E_{K2} = 2\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{\omega_0}{4} * 2\,r\right)^2\right] = m\,\frac{\omega_0^{\,2}}{4}\,r^2$$

$$E_{K2} = \frac{E_{K1}}{4} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{3}{4}\,E_{K1}$$

3-56.- Un disco de 2 kg se desliza sobre una mesa horizontal lisa y está conectado a una cuerda elástica, cuya tensión es T = 6 r (N), donde r es la posición radial del disco en metros. Si le disco está en r = 1 m y se le da una velocidad inicial de 4 m/seg en la dirección transversal, ¿cuáles son las magnitudes de los componentes radial y transversal de su velocidad, cuando r = 2 m? y determine el valor máximo de r alcanzado por el disco.



P3-56

Solución

Como no hay fuerzas que produce momento respecto al agujero, la cantidad de movimiento angular se conserva respecto a dicho agujero.

1).- Cálculo de la velocidad transversal, por conservación de la cantidad de movimiento angular:

$$H_{OZ\,1} = r_1\ m\ V_{\theta\,1} = 1*2*4 = 8 \quad \text{(kg m}^2\text{/seg) ó (N-m seg)}$$

$$H_{0Z\,2} = r_2\ m\ V_{\theta\,2} = 2*2*V_{\theta\,2} = 4\ V_{\theta\,2} \quad \text{(kg m}^2\text{/seg)}$$

$$H_{OZ\ r\ máx} = r_{máx} m\ V_{\theta\ r\ máx} = 2\ r_{máx} V_{\theta\ r\ máx} \quad \text{(kg m}^2\text{/seg)}$$

Luego:

$$8 = 4\ V_{\theta\,2} \quad \rightarrow \quad V_{\theta\,2} = 2 \quad \text{m/seg}$$

$$8 = 2\ r_{máx} V_{\theta\ r\ máx} \quad \rightarrow \quad V_{\theta\ r\ máx} = \frac{4}{r_{máx}} \quad \text{m/seg}$$

2).- Cálculo de la velocidad radial y el radio máximo, por el principio de trabajo y energía cinética:

a).- $W_{1-2} = \Delta E_K$

$$-\int_1^2 6\ r\ dr = \frac{1}{2}*2\left[\left(4 + V_{\rho\,2}^2 - 16\right)\right] = V_{\rho\,2}^2 - 12$$

$$-3\ r^2\Big|_1^2 = V_{\rho\,2}^2 - 12 \quad \rightarrow \quad -3\,(4-1) = V_{\rho\,2}^2 - 12 \quad \rightarrow \quad V_{\rho\,2}^2 = 3$$

$$V_{\rho\,2} = 1.723 \quad \text{m/seg} \quad \rightarrow \quad \left|\overline{V}_2\right| = 2.645 \quad \text{m/seg}$$

b).- $W_{1-r\ máx} = \Delta E_K$, en donde $V_{\rho\ r\ máx} = 0$:

$$-\int_1^{r\ máx} 6\ r\ dr = \frac{1}{2}*2\left(\frac{16}{r_{\max}^2} - 16\right) = 16\left(\frac{1 - r_{máx}^2}{r_{máx}^2}\right)$$

$$-3\left(r_{máx}^2 - 1\right) = 16\left(\frac{1 - r_{máx}^2}{r_{máx}^2}\right) \quad \rightarrow \quad 3\ r_{máx}^4 - 3\ r_{máx}^2 = 16\ r_{máx}^2 - 16$$

Si: $X = r_{máx}^2$

$$X^2 - \frac{19}{3}X + \frac{16}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad X^2 - 6.333\,X + 5.333 = 0$$

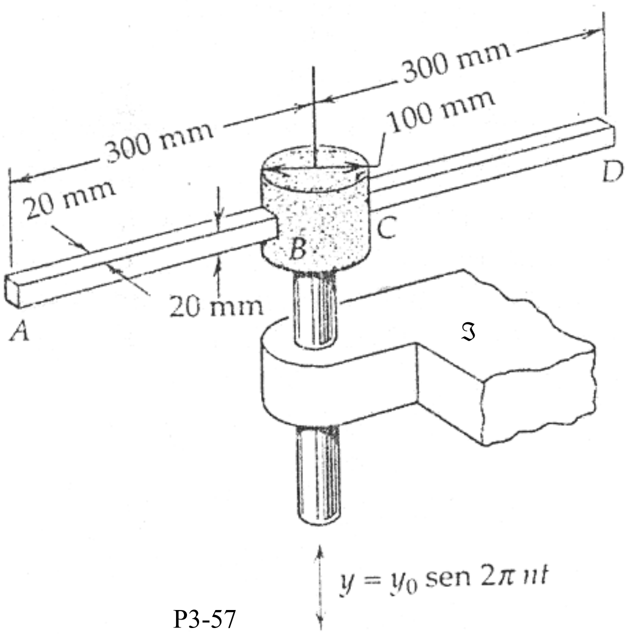
$$X = \frac{6.333 \pm \sqrt{6.333^2 - 4 * 5.333}}{2} = \frac{6.333 \pm 4.333}{2}$$

$X = 5.333$ m^2 (el único valor valido)

Luego:

$$r_{máx} = \sqrt{X} = 2.309 \cong 2.31 \text{ m}$$

3-57.- La barra uniforme de acero (ρ = 7 830 kg/m^3) AD está rígidamente unida al vaso, que recibe una aceleración armónica tal como se indica. Despreciando el peso de las barras comparado con otras fuerzas cortantes actuantes, hallar el momento flector máximo M que se induce en la barra durante su oscilación vertical para una amplitud y_o = 3 mm y una frecuencia n = 6 ciclos por segundo.

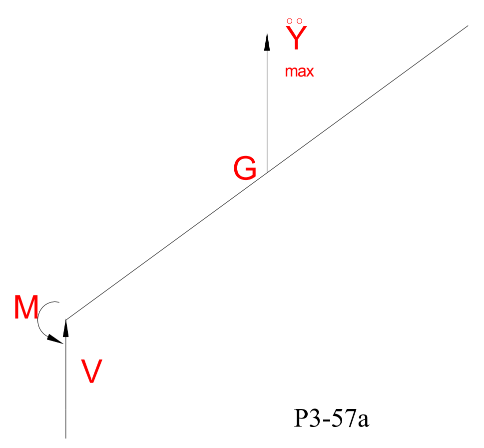


P3-57

Solución

Los cuerpos están en movimiento de traslación.
1).- D.C.L. de CD:

$$m_{CD} = 7\,830 * 0.2^2 * 0.25 = 78.30 \text{ kg}$$



P3-57a

2).- Relaciones cinemáticas:

$$y = \pm\, y_0 sen\; 2\pi\; n\; t$$

$$\dot{y} = \pm\, 2\pi\; n\; y_0 \cos 2\pi\; n\; t$$

$$\ddot{y} = \mp\, 4\pi^2 n^2 y_0 sen\; 2\pi\; n\; t$$

Para $\ddot{y}_{máx}$, se da si $sen\ 2\pi\ n\ t = 1$, luego:

$$\ddot{y}_{máx} = \mp 4\pi^2 * 6^2 * 0.003 = \mp 4.264 \quad \text{m/seg}^2$$

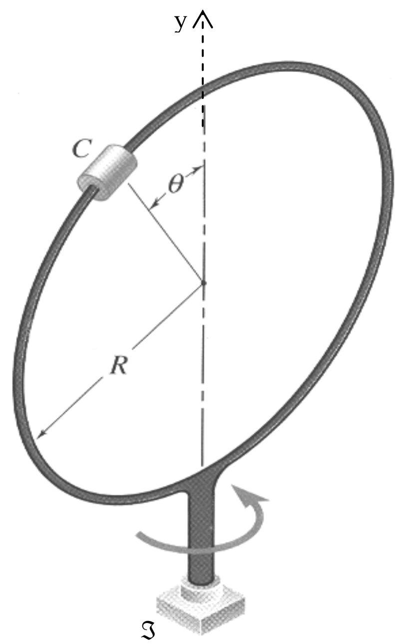
3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_y = m\ \ddot{y}_{máx} \quad \rightarrow \quad V = 78.3 * 4.264 = 333.87 \quad \text{Newton}$$

$$\sum M_G = 0 \quad \rightarrow \quad M - V * 0.125 = 0 \quad \rightarrow \quad M = 333.9 * 0.125$$

$$M = 41.734 \quad \text{N-m}$$

3-58.- Un collarín C de 2 kg puede deslizar libremente por un aro delgado de masa 3 kg y radio 250 mm. El aro está soldado a un árbol vertical corto, que puede girar libremente en un cojinete fijo. Inicialmente el anillo posee una velocidad angular de 35 rad/seg y el collarín está en la cima del anillo (θ = 0°) cuando recibe un golpe muy leve. Despreciando el rozamiento y analizando al aro como un sistema de partículas, hallar: a) La cantidad de movimiento angular respecto al punto O $(\overline{H}_O)$, para una velocidad angular ω cualquiera, respecto al eje vertical, b) La energía cinética del aro, para una velocidad angular ω cualquiera, respecto al eje vertical; c) La velocidad angular del anillo cuando el collarín, pasa por la posición θ = 90°, y d) La correspondiente velocidad del collarín relativa al anillo.

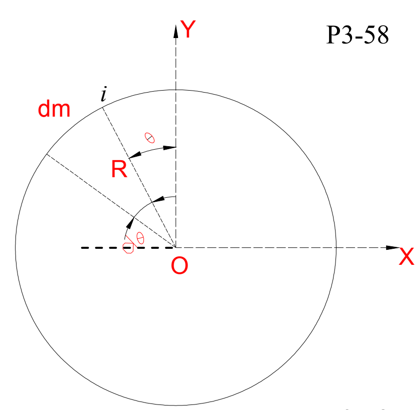


P3-58

Solución

1).- Cálculo de la cantidad de movimiento angular del aro:

a).- Determinación de la masa diferencial:
Sea ρ la densidad lineal



P3-58a

$$\rho = \frac{m}{2\pi\ R} \quad \rightarrow \quad dm = \rho\ ds = \rho\ R\ d\theta$$

$$dm = \frac{m}{2\pi} d\theta$$

b).- Cálculo de la cantidad de movimiento angular, para la partícula iésima:

Si:

$$\bar{V}_i = \omega\ \bar{j}\ x\ \bar{r}_{O\,i} = \omega\ \bar{j}\ x\ R\left(-sen\ \theta\ \bar{i} + \cos\theta\ \bar{j}\right) = \omega\ R\ sen\ \theta\ \bar{k} \qquad (1)$$

$$\bar{H}_{O\,i} = \bar{r}_{O\,i} x\ m_i \bar{V}_i = R\left(-sen\ \theta\ \bar{i} + \cos\theta\ \bar{j}\right) x\ m_i \omega\ r\ sen\ \theta\ \bar{k}$$

$$\bar{H}_{O\,i} = m_i R^2 \omega\left(\cos\theta\ sen\theta\ \bar{i} + sen^2\theta\ \bar{j}\right)$$

c).- Cálculo de la cantidad de movimiento angular del aro:

$$\bar{H}_O = \int_0^{2\pi} R^2 \omega\left(\cos\theta\ sen\theta\ \bar{i} + sen^2\theta\ \bar{j}\right)\frac{m}{2\pi}\,d\theta$$

$$\bar{H}_O = \frac{m\ R^2}{2\pi}\,\omega\left[\left(\frac{sen^2\theta}{2}\right)\bar{i}\ \Bigg|_0^{2\pi} + \left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4} sen\ 2\ \theta\right)\bar{j}\ \Bigg|_0^{2\pi}\right]$$

$$\bar{H}_O = \frac{m\ R^2}{2\pi}\,\omega\left(\frac{2\pi}{2}\right)\bar{j} = \frac{m\ R^2}{2}\,\omega\ \bar{j} = \frac{3 * 0.25^2}{2}\,\omega\ \bar{j} = 0.094\ \omega\ \bar{j}\quad (\text{kg-m}^2/\text{seg})$$

2).- Cálculo de la energía cinética del aro:

De (1):

$$V_i^2 = \left(\omega\ R\ sen^2\theta\right)^2 = \left(\omega\ R\right)^2 sen^2\theta$$

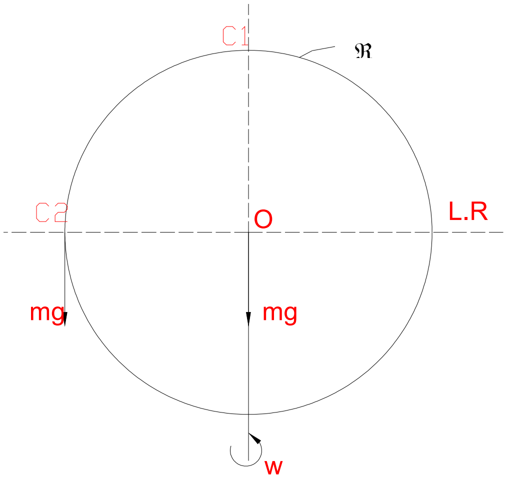
Luego:

$$E_K = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2} m_i V_i^2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{m}{2\pi}\,d\theta * \left(\omega\ R\right)^2 sen^2\theta = \frac{1}{2} * \frac{m\ R^2}{2} * \frac{\omega^2}{\pi}\int_0^{2\pi} sen^2\theta\ d\theta$$

$$E_K = \frac{1}{2} * \frac{m\ R^2}{2} * \frac{\omega^2}{\pi}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{sen\ 2\ \theta}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} * \frac{m\ R^2}{2}\ \frac{\omega^2}{\pi}\left(\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$E_K = \frac{1}{2} * \frac{m\ R^2}{2}\,\omega^2\ J$$

3).- Como no hay fuerzas que producen momentos respecto al eje vertical en el sistema, por lo que se conserva la cantidad de movimiento angular en el sistema; además la única fuerza que produce trabajo es el peso, por lo que se conserva la energía total (mecánica) en el sistema.



P3-58b

a).- Cálculo de la velocidad del Collarín C en el estado 2:

$$\bar{V}_{C2} = \omega_2 \bar{j} \; x \left(- R \; \bar{i}\right) - V_{C/\Re} \bar{j}$$

$$\bar{V}_{C2} = 0.25 \; \omega_2 \bar{k} - V_{C/\Re} \bar{j}$$

b).- Por conservación de la energía total en el sistema:

$$E_{M1} = E_{M2}$$

$$E_{K1} = \frac{1}{2} * \frac{m \; R^2}{2} \omega_1^2 = \frac{1}{2} * \frac{3 * 0.25^2}{2} * 35^2$$

$$E_{K1} = 57.422 \; J$$

$$U_1 = m_C g \; R = 2 * 9.81 * 0.25 = 4.905 \; J$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2} m_C V_{C2}^2 + \frac{1}{2} * \frac{m \; R^2}{2} \omega_2^2 = \frac{1}{2} * 2 * \left[(0.25 \; \omega_2)^2 + V_{C/\Re}^2 \right] + \frac{1}{2} * \frac{3 * 0.25^2}{2} \omega_2^2$$

$$E_{K2} = 0.1095 \; \omega_2^2 + V_{C/\Re}^2 \; J$$

$$U_2 = 0$$

Luego:

$$0.1095 \; \omega_2^2 + V_{C/\Re}^2 = 57.422 + 4.905 = 62.35 \; J \qquad (2)$$

c).- Por conservación de la cantidad de movimiento angular en el sistema, respecto al eje vertical:

$$H_{OY1} = H_{OY2}$$

$$H_{OY1} = 0.094\ \omega_1 = 0.094 * 35 = 3.29 \quad \text{kg-m}^2\text{/seg}$$

$$H_{OY2}\,\bar{j} = \overbrace{\left(-0.25\ \bar{i}\right) x\ 2\left(0.25\ \omega_2 \bar{k}\right)}^{componente \quad en \quad y} + 0.094\ \omega_2\,\bar{j} = \left(0.125\ \omega_2 + 0.094\ \omega_2\right)\bar{j}$$

$$H_{OY2} = 0.125\ \omega_2 + 0.094\ \omega_2 = 0.219\ \omega_2$$

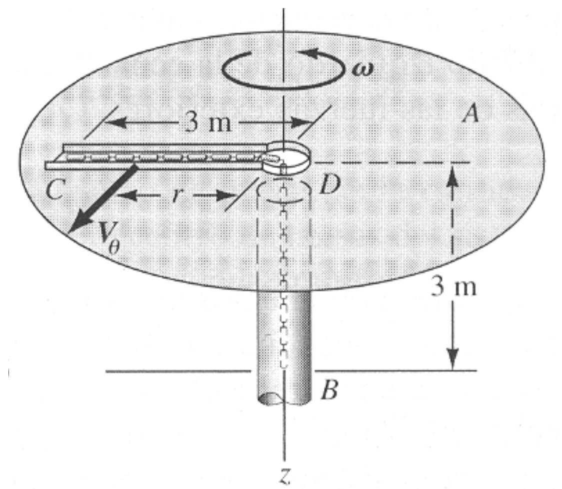
Luego:

$$3.29 = 0.219\ \omega_2 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = 15.023 \cong 15 \quad \text{rad/seg}$$

En (2):

$$0.1095 * 15^2 + V^2_{C/\Re} = 62.35 \quad \rightarrow \quad V_{C/\Re} = 6.139 \cong 6.14 \quad \text{m/seg}$$

3-59.- Una pesada cadena de 6 m de longitud descansa sobre una plataforma ligera A que está girando libremente con una velocidad angular de ω = 1 rad/seg (ver figura). Un canal C actúa como guía para el movimiento de la cadena sobre la plataforma, y un tubo estacionario actúa como guía para la cadena por debajo de la placa. ¿Cuál será la velocidad de la cadena a lo largo del canal y hacia abajo a través del tubo, después de que se haya movido 1.5 m, partiendo del reposo respecto a la plataforma? Desestimar el rozamiento, la cantidad de movimiento angular de la plataforma y la cantidad de movimiento angular de la parte vertical de la cadena respecto a su propio eje. La masa de la cadena por unidad de longitud, *m*, es de 15 kg/m.



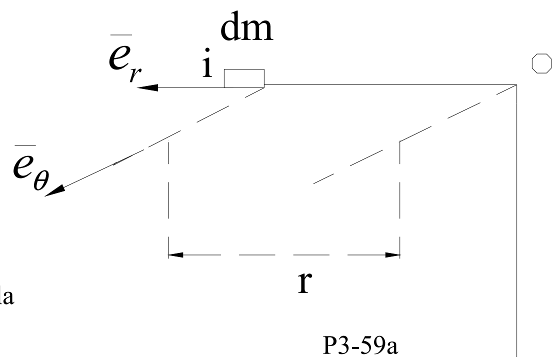
P3-59

Solución

Para el sistema cadena, el momento con respecto al eje vertical es siempre nulo, además la única fuerza que produce trabajo es el peso, por lo que se conservan la cantidad de movimiento angular respecto al eje vertical y la energía total (mecánica).

1).- Cálculo de la velocidad angular en el estado 2, por conservación de la cantidad de movimiento:

$$\left(H_{OZ}\right)_1 = \left(H_{OZ}\right)_2$$



P3-59a

a).- Cálculo de la cantidad de movimiento angular para una partícula iésima de la cadena:

$$\overline{H}_{O\,i} = r\,\bar{e}_r x\; m_i\left(\dot{r}\,\bar{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\bar{e}_\theta\right)$$

$$\overline{H}_{O\,i} = m_i r^2\dot{\theta}\,\bar{e}_Z = m_i r\,V_\theta \bar{e}_Z$$

La cantidad de movimiento solo lo produce la velocidad transversal.

b).- Para el sistema de partículas cadena, en los dos estados:

$$\left(H_{OZ}\right)_1 = \int_0^3 r^2\;\omega\left(m\;dr\right) = m\;\omega\int_0^3 r^2\;dr$$

$$\left(H_{OZ}\right)_1 = m*1*\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^3 = 9\;m$$

$$\left(H_{OZ}\right)_2 = \int_0^{1.5} r^2\omega_2\left(m\;dr\right) = m\;\omega_2\int_0^{1.5} r^2 dr$$

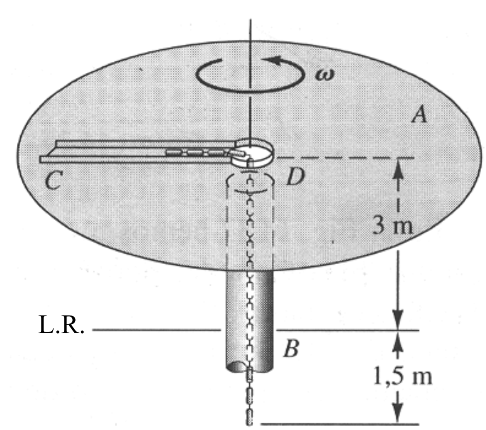
$$\left(H_{OZ}\right)_2 = m\;\omega_2\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{1.5} = \frac{1.5^3}{3}m\;\omega_2$$

$$9\;m = \frac{1.5^2}{2}m\;\omega_2 \quad\rightarrow\quad \omega_2 = 8\;\text{ rad/seg}$$

2).- Cálculo de la velocidad de la cadena a lo largo del canal y del tubo, por conservación de la energía total:

$$E_{M1} = E_{M2}$$

a).- Figura del estado 1 y 2 del sistema (ver figura P3-59b):



P3-59b

b) Cálculo de las energías correspondientes:

$$U_1 = \left(m*3\right)g*3 + \left(m*3\right)g*1.5 = 1986.53\;\text{ N-m}$$

$$E_{K1} = \frac{1}{2}\left(\int_0^{m_{11}} \overbrace{V_{\rho 1}^2}^{0}\, dm + \int_0^{m_{11}} V_\theta^2 dm\right) + \frac{1}{2}\int_0^{m_{12}} \overbrace{V_{\rho 1}^2}^{0} = \frac{1}{2}\int_0^3 (\omega\, r)^2\, m\, dr = \frac{1}{2}\,\omega^2 m\, \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^3$$

$$E_{K1} = \frac{1}{2} * 1^2 * 15 * 3^2 = 67.5 \text{ N-m}$$

$$U_2 = g\,(m * 1.5) * 3 + g\,(m * 4.5) * 0.75 = 1158.8 \text{ N-m}$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2}(m * 1.5)\, V_{\rho 2}^2 + \frac{1}{2}\int_0^{1.5} (\omega_2 r)^2\, m\, dr + \frac{1}{2}(m * 4.5)\, V_{\rho 2}^2$$

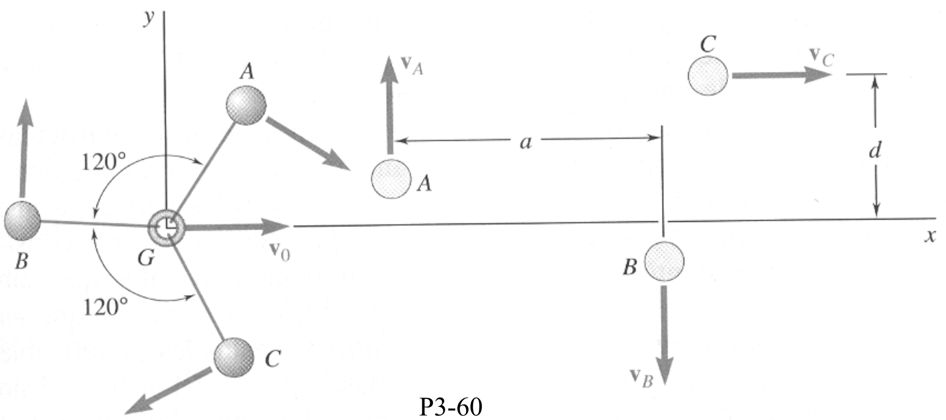
$$E_{K2} = 45\, V_{\rho 2}^2 + \frac{1}{2} * 8^2 * \frac{1.5^3}{3} * 15 = 45\, V_{\rho 2}^2 + 540$$

Luego:

$$1986.53 + 67.5 = 1158.8 + 45\, V_{\rho 2}^2 + 540 \quad \rightarrow \quad V_{\rho 2}^2 = 7.894$$

$V_{\rho 2} = 2.81$ m/seg (Velocidad de la cadena para el estado 2)

3-60.- Tres pequeñas esferas iguales A, B y C, que pueden deslizar por una superficie horizontal lisa, están sujetas tanto hilos de 200 mm de longitud, los cuales están atados a un anillo G. Inicialmente las esferas rotan en sentido horario alrededor del anillo con una velocidad relativa de 0.8 m/seg y el anillo se mueve sobre el eje x con una velocidad $\bar{V}_0 = 0.4\,\bar{i}$ (m/seg). De repente se rompe el anillo y las tres esferas se mueven libremente en el plano xy con A y B siguiendo sendas trayectorias paralelas al eje y separadas una distancia mutua a = 346 mm, mientras que C sigue una trayectoria paralela al eje x. Hallar: a) La velocidad de cada esfera y b) La distancia d.



P3-60

Solución

Como no hay fuerzas externas resultantes en el sistema, se conservan: la cantidad de movimiento lineal, la cantidad de movimiento angular respecto a O y la energía cinética.

1).- Por conservación de la cantidad de movimiento lineal:

$$\left(\sum m_i \bar{V}_i\right)i = \left(\sum m_i \bar{V}_i\right)_f$$

$$\left(\sum m_i \bar{V}_i\right)_i = m\left[0.4\,\bar{i} + 0.8\begin{pmatrix} sen\,60°\bar{i} - \\ \cos 60°\,\bar{j} \end{pmatrix} + 0.4\,\bar{i} + 0.8\bar{j} + 0.4\,\bar{i} + 0.8\begin{pmatrix} -sen\,60°\bar{i} - \\ \cos 60°\,\bar{j} \end{pmatrix}\right]$$

$$\left(\sum m_i \bar{V}_i\right)_i = 1.2\,m\,\bar{i} \qquad (1)$$

$$\left(\sum m_i \bar{V}_i\right)_f = m\left[V_A\bar{j} - V_B\bar{j} + V_C\,\bar{i}\right] = m\,V_C\,\bar{i} + m\,(V_A - V_B)\,\bar{j} \qquad (2)$$

(1)=(2) e igualando componentes:

$V_C = 1.2$ m/seg

$V_A = V_B$

2).- Por conservación de la cantidad de movimiento en el sistema:

$$\left(\sum \bar{H}_{0\,i}\right)_i = \left(\sum \bar{H}_{0\,i}\right)_f$$

$$\left(\sum \bar{H}_{0\,i}\right)_i = m\left\{\begin{array}{l} 0.2\begin{pmatrix} \cos 60°\bar{i} + \\ sen\,60°\,\bar{j} \end{pmatrix} x \left[0.4\,\bar{i} + 0.8\begin{pmatrix} sen\,60°\bar{i} - \\ \cos 60°\,\bar{j} \end{pmatrix}\right] - 0.2\,\bar{i}\;x\,\left(0.4\,\bar{i} + 0.8\,\bar{j}\right) + \\ 0.2\,\left(\cos 60°\bar{i} - sen\,60°\,\bar{j}\right) x \left[0.4\,\bar{i} + 0.8\,\left(-sen\,60°\bar{i} - \cos 60°\,\bar{j}\right)\right] \end{array}\right\}$$

$$\left(\sum \bar{H}_{0\,i}\right)_i = -0.48\,m\,\bar{k} \qquad (3)$$

$$\left(\sum \bar{H}_{0\,i}\right)_f = m\left[b\,\bar{i}\;x\,V_A\bar{j} + (b + 0.346)\,\bar{i}\;x\,\left(-V_B\,\bar{j}\right) + d\;\bar{j}\;x\,1.2\,\bar{i}\right]$$

$$\left(\sum \bar{H}_{0\,i}\right)_f = -m\,(0.346\,V_A + 1.2\,d)\,\bar{k} \qquad (4)$$

(3)=(4):

$$-0.48\,m = -m\left(0.346\,V_A + 1.2\,d\right) \quad \rightarrow \quad 0.346\,V_A + 1.2\,d = 0.48 \qquad (5)$$

3).- Por conservación de la energía cinética en el sistema:

$$\left(\frac{1}{2}m_t V_G^2 + \frac{1}{2}\sum m_i\, V_{i/G}^2\right)_i = \left(\frac{1}{2}\sum m_i\, V_i^2\right)_f$$

Remplazando valores y eliminando "½m" de ambos miembros:

$$3*0.4^2 + 3*0.8^2 = 2\,V_A^2 + 1.2^2 \quad \rightarrow \quad V_A = V_B = \sqrt{\frac{0.96}{2}} = 0.693 \cong 0.7 \quad \text{m/seg}$$

En (5):

$$0.346*0.7 + 1.2\,d = 0.48 \quad \rightarrow \quad d = 0.1982 \cong 0.2 \ \text{m}$$

Luego:

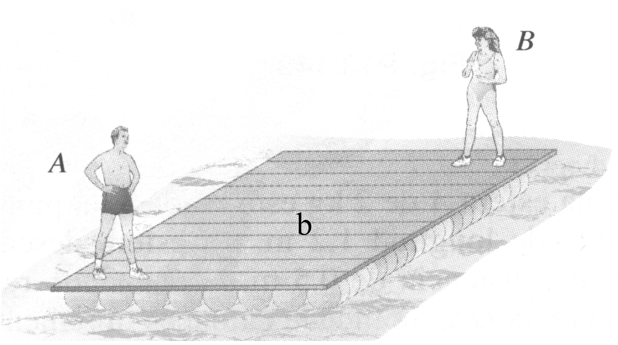
$\overline{V}_A = 0.7\,\bar{j}$ (m/seg) ,

$\overline{V}_B = -0.7\,\bar{j}$ (m/seg) ,

$\overline{V}_C = 1.2\,\bar{i}$ (m/seg) y

$d = 200$ mm

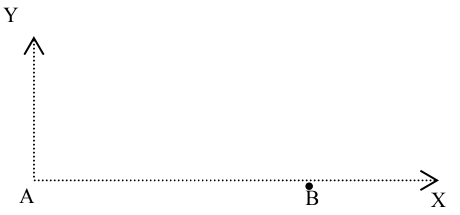
3-61.- Dos nadadores A y B de masas respectivas 85 kg y 55 kg, están en dos esquinas diagonalmente opuestas de una balsa, cuando se dan cuenta de que está se ha desprendido del ancla. Al instante el nadador A se pone a caminar hacia B con una velocidad de 0.6 m/seg respecto a la balsa. Sabiendo que la misma tiene una masa de 135 kg, hallar: a) la velocidad de la balsa si B no se mueve y b) la velocidad con que B debe caminar hacia A para que la balsa no se mueva. Despreciar el rozamiento entre el bote y el agua.



P3-61

Solución

Como no hay fuerzas externas en la dirección horizontal en el sistema, se conserva la cantidad de movimiento lineal en dicha dirección.



P3-61a

1).- Cálculo de la velocidad de la balsa, si B no se mueva respecto a la balsa:

$$\left(\sum m_i \dot{X}_i\right)_i = \left(\sum m_i \dot{X}_i\right)_f$$

$$0 = m_A\left(V_A - V_b\right) - \left(m_B + m_b\right)V_b$$

$$m_A V_A = \left(m_A + m_B + m_b\right)V_b \quad \rightarrow \quad V_b = \frac{m_A}{\left(m_A + m_B + m_b\right)}V_A$$

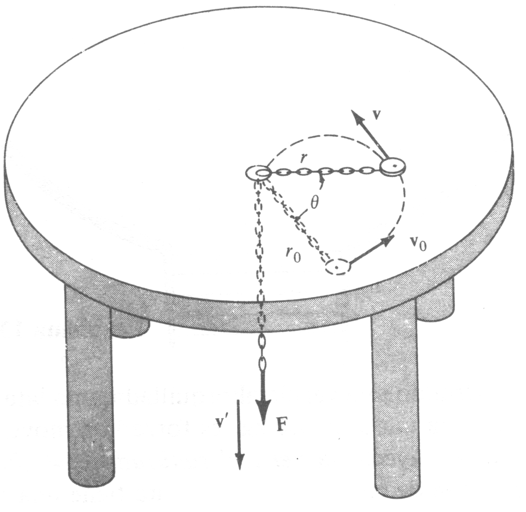
$$V_A = \frac{85}{\left(85 + 55 + 135\right)} * 0.6 \quad \rightarrow \quad V_A = 0.18546 \text{ m/seg}$$

2).- Cálculo de la velocidad de B; si la balsa no se mueve:

$$0 = m_A V_A - m_B V_B \quad \rightarrow \quad V_B = \frac{m_A}{m_B}V_A = \frac{85}{55} * 0.6$$

$$V_B = 0.9273 \text{ m/seg}$$

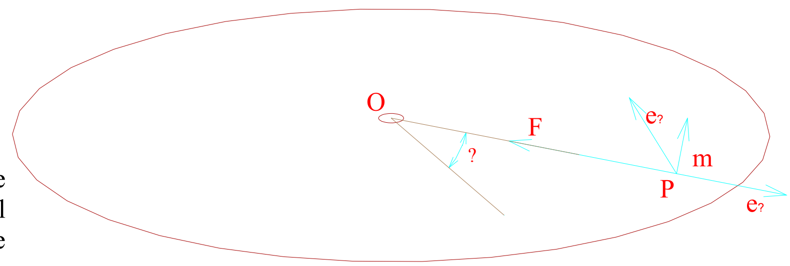
3-62.-Una cadena está unida a un pequeño disco de 0.5 lb que se apoya sobre la mesa lisa. Si al disco se le da una velocidad inicial V_0 = 2 pie/seg, perpendicular a la cadena cuando θ = 0º y r_0 = 1.5 pies, y la cadena se baja hacia abajo a través de un pequeño agujero situado en el centro de la mesa, con una velocidad constante, determinar la velocidad angular $\dot{\theta}$ de la cadena y la fuerza F en el instante en que r = 0.5 pies.



P3-62

Solución

1).- D.C.L. (ver figura P3-62a):



P3-62a

Como no hay fuerzas que producen momentos respecto al agujero central. La cantidad de movimiento se conserva.

2).- Relaciones cinemáticas.- Identificación de los parámetros que definen el movimiento en coordenadas polares y cálculo de la aceleración del disco:

$$\left|\begin{array}{l} \rho = r \\ \dot{\rho} = V_\rho (cte) \\ \ddot{\rho} = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \dot{\theta} = ? \\ \\ \ddot{\theta} = ? \end{array}\Bigg| \quad \text{y} \quad \bar{a}_P = -\rho\,\dot{\theta}^2\,\bar{e}_\rho + \left(2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\right)\bar{e}_\theta$$

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_\rho = -m\,\rho\,\dot{\theta}^2 \quad \rightarrow \quad -F = -m\,\rho\,\dot{\theta}^2 \quad \rightarrow \quad F = m\,\rho\,\dot{\theta}^2 \qquad (1)$$

$$\sum F_\theta = m\left(2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\right) \quad \rightarrow \quad 0 = m\left(2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\right) \quad \rightarrow \quad 2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho^2\,\dot{\theta}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \rho^2\,\dot{\theta} \Rightarrow \text{Constante}$$

Luego: $\rho_1^2\,\dot{\theta}_1 = \rho_2^2\,\dot{\theta}_2 \quad \rightarrow \quad \rho_1\,V_{\theta 1} = \rho_2\dot{\theta}_2 \quad \rightarrow \quad \dot{\theta}_2 = \dfrac{\rho_1}{\rho_2^2}V_{\theta 1}$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{1.5}{0.5^2} * 2 = 12 \ \text{rad/seg}$$

En (1):

$$F = \frac{0.5}{32.2} * 0.5 * 12^2 = 1.12 \ \text{lb}$$

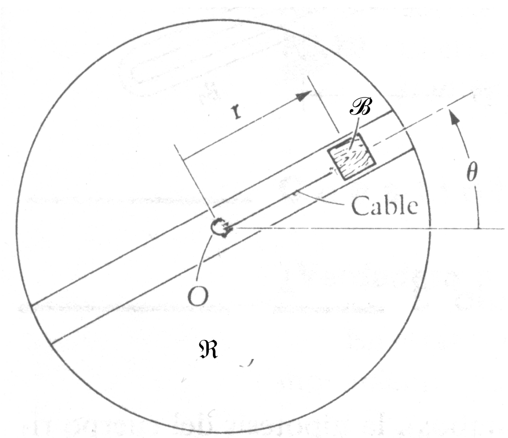
3).- También se puede encontrar la velocidad angular en 2, por conservación de la cantidad de movimiento:

$$H_{OZ1} = H_{OZ2}$$

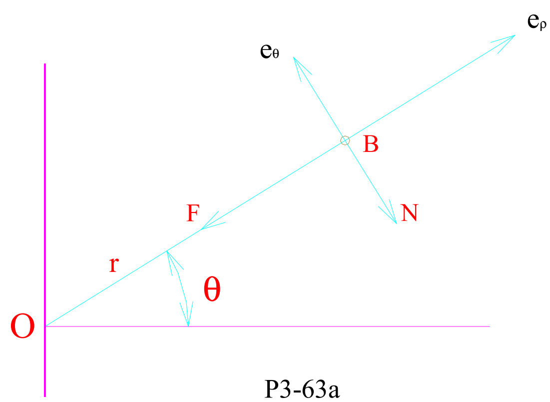
$$1.5 * m * V_{\theta 1} = 0.5 * m * V_{\theta 2} \quad \rightarrow \quad 1.5 * 2 = 0.5\, V_{\theta 2}$$

$$V_{\theta 2} = 6 = \rho_2\, \dot{\theta}_2 \quad \rightarrow \quad \dot{\theta}_2 = \frac{6}{0.5} = 12 \ \text{ rad/seg}$$

3-63.- Una tornamesa circular $\Re$ (ver figura) gira alrededor de un eje vertical que pasa por O (normal al plano de la pagina) con θ variando con razón constante ω_0. Un bloque $\mathscr{B}$ descansa en una ranura lisa del tornamesa. Si se tira el cordón con una velocidad constante *v* relativa a $\Re$, encuentre la expresión en función de r, de la fuerza que está produciendo dicha velocidad constante. Si la masa del bloque es *m*.



P3-63



P3-63a

Solución

1).- D.C.L. y orientación de los vectores unitarios de las coordenadas polares (más conveniente en este caso), ver figura P3-63a:

2).- Relaciones cinemáticas:

a).- Identificación de los parámetros que definen el movimiento

$$\left| \begin{array}{l} \rho = r \\ \dot{\rho} = -v \\ \ddot{\rho} = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \dot{\theta} = \omega_0 \\ \\ \ddot{\theta} = 0 \end{array} \right|$$

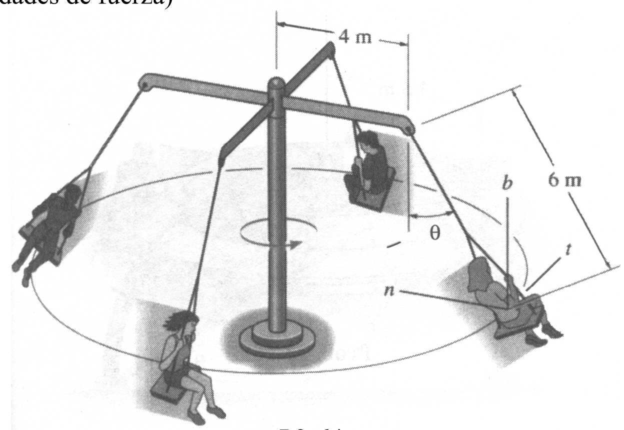
b).- Cálculo de la aceleración para un r cualquiera:

$$\bar{a}_B = -\rho\, \dot{\theta}^2\, \bar{e}_\rho + 2\, \dot{\rho}\, \dot{\theta}\, \bar{e}_\theta = -r\, \omega_0^2\, \bar{e}_\rho - 2\, v\, \omega_0\, \bar{e}_\theta \ \text{(Unidades de aceleración angular)}$$

3).- Relaciones cinéticas.- En la dirección radial:

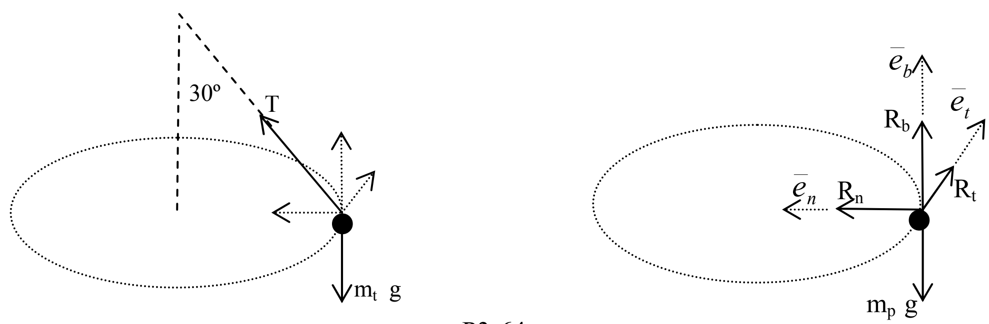
$$-F = m\,(-r\,\omega_0^2) \quad \rightarrow \quad F = m\,r\,\omega_0^2$$ (Unidades de fuerza)

3-64.- Determine la rapidez constante de los pasajeros en el juego en el parque de diversiones, si se observa que los cables de soporte se dirigen con θ = 30º con respecto a la vertical. Suponiendo que cada silla tiene una masa de 30 kg, y cada pasajero tiene una masa de 50 kg. ¿Cuáles son las componentes de las fuerzas en las direcciones normal n ($\bar{e}_n$), tangencial t ($\bar{e}_t$) y binormal b ($\bar{e}_b$) que la silla ejerce sobre un pasajero durante el movimiento?



P3-64

1).- D.S.F. (Silla y pasajero) y D.C.L. del pasajero:



P3-64a

(a) (b)

2).- Relaciones cinéticas:

a).- Para (a):

$$\sum F_b = 0 \quad \rightarrow \quad T\cos 30º - m_t g = 0 \quad \rightarrow \quad T = \frac{80 * 9.81}{\cos 30º} = 906.21 \text{ N}$$

$$\sum F_n = m * \frac{V^2}{r} \quad \rightarrow \quad T\ sen30º = 80 * \frac{V^2}{(4 + 6\ sen30º)}$$

$$906.21 * sen30º = \frac{80\,V^2}{7} \quad \rightarrow \quad V = 6.297 \text{ m/seg}$$

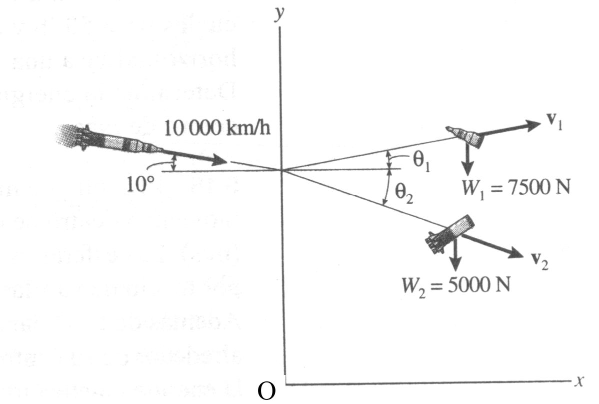
b).- Para (b):

$$\sum F_B = 0 \quad \rightarrow \quad R_b = m_p g = 50 * 9.81 = 490.5 \text{ N}$$

$$\sum F_n = m_p \frac{V^2}{7} \quad \rightarrow \quad R_n = 50 * \frac{6.297^2}{7} = 283.23 \text{ N}$$

$$\sum F_t = 0 \quad \rightarrow \quad R_t = 0$$

3-65.- Un cohete está regresando a la atmósfera de la tierra a una velocidad de 10 000 km/hr y a un ángulo de 10º con el eje x, como se muestra. El cohete se rompe en dos partes y ambas permanecen dentro del plano xy. Al recuperar las partes, se determinó que sus pesos son w_1 = 7 500 N y w_2 = 5 000 N, respectivamente. Si en el momento del rompimiento se observa que los fragmentos se mueven a lo largo de las direcciones dadas por θ_1 = 10º y θ_2 = 15º, determine las velocidades correspondientes v_1 y v_2 de los fragmentos.



P3-65

Solución

En el momento de la rotura la fuerza interna de rotura es demasiado grande y el tiempo de rotura es demasiado pequeño, por lo que se desprecia la fuerza impulsiva debida a la fuerza de gravedad. Luego se conserva la cantidad de movimiento lineal en ese instante.

$$m_t \bar{V} = m_1 \bar{V}_1 + m_2 \bar{V}_2$$

$$\frac{12500}{g} * 10000 * \frac{1000}{3600} \left(\cos 10^\circ \bar{i} - sen 10^\circ \bar{j}\right) = \frac{7500}{g} V_1 \begin{pmatrix} \cos 10^\circ \bar{i} + \\ sen 10^\circ \bar{j} \end{pmatrix} + \frac{5000}{g} \begin{pmatrix} \cos 15^\circ \bar{i} - \\ sen 15^\circ \bar{j} \end{pmatrix}$$

$$13677.89 \, \bar{i} - 2411.78 \, \bar{j} = (2.95 \, V_1 + 1.932 \, V_2) \, \bar{i} + (0.521 \, V_1 - 0.518 \, V_2) \, \bar{j}$$

Igualando componentes y operando:

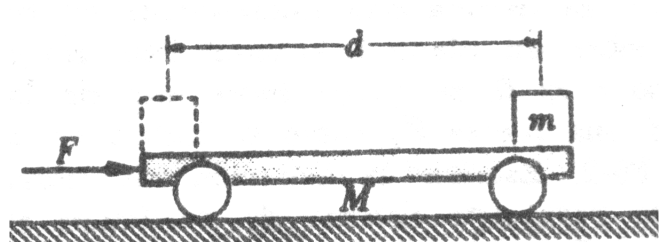
$$(2.95 \, V_1 + 1 - 932 \, V_2 = 13677.89) * 0.518$$
$$(0.521 \, V_1 - 0.518 \, V_2 = -2411.78) * 1.932$$

$$2.53 \, V_1 = 2425.59 \quad \rightarrow \quad V_1 = 956.1 \text{ m/seg} \quad \rightarrow \quad V_1 = 3441.96 \text{ km/hr}$$

Luego:

$$2.95 * 956.1 + 1.932 = 13677.89 \quad \rightarrow \quad V_2 = 5619.77 \text{ m/seg} \quad \rightarrow \quad V_2 = 20231.17 \text{ km/hr}$$

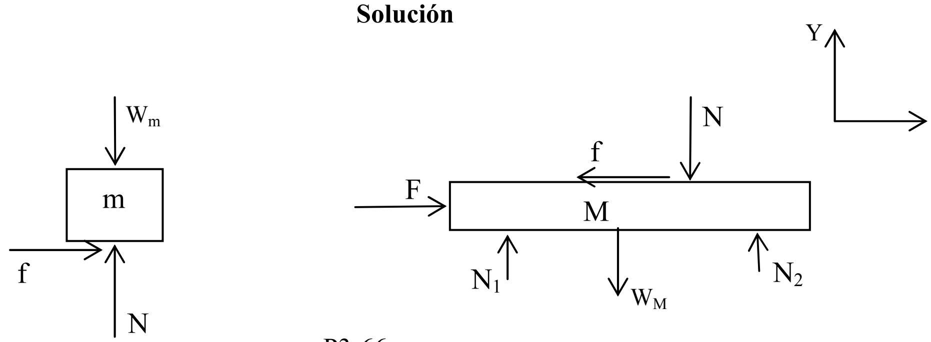
3-66.- Un carrito de masa M, inicialmente en reposo sobre una vía horizontal sin fricción, se empuja por medio de una fuerza de una fuerza horizontal de magnitud constante F, cuando t = 0. La aceleración de la masa M es tal que una masa *m* situado sobre la plataforma del carrito desliza desde la parte anterior hasta la parte posterior del carrito, como se indica en la figura. El coeficiente de fricción entre las superficies de contacto es μ. Determinar el desplazamiento de M en el instante en que *m* se ha movido una distancia de *d* a lo largo del carrito.



P3-66

Solución

1).- D.C.L.(s):



P3-66a

(a) (b)

2).- Relaciones cinemáticas:

$$\bar{a}_M = a_M\,\bar{i} \quad \text{y} \quad \bar{a}_m = \bar{a}_M + \bar{a}_{m/M} = a_M\,\bar{i} - a_{m/M}\,\bar{i}$$

3).- Relaciones cinéticas:

a).- Para (a):

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad N = mg$$

$$\sum F_X = m\,a_m \quad \rightarrow \quad f = m\left(a_M - a_{m/M}\right) = \mu\,mg \quad \rightarrow \quad a_{m/M} = a_M - \mu\,g$$

Si: $d = \dfrac{1}{2} a_{m/M}\, t^2 \quad \rightarrow \quad t^2 = \dfrac{2\,d}{a_{m/M}} = \dfrac{2\,d}{a_M - \mu\,g}$ (1)

b).- Para (b):

$$\sum F_x = M\,a_M \;\rightarrow\; F - f = M\,a_M \;\rightarrow\; F - \mu\,m\,g = M\,a_M \;\rightarrow\; a_M = \frac{F}{M} - \mu\,g\,\frac{m}{M} \qquad (2)$$

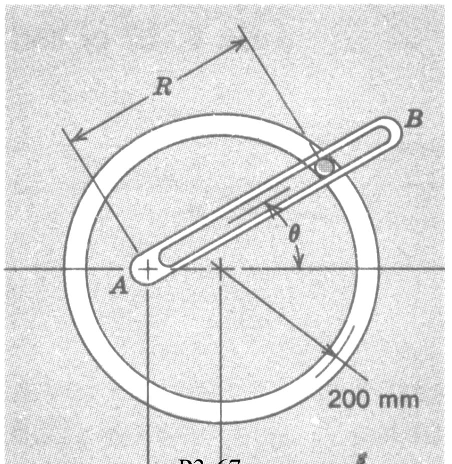
Si: $X_M = \frac{1}{2} a_M t^2$ (3)

(1) y (2) en (3):

$$X_M = \frac{1}{2} * \frac{1}{M}(F - \mu\, g\, m) * \frac{2\,d}{\frac{1}{M}(F - \mu\, g\, m - \mu\, g\, M)}$$

$$X_M = \frac{F - \mu\, m\, g}{F - \mu\, g\,(m + M)}\, d$$ (Unidades de longitud)

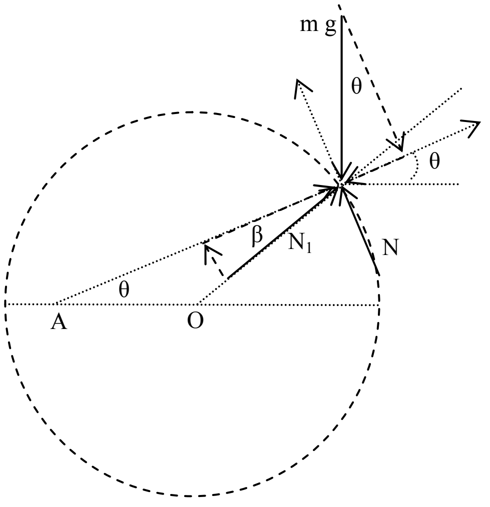
3-67.- El brazo excéntrico AB gira en sentido de las manecillas del reloj a razón constante de 180 RPM, haciendo que el perno de 100 g siga una ranura circular fija vertical cuyo radio es de 200 mm. Se desprecia la fricción. Determine la fuerza normal que se ejerce entre el brazo AB y el perno cuando θ = 45º. ¿Qué lado de la ranura del brazo AB está en contacto con el perno?



P3-67

Solución

1).- D.C.L. (Usando coordenadas polares), ver figura P3-67a:



P3-67a

Por ley senos:

$$\frac{0.2}{sen45^o} = \frac{0.1}{sen\beta}$$

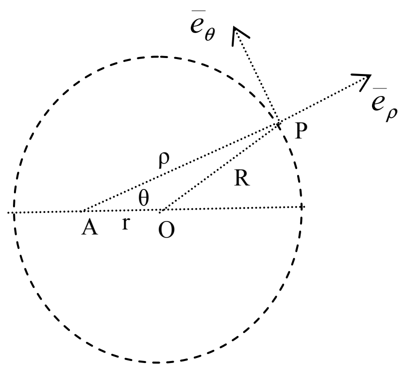
$$sen\beta = 0.3536 \quad \rightarrow \quad \beta = 20.7^o$$

Para el grafico:

$$N_{1\theta} = N_1 sen20.7^o = 0.3536\, N_1$$

$$N_{1\rho} = N_1 \cos 20.7^o = 0.935\, N_1$$

$$W_\theta = m\, g\, \cos\theta$$



P3-67b

$$W_\rho = m\ g\ sen\theta$$

2).- Relaciones cinemáticas:

a).- Orientación de los vectores unitarios y cálculos elementales (ver figura P3-67a):

Por ley de cosenos

$$R^2 = \rho^2 + r^2 - 2\ \rho\ r\ \cos\theta \qquad (1)$$

$$\rho = \sqrt{R^2 - r \ \ + 2\ \rho\ r\ \cos\theta} \qquad (2)$$

Derivando (1) dos veces con respecto al tiempo:

a).- $0 = 2\ \rho\ \dot{\rho} + 2\ \rho\ r\ sen\theta\ \dot{\theta} - 2\ \dot{\rho}\ r\ \cos\theta \quad \rightarrow \quad \dot{\rho} = -\dfrac{\rho\ r\ sen\theta\ \dot{\theta}}{\rho - r\ \cos\theta}$ (3)

b).- $0 = \dot{\rho}^2 + \rho\ \ddot{\rho} + \dot{\rho}\ r\ sen\theta\ \dot{\theta} + \rho\ r\ \cos\theta\ \dot{\theta}^2 - \ddot{\rho}\ r \cos\theta + \dot{\rho}\ r\ sen\theta\ \dot{\theta}$

$$\ddot{\rho} = -\frac{\left(\dot{\rho}^2 + 2\ \dot{\rho}\ r\ sen\theta\ \dot{\theta} + \rho\ r\ \cos\theta\ \dot{\theta}^2\right)}{\rho - r\ \cos\theta} \qquad (4)$$

c).- Identificación de los parámetros que definen el movimiento.-

En (2):

$$\rho = \sqrt{0.2^2 - 0.1^2 + 2*0.2*0.1\cos 45} = 0.241 \ \text{ m}$$

En (3):

$$\dot{\rho} = -\frac{0.241*0.1\ sen45^o*(-6\pi)}{0.241 - 0.1\cos 45^o} = 1.886 \ \text{ m/seg}$$

En (4):

$$\ddot{\rho} = -\frac{1.886^2 - 2*1.886*0.1\ sen45^o*6\pi + 0.241*0.1\cos 45^o*(6\pi)^2}{0.241 - 0.1\cos 45^o} = -26.92 \ \text{ m/seg}^2$$

$\dot{\theta} = -6\pi = -18.849$ rad/seg

$\ddot{\theta} = 0$

d).- Cálculo de la aceleración para θ = 45º:

$$\bar{a}_P = \left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2\right)\bar{e}_\rho + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\bar{e}_\theta = \left(-26.92 - 0.241 * 18.849^2\right)\bar{e}_\rho - 2 * 1.886 * 18.849\,\bar{e}_\theta$$

$\bar{a}_P = -112.54\,\bar{e}_\rho - 22.621\,\bar{e}_\theta$ (m/seg^2)

3).- Relaciones cinéticas:

$$\sum F_\rho = m\,a_\rho \quad \rightarrow \quad 0.935\ N_1 - mg\ sen 45º = 0.1 * (-112.54)$$

$N_1 = -11.29$ Newton

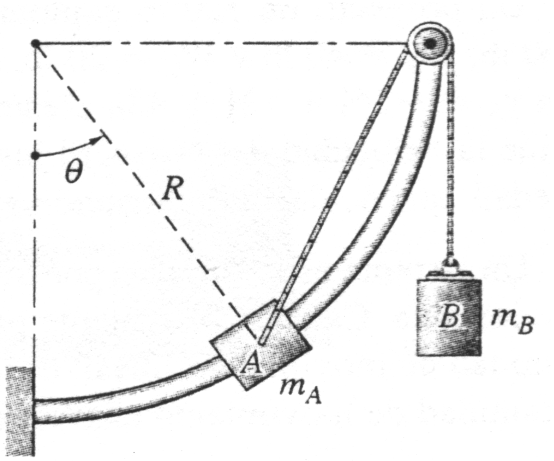
$$\sum F_\theta = m\,a_\theta \quad \rightarrow \quad N - m\ g\ \cos\theta + 0.3536\ N_1 = 0.1 * (-22.621)$$

$$N - 0.1 * 9.81\cos 45º - 0.3536 * 11.29 = -2.2621$$

$N = 2.42$ Newton

El lado de la ranura que está en contacto es la inferior

3-68.- El sistema se suelta desde el reposo cuando θ = 0º. Determine la relación m_A/m_B de las dos masas para las que el sistema llegue al reposo otra vez cuando θ = 60ª. Desprecie la fricción.



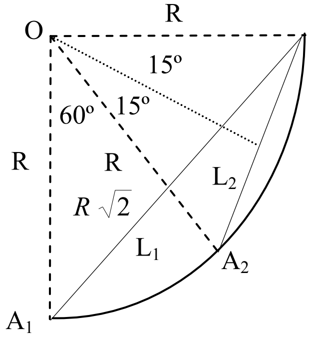
P3-68

Solución

El trabajo realizado por las fuerzas externas en el sistema debe ser nulo.

$W_{1-2} = 0$

1).- Cálculo de la altura que ha descendido B y ascendido A (ver figura P3.68a):



P3-68a

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = R\sqrt{2} \\ \\ L_2 = 2\,R\,sen 15^o \end{array}\right\} h_B = L_1 - L_2$$

$$h_B = R\sqrt{2} - 0.517\,R = 0.897\,R$$

$$h_A = R\left(1 - \cos 60^o\right) = 0.5\,R$$

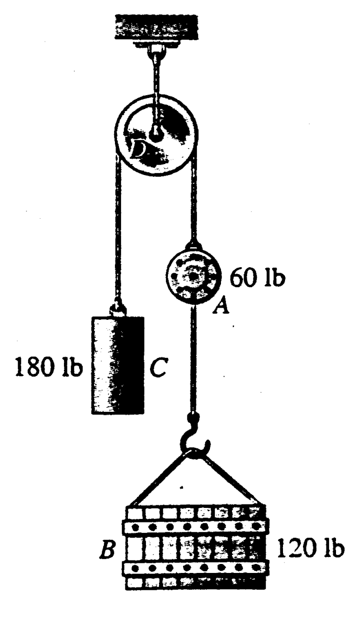
2).- Cálculo de la relación de m_A/m_B:

Si:

$$-m_A g\,h_A + m_B g\,h_B = 0 \quad \rightarrow \quad m_A * 0.5\,R = m_B * 0.897\,R$$

$$\frac{m_A}{m_B} = 1.794$$

3-69.- El sistema está formado por la grúa eléctrica A, la caja B y el contrapeso C, todo los cuales están suspendidos de la polea ligera D. El sistema está estacionario cuando la grúa A se enciende, haciendo que empiece a enrollar el cable que enlaza A y B a razón de 2 pies/seg. Determine las velocidades resultantes de A, B y C.



P3-69

Solución

1).- Como la sumatoria de momentos respecto al eje perpendicular de la polea es nulo, la cantidad de movimiento angular se conserva.

$$\sum M_O = 0 \quad \rightarrow \quad \overbrace{\left(\sum H_{O\,i\,Z}\right)_i}^{0} = \left(\sum H_{O\,i\,Z}\right)_f$$

Luego:

$$\left(H^A_{O\,Z} + H^B_{O\,Z} + H^C_{O\,Z}\right)_f = 0$$

$$-\frac{w_A}{g}\,r\,\dot{Y}_A - \frac{w_B}{g}\,r\,\dot{Y}_B + \frac{w_C}{g}\,r\,\dot{Y}_C = 0$$

$$-60\,\dot{Y}_A - 120\,\dot{Y}_B + 180\,\dot{Y}_C = 0 \quad \rightarrow \quad -\dot{Y}_A - 2\,\dot{Y}_B + 3\,\dot{Y}_C = 0 \qquad (1)$$

2).- Relaciones cinemáticas:

$$\dot{Y}_C = \dot{Y}_{Cu} \ , \ \dot{Y}_A = -\dot{Y}_{Cu} \ \text{ y } \ \dot{Y}_B = \overbrace{\dot{Y}_{rel} - \dot{Y}_{Cu}}^{\dot{Y}_A + \dot{Y}_{B/A}} = 2 - \dot{Y}_{Cu} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1).

$$\dot{Y}_{Cu} - 2\left(2 - \dot{Y}_{Cu}\right) + 3\,\dot{Y}_{Cu} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{Y}_{Cu} - 4 + 2\,\dot{Y}_{Cu} + 3\,\dot{Y}_{Cu} = 0$$

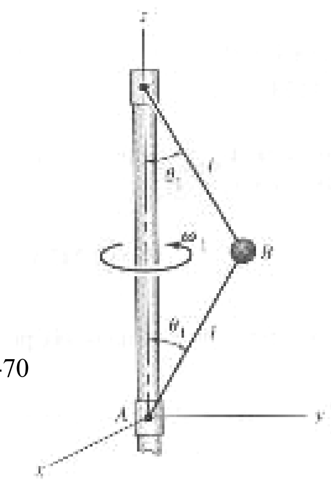
$$6\,\dot{Y}_{Cu} = 4 \quad \rightarrow \quad \dot{Y}_{Cu} = 0.667 \ \text{ pie/seg}$$

Luego:

$$\dot{Y}_C = 0.667 \ \text{ m/seg} \ , \ \dot{Y}_A = -0.667 \ \text{ m/seg} \ \text{ y}$$

$$\dot{Y}_B = 2 - 0.667 = 1.333 \ \text{ m/seg}$$

3-70.- Una pequeña bola de 1 kg de masa está girando alrededor de un eje vertical con una velocidad ω_1 de 15 rad/seg. La bola está conectada a uno cojinetes situados sobre el eje mediante unas cadenas ligeras inextensibles que tienen una longitud *l* de 0.6 m. El ángulo θ_1 es de 30º. ¿Cuál será la velocidad angular ω_2 del eje si el cojinete A se mueve 150 mm hacia arriba?

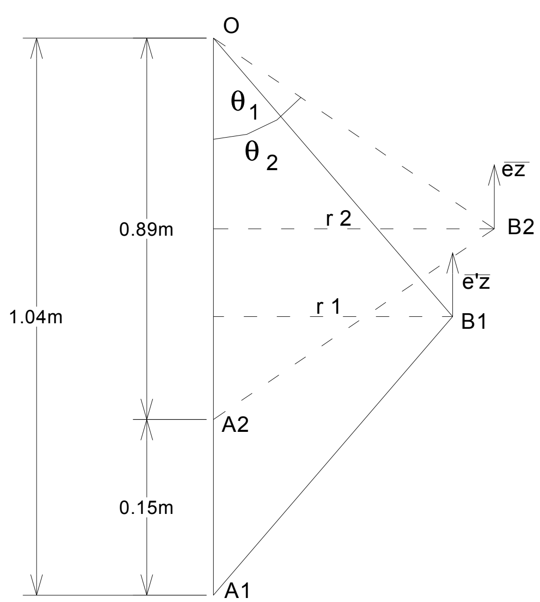


P3-70

Solución

Como no hay ninguna fuerza que produce momentos respecto al eje vertical; la cantidad de movimiento lineal se conserva.

1).- Diagrama de la posición inicial y final, y cálculos elementales (ver figura P3.70a):



P3-70a

$$\theta_2 = \arccos\left(\frac{0.89/2}{0.6}\right) = 42.126º$$

$$r_2 = 0.6\ sen\theta_2 = 0.402 \ \text{ m}$$

$$r_1 = 0.6\ sen\theta_1 = 0.3 \ \ \text{m}$$

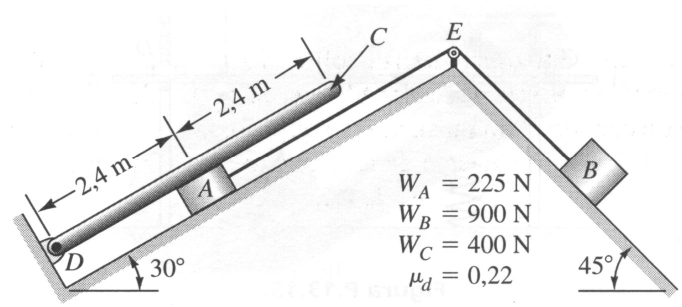
2).- Por el principio de la conservación de la cantidad de movimiento angular:

$$H_{Z1} = H_{Z2} \quad \rightarrow \quad m\ \rho_1(\rho_1\omega_1) = m\ \rho_2(\rho_2\omega_2)$$

$$r_1^2\ \omega_1 = r_2^2 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \omega_1 = \left(\frac{0.3}{0.402}\right)^2 15$$

$$\omega_2 = 8.353 \ \ \text{rad/seg}$$

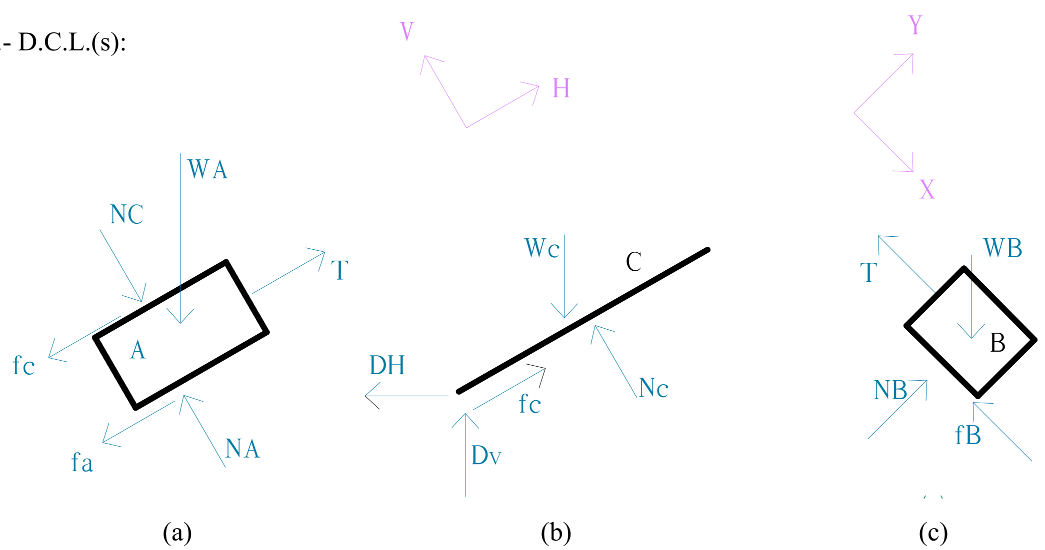
3-71.- Dos bloques A y B están conectados mediante un cordón inextensible que pasa por una polea sin masa ni rozamiento en E. Si el sistema parte del reposo ¿Cuál será la velocidad del sistema después de haber recorrido 1 m? El coeficiente de rozamiento dinámico es $\mu_d = 0.22$ para ambos bloques.



P3-71

Solución

1).- D.C.L.(s):



P3-71a

2).- Relaciones cinéticas:
a).- Para (c):

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad N_B - w_B sen45° = 0 \quad \rightarrow \quad N_B = 900\ sen45° = 636.4 \ \ \text{N}$$

$$f_B = \mu_d N_B = 0.22 * 636.4 = 140 \ \text{N}$$

b).- Para (b):

$$\sum M_D = 0 \quad \rightarrow \quad N_C * (2.4 + X) - w_C \cos 30^\circ * 2.4 = 0$$

$$N_C = \frac{400 \cos 30^\circ * 2.4}{2.4 + X} = \frac{831.384}{2.4 + X} \tag{1}$$

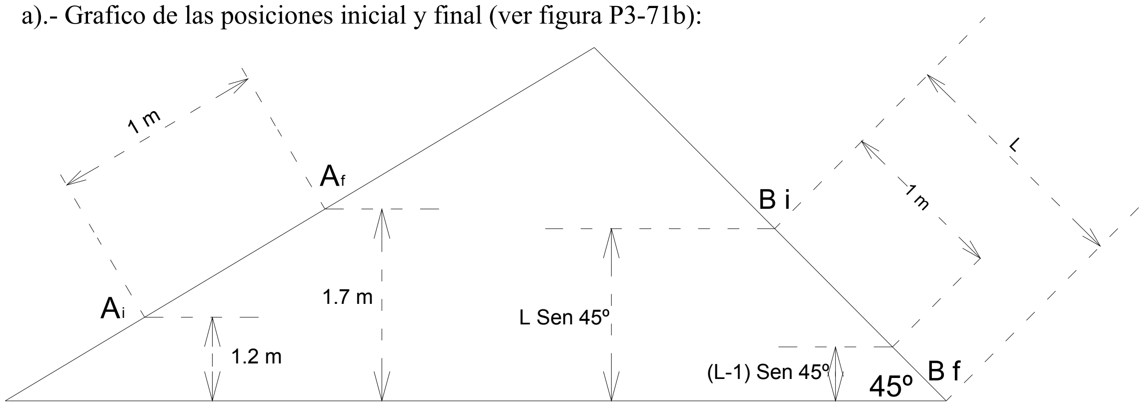
c).- Para (a):

$$\sum F_V = 0 \quad \rightarrow \quad N_A - N_C - w_A \cos 30^\circ = 0 \quad \rightarrow \quad N_A = N_C + w_A \cos 30^\circ$$

$$N_A = \frac{831.384}{2.4 + X} + 225 \cos 30^\circ = \frac{831.384}{2.4 + X} + 194.856 \tag{2}$$

3).- Por el principio de trabajo y energía cinética para el sistema, en su forma alternativa.

a).- Grafico de las posiciones inicial y final (ver figura P3-71b):



P3-71b

b).- Por la forma alternativa:

$$W_{FNC\, i-f} = \left(Ek_f + U_f\right) - \left(Ek_i + U_i\right)$$

$$\underbrace{-\int_0^1 f_A dX - \int_0^1 f_B dX - \int_0^1 f_C dX}_{I} = \underbrace{\left(\frac{1}{2} m_t V_f^2 + m_A g\ h_{A\,f} + m_B g\ h_{B\,f}\right) - \left(m_A g\ h_{A\,i} + m_B g\ h_{B\,i}\right)}_{II}$$

Si:

$$I = -\int_0^1 0.22 * \left(\frac{831.384}{2.4 + X} + 194.856\right) dX - \int_0^1 140\ dX - \int\ 0.22 * \left(\frac{831.384}{2.4 + X}\right) dX$$

$$I = -0.22\left(\int_0^1 (194{,}856 + 636.4)\ dX + 2\int_0^1 \frac{831.384}{2.4 + X}\ dX\right)$$

$$I = -182.876 - 0.22 * 1662.768\ \ln\left(2.4 + X\right)\Big|_0^1 = -310.546 \text{ J}$$

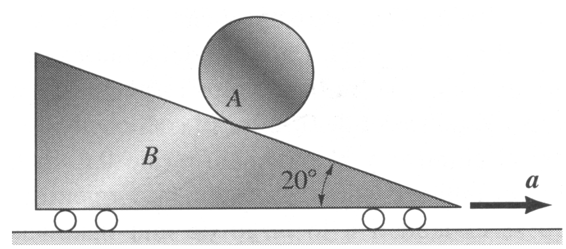
$$II = \left[\frac{1}{2} * \frac{(225 + 900)}{9.81} V_f^2 + 225 * 1.7 + 900 * (L - 1)\, sen 45^o\right] - \left(225 * 1.2 + 900\ L\ sen 45^o\right)$$

$$II = 57.34\ V_f^2 - 523.846 \text{ (J)}$$

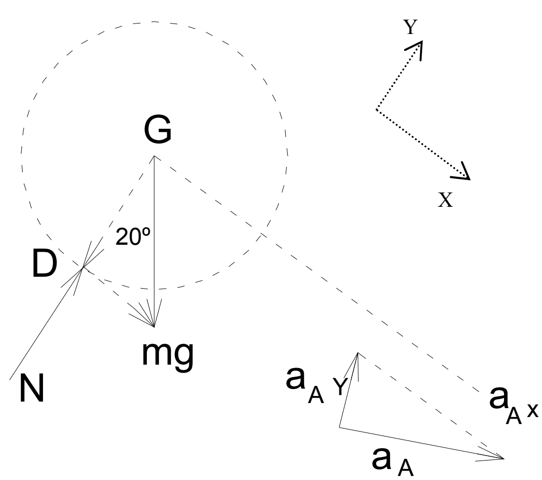
Luego:

$$-310.546 = 57.34\ V_f^2 - 523.846 \quad \rightarrow \quad V_f^2 = 3.72 \quad \rightarrow \quad V_f = 1{,}929 \text{ m/seg}$$

3-72.- Se muestra una cuña B con un cilindro A de 20 kg de masa y un diámetro de 500 mm, situado sobre el plano inclinado. Se comunica a la cuña una aceleración constante de 20 m/seg^2 hacia la derecha ¿Qué distancia *d* recorre el cilindro en 0.5 seg, relativa al plano inclinado si no hay rozamiento? El sistema parte del reposo.



P3-72



P3-72a

Solución

Los Cuerpos se encuentran en movimiento de traslación.

1).- D.C.L. del cilindro (ver figura P3-72a):

2).- Cálculo de la aceleración inercial del cilindro A (en la dirección de la cuña donde descansa), Utilizando momentos respecto a D y luego utilizando la cinemática en movimientos relativos:

$$\sum M_D = m_A r\ a_{AX}$$

$$m_A g\ sen 20^o\ r = m_A\ r\ a_{AX}$$

$$a_{AX} \quad 3.36 \text{ m/seg}^2$$

3).- Por la cinemática:

Si: $\bar{a}_A = \bar{a}_B + \bar{a}_{A/B} \quad \rightarrow \quad a_{AX}\bar{i} + a_{AY}\bar{j} = 20\left(\cos 20^o\,\bar{i} + sen20^o\,\bar{j}\right) + a_{A/B}\bar{i}$

Igualando componentes:

$$3.36 = 18.794 + a_{A/B} \quad \rightarrow \quad a_{A/B} = -15.434 \ \text{ m/seg}^2 \ \text{ y } \ a_{AY} = 6.84 \ \text{ m/seg}^2$$

Luego:

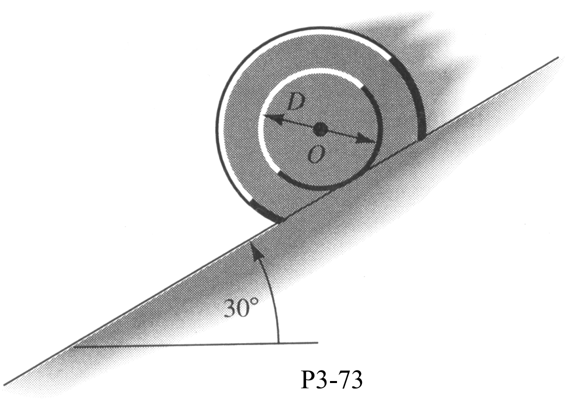
$$\bar{a}_A = 3.36\,\bar{i} + 6.84\,\bar{j} \ \ (\text{m/seg}^2)$$

Por el movimiento rectilíneo de la esfera en la superficie del plano inclinado:

$$d = \overbrace{V_{A/B0}}^{0} t + \frac{1}{2}a_{A/B}t^2 = \frac{1}{2}(-15.434)*0.5^2 = -1.93 \ \text{m}$$

El cilindro A sube una distancia de 1.93 m respecto a la cuña B.

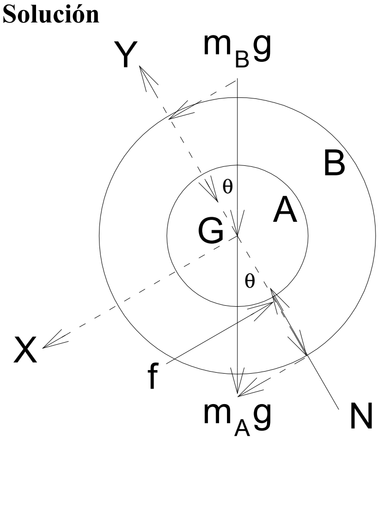
3-73.- Dos cilindros uniformes uno pequeño y el otro más grande están conectados en forma continua, como lo muestra sus placas representativas en el plano de la figura. La densidad de los cilindros es de 10 Mg/m^3. El diámetro del cilindro pequeño D es de 300 mm y su profundidad es de 200 mm, en tanto el otro cilindro tiene un diámetro de 600 mm y una profundidad de 25 mm. Si el cilindro pequeño rueda, calcular la velocidad del eje O después que los cilindros hayan recorrido 1.6 m a lo largo del plano inclinado, usando la teoría del cinética de un sistema de partículas. También hallar la fuerza de rozamiento que actúa sobre el cilindro pequeño.



P3-73

Solución

1).- D.S.F.

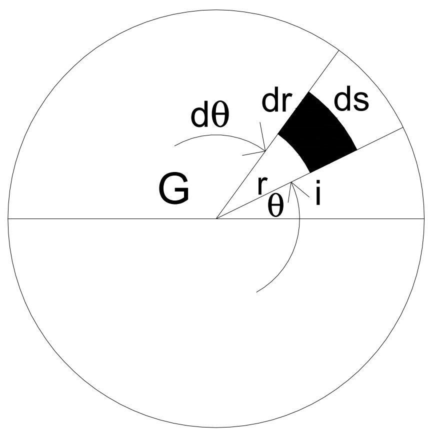


P3-73a

Las fuerzas que producen trabajo en el sistema, son solamente los pesos.

2).- Utilizando el principio de trabajo y energía cinética en el sistema.

a).- Cálculo de la energía cinética de los cilindros, como sistemas de partículas, para un instante cualquiera.-



P3-73a

i).- Cálculo de la masa diferencial Ver figura P3-73a):

$$\rho = \frac{m_A}{A} = \frac{m_A}{\pi\, r^2} \quad \rightarrow \; m_A = \rho\; A$$

$$dm_A = \rho\; dA$$

$$dm_A = \rho\; dr\; ds = \rho\; dr\;(r\; d\theta)$$

ii).- Cálculo de la velocidad de la partícula iésimo:

$$\overline{V}_i = \overline{V}_G + \omega_A\; \overline{k}\; x\; \overline{r}_{G\,i} = \overline{V}_G + \omega_A\; r\; \overline{u}$$

$$\therefore\; \dot{\rho}_{G\,i}^2 = (\omega_A\; r)^2$$

iii).- Cálculo de la energía cinética relativa al centro de masa:

$$Ek_{rel} = \frac{1}{2}\sum m_i \dot{\rho}_{G\,i}^2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_A} \omega_A^2 r^2 \rho\; r\; dr\; d\theta = \frac{1}{2}\rho\;\omega_A^2 \int_0^{2\pi} \frac{r_A^2}{4}\; d\theta$$

$$Ek_{rel} = \frac{1}{2} * \frac{m_A}{\pi\; r_A^2} * \frac{r_A^4}{4} * 2\pi\; \omega_A^2 = \frac{1}{4}\; m_A\; r_A^2\; \omega_A^2$$

4i).- Cálculo de la energía cinética del centro de masa G (cilindro en rodamiento):

$$Ek_G = \frac{1}{2} m_A\; V_G^2 = \frac{1}{2} m_A\; (\omega_A\; r_A)^2 = \frac{1}{2}\; m_A\; r_A^2 \omega_A^2$$

5i).- Cálculo de la energía cinética del cilindro A:

$$Ek_A = \frac{1}{2}\; m_A r_A^2 \omega_A^2 + \frac{1}{4} m_A r_A^2 \omega_A^2 = \frac{3}{4}\; m_A\; r_A^2\; \omega_A^2$$

6i).- Cálculo de la energía cinética del cilindro B.- La energía cinética, se calcula de la misma manera que para A:

$$Ek_B = \frac{1}{2} m_B V_G^2 + \frac{1}{4} m_B\ r_B^2\ \omega_A^2 = \frac{1}{2} m_B (\omega_A r_A)^2 + \frac{1}{4} m_B\ r_B^2\ \omega_A^2$$

$$Ek_B = \frac{1}{4} m_B \omega_A^2 \left(2\, r_A^2 + r_B^2\right)$$

b).- Cálculo de la energía cinética del sistema, para el instante final:

Si: $\rho_V = \dfrac{m_A}{v_A} \quad \rightarrow \quad m_A = \rho_V v_A = 10x10^3 * \pi * 0.15^2 * 0.2 = 141.37$ kg

$m_B = 10x10^3 * \pi * 0.3^2 * 0.025 = 70.686$ kg

$$Ek_{A\,2} = \frac{3}{4} * 141.37 * 0.15^2 * \omega_2^2 = 2.386\ \omega_2^2 \text{ J}$$

$$Ek_{B\,2} = \frac{1}{4} * 70.686 * \omega_2^2 \left(2 * 0.15^2 + 0.3^2\right) = 2.385\ \omega_2^2 \text{ J}$$

Luego:

$$Ek_2 = Ek_{A\,2} + Ek_{B\,2} = 4.771\ \omega_2^2$$

b).- Cálculo del trabajo de las fuerzas en el sistema:

$$W_{1-2} = \left(m_A g + m_b g\right) 1.6\ sen 30º = 1664.125$$

c).- Cálculo de la velocidad angular de los cilindros, por el principio de trabajo y energía cinética:

$$W_{1-2} = Ek_2 - \overbrace{Ek_1}^{0} \quad \rightarrow \quad 1664.125 = 4.771\ \omega_2^2 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = 18.677 \text{ rad/seg}$$

d).- Cálculo de la velocidad de O (G), cuando ha recorrido 1.6 m G:

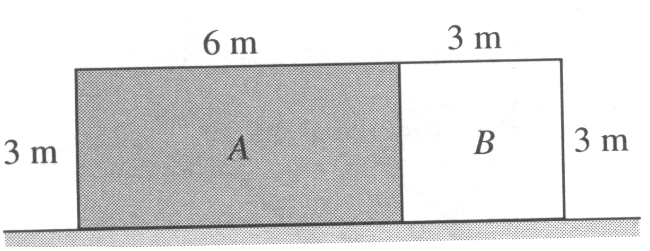
$$V_{O\,2} = \omega_2 r_A = 18.677 * 0.15 = 2.8 \text{ m/seg}$$

3).- Cálculo de la fuerza de fricción, utilizando el principio de trabajo y energía cinética en el centro de masa:

$$W_{1-2\,G} = \Delta\ Ek \quad \rightarrow \quad 1664.22 - 1.6\ f = \frac{1}{2}\left(141.37 + 70.66\right) * 2.8^2$$

$f = 520.6$ N

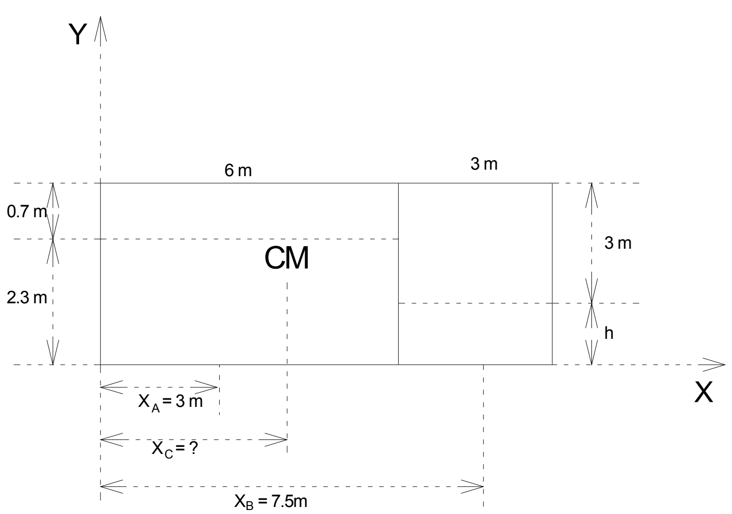
3-74.- Se muestra dos depósitos adyacentes A y B ambos depósitos son rectangulares con un ancho de 4 m. Se esta bombeando gasolina del deposito A hacia B, cuando el nivel del deposito A está a 0.7 m del extremo superior, el caudal del flujo Q de A a B es de 300 lt/seg, y 10 seg más tarde éste es de 500 lt/seg. ¿Cuál es la fuerza horizontal media del fluido sobre los depósitos durante este intervalo de 10 seg? La densidad de la gasolina es de 800 kg/m³. Inicialmente el deposito A es ta lleno y el deposito B vació.



P3-74

Solución

1).- Cálculo de la posición del centro de masa cuando Q = 0.3 m³/seg y baja 0.7 m del extremo superior, de tal manera que el centro de masa se mueve de izquierda a derecha en forma uniforme en la dirección horizontal:



P3-74a

$$0.7 * 6 * 4 = h * 2 * 4$$

$$h = 1.4 \text{ m}$$

$$\rho = \frac{M}{v} \quad \rightarrow \quad M = \rho\, v$$

Por definición básica del centro de masa:

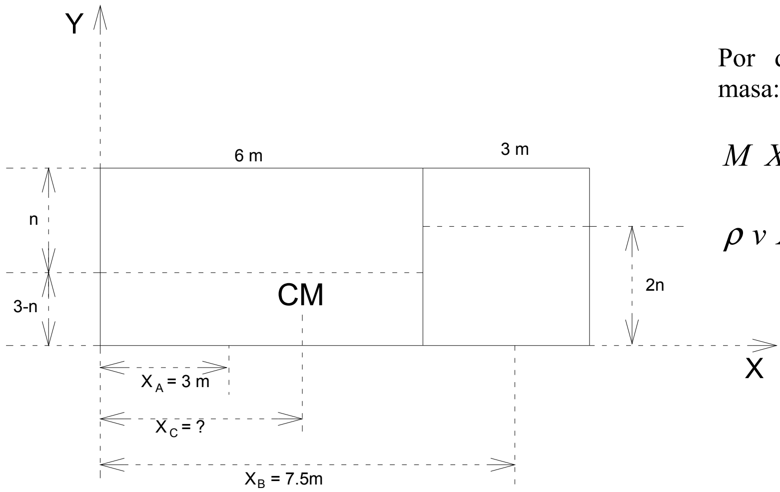
$$M\ X_C = M_A\ X_A + M_B\ X_B$$

$$\rho\, v\, X_C = \rho\, v_A X_A + \rho\, v_B X_B$$

$$(6*4*3)\, X_C = (6*4*2.3)*3 + (3*4*1.4)*7.5$$

$$X_C = 4.05 \text{ m}$$

2).- Cálculo de la posición del centro de masa, cuando t = 10 seg y Q = 0.5 m³/seg:



P3-74b

Por definición básica del centro de masa:

$$M\ X_C = M_A\ X_A + M_B\ X_B$$

$$\rho\ v\ X_C = \rho\ v_A X_A + \rho\ v_B X_B$$

$$(6*4*3)\ X_C = [6*4*(3-n)]*3 + [3*4*2\ n]*7.5 \qquad (1)$$

Si: $Q = 6*4*\dot{n}$ y $\dot{n} = \dfrac{Q}{6*4}$

Derivando (1) respecto al tiempo:

$$72\ \dot{X}_C = (6*4)\,\dot{n}*3 + (6*4)\,\dot{n}*7.5 \quad \rightarrow \quad 72\ \dot{X}_C = -3\,Q + 7.5\,Q$$

$$\dot{X}_C = \frac{4.5}{72}\,Q \qquad (2)$$

3).- Por el principio de impulso y cantidad de movimiento:

$$\int_0^{10} F\ dt = M\ \dot{X}_{C2} - M\ \dot{X}_{C1} = \rho\left(v_2 \dot{X}_{C2} - v_1 \dot{X}_{C1}\right)$$

$$F\ t\ \Big|_0^{10} = \rho\ v\left(\dot{X}_{C2} - \dot{X}_{C1}\right) \quad \rightarrow \quad 10\ F = \rho\ v\left(\dot{X}_{C2} - \dot{X}_{C1}\right)$$

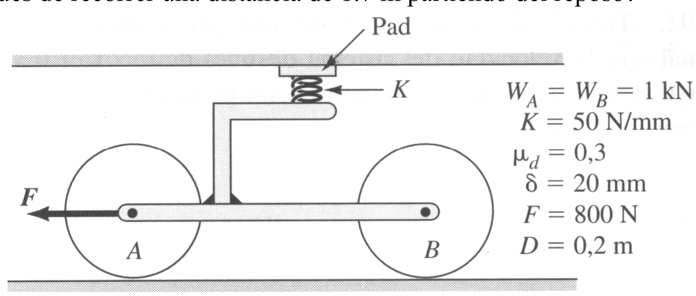
$$10\ F = 800*(6+4+3)*\frac{4.5}{72}(Q_2 - Q_1) = 800*4.5\,(0.5-0.3) = 800*4.5*0.2$$

$$F_{media} = 72\ \text{N}$$

3-75.- Una fuerza F de 800 N está tirando del vehículo. Los cilindros A y B pesan 1 KN cada uno y ruedan. El muelle indicado tiene una constante K igual a 50 N/mm y está comprimida una distancia δ de 20 mm. La almohadilla (pad) desliza sobre la guía superior con un coeficiente de rozamiento dinámico μ_d igual a 0.3. Ignorar todas las masas excepto las de los cilindros, cuyos diámetros son de 0.2 m. Usando la teoría de la cinética para sistemas de partículas, responda las siguientes preguntas:

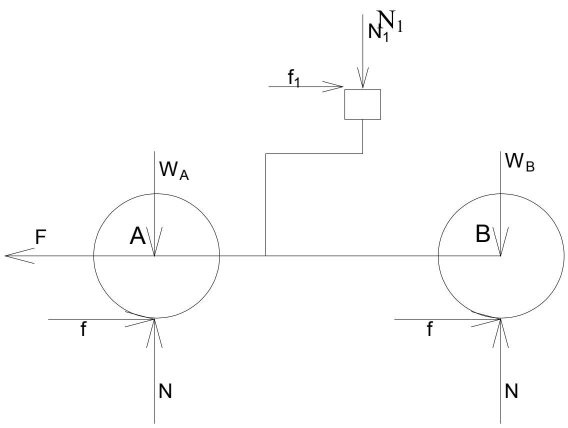
a) ¿Cuál será la velocidad del vehículo después de recorrer una distancia de 1.7 m partiendo del reposo?

b) ¿Cuál será la fuerza total de rozamiento f del terreno sobre los cilindros?



P3-75

Solución



P3-75a

1).- D.S.F. (ver figura P3-75a):

2).- Por el método alternativo de trabajo y energía cinética.-

$$W_{1-2} = \Delta\ Ek$$

La energía cinética de un cilindro se obtiene de la misma forma que se realizó en el problema Nº P3-73 Pagina 296).

a).- Cálculo de la energía cinética de uno de los cilindros, en el estado final:

$$Ek = \frac{3}{4} * \frac{1000}{9.81} * 0.1^2 * \omega_2^2 = 0.765\ \omega_2^2$$

b).- Cálculo de la energía cinética del sistema en el estado final:

$$Ek_t = 2 * 0.765\ \omega_2^2 = 1.53\ \omega_2^2$$

c).- Cálculo de los trabajos de las fuerzas no conservativas:

$$W_{NC\,1-2} = F * 1.7 - f_1 * 1.7 = 1.7\ (800 - \mu_d N_1) = 1.7\ (800 - 0.3 * 50 * 20)$$

$$W_{Nc\,1-2} = 850 \;\; \text{N m}$$

d).- Por el método alternativo:

$$850 = 1.53\;\omega_2^2 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = 23.57 \;\; \text{rad/seg}$$

Luego

$$V_h = 23.57 * 0.1 = 2.357 \;\; \text{m/seg}$$

3).- Por el principio de trabajo y energía cinética del centro de masa:

$$W_{G\,1-2} = \Delta\; Ek_G$$

$$850 - \overbrace{2\;f}^{f_t} * 1.7 = 2\left(\frac{1}{2} m\; R^2 \omega_2^2\right)$$

$$f_t = \frac{\left(850 - \frac{1}{2} * 2 * \frac{1000}{9.81} * 0.1^2 * 23.57^2\right)}{1.7} = 166.88 \;\; \text{N}$$