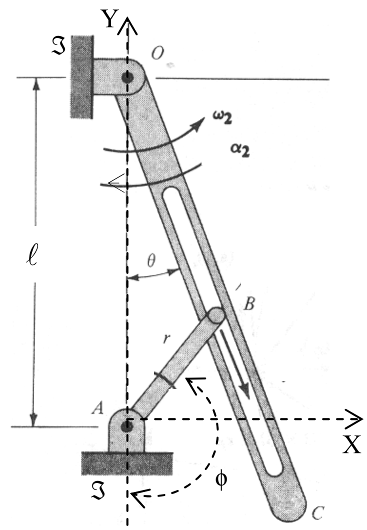
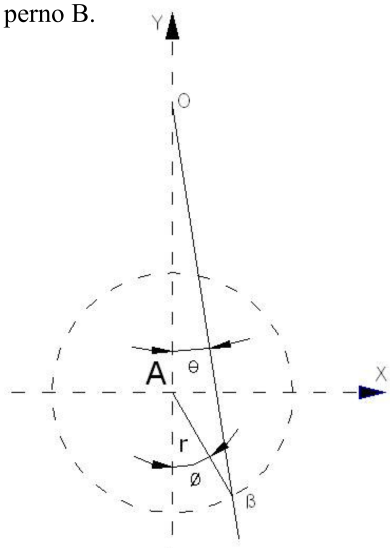
PROBLEMAS SOBRE CINEMATICA DE UNA PARTICULA

1-1.- El perno B del cigüeñal AB de radio r = 0.1 m se está moviendo en la ranura del brazo OC en la figura. Si en el instante dado: $\ell = 0.24$ m, $\phi = 30°$, $\omega = 4$ rad/seg y $\alpha = -2$ rad/seg^2. Usando coordenadas cartesianas, calcular la velocidad y aceleración del perno B.



P1-1



P1-1a

Solución

1).- Por intersección de trayectorias (ver figura P1-1a):

$$X^2 + Y^2 = r^2 \qquad (1)$$

$$Y = b + mX = 0.24 - \cot\theta\ X \qquad (2)$$

2).- Derivando dos veces, con respecto al tiempo (1) y (2):

$$X\dot{X} + Y\dot{Y} = 0 \qquad (3)$$

$$\dot{Y} = \csc^2\theta\ \dot{\theta}\ X - \cot\theta\ \dot{X} \qquad (4)$$

$$\dot{X}^2 + X\ddot{X} + \dot{Y}^2 + Y\dot{Y}^2 = 0 \qquad (5)$$

$$\ddot{Y} = -\left(2\csc^2\theta\cot\theta\dot{\theta}^2 X - \csc^2\theta\ddot{\theta}X - \csc^2\theta\ \dot{\theta}\ \dot{X} - \csc^2\theta\ \theta\dot{X} + \cot\theta\ddot{X}\right) \qquad (6)$$

3).- Para el caso específico de X = 0.1 sen30° = 0.05 m, Y = -0.1cos30° = -0.0866 m y θ = 8.702°.-

(4) en (3):

$$X\dot{X} + Y\left(\csc^2\theta\dot{\theta}X - \cot\theta\dot{X}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{X}\left(X - Y\cot\theta\right) = -Y\csc^2\theta\dot{\theta}X$$

$$\dot{X} = -\frac{Y \csc^2 \theta \, \dot{\theta} \, X}{(X - \cot\theta \, Y)} = \frac{0.0866 * 43.683 * 4 * 0.05}{0.05 + 6.534 * 0.0866} = 1.229 \text{ m/seg}$$

En (4):

$$\dot{Y} = 43.687 * 4 * 0.05 - 6.534 * 1.229 = 0.707 \quad \text{m/seg}$$

$$\therefore \quad \overline{V}_B = 1.229 \, \bar{i} + 0.707 \, \bar{j} \quad \text{(m/seg)} \quad \rightarrow \quad \left|\overline{V}_B\right| = 1.42 \text{ m/seg}$$

(6) en (5):

$$\ddot{X}\left(X - Y \cot\theta\right) = Y \csc^2 \theta \left(2 \cot\theta \dot{\theta}^2 X - \ddot{\theta} X - 2\dot{\theta}\dot{X}\right) - \dot{X}^2 - \dot{Y}^2$$

$$\ddot{X} = \frac{-0.0866 * 43.687 \left(2 * 6.534 * 16 * 0.05 + 2 * 0.05 - 2 * 4 * 1.229\right) - 2.016}{0.05 + 0.0866 * 6.534}$$

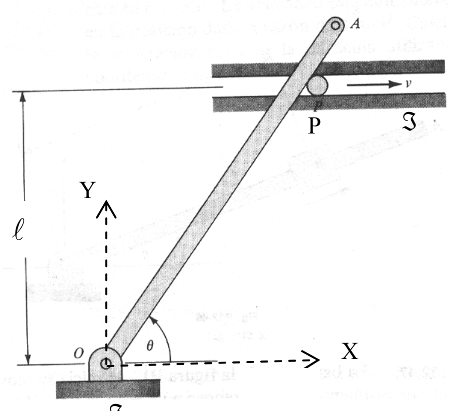
$$\therefore \quad \ddot{X} = -7.71 \quad \text{m/seg}^2$$

En (6):

$$\ddot{Y} = -43.687 \left(2 * 6.534 * 16 * 0.05 + 2 * 0.05 - 2 * 4 * 1.229\right) + 6.534 * 7.71$$

$$\ddot{Y} = 18.82 \quad \text{m/seg}^2$$

$$\therefore \quad \overline{a}_B = -\left(7.71 \, \bar{i} - 18.82 \, \bar{j}\right) \quad \text{m/seg}^2 \quad \rightarrow \quad \left|\overline{a}_B\right| = 20.34 \quad \text{m/seg}^2$$



P1-2

1-2.- El perno P en un mecanismo será empujado hacia la derecha con una velocidad constante V = 2 m/seg. Usando coordenadas cartesianas, calcule la velocidad angular y la aceleración angular del brazo OA para θ = 30°, si ℓ = 0.7 m.

Solución

1).- Cálculo del movimiento de P tomando como punto de referencia a O y aprovechando que ℓ es constante:

Si: $tg\theta = \dfrac{\ell}{X} \quad \rightarrow \quad X\ tg\theta = \ell$ (1)

Derivando dos veces (1), respecto al tiempo:

$$\dot{X}\ tg\theta + X\sec^2\theta\dot{\theta} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{-\dot{X}\ sen\theta\cos\theta}{X} \qquad (2)$$

$$\ddot{X}\ tg\theta + \dot{X}\sec^2\theta\ \dot{\theta} + \dot{X}\sec^2\theta\ \dot{\theta} + X * 2\sec^2\theta\ tg\theta\ \dot{\theta}^2 + X\sec^2\theta\ \ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-\left(2\dot{X}\sec^2\theta\dot{\theta} + 2X\sec^2\theta\ tg\theta\dot{\theta}^2\right)}{X\sec^2\theta} \qquad (3)$$

2) Para el caso específico de θ = 30°, $\dot{X} = V = 2$ m/seg y $\ddot{X} = 0$:

$$tg30° = \frac{0.7}{X} \quad \rightarrow \quad X = 1.21 \text{ m}$$

En (2):

$$\therefore \quad \dot{\theta} = -\frac{2sen30°\cos30°}{1.21} = -0.72 \quad \text{rad/seg}$$

En (3):

$$\ddot{\theta} = -\frac{\left(-2*2\sec^2 30° * 0.72 + 2*1.21\sec^2 30° tg30° * 0.72^2\right)}{1.21*\sec^2 30°}$$

$$\therefore \quad \ddot{\theta} = 1.78 \quad \text{rad/seg}^2$$

1-3.- El movimiento tridimensional de una partícula está definida por el vector posición $\bar{r} = (R\ sen\ pt)\,\bar{i} + (Ct)\,\bar{j} + (R\cos\ pt)\,\bar{k}$. La curva descrita en el espacio por la partícula es una hélice. Determine el radio de curvatura de dicha hélice.

Solución

Si:

$$\frac{1}{\rho_C} = \frac{\left|\dot{\bar{r}}x\ddot{\bar{r}}\right|}{\left|\dot{\bar{r}}\right|^3}$$

$$\dot{\bar{r}} = Rp\cos pt\ \bar{i} + C\ \bar{j} - Rpsenpt\ \bar{k}$$

$$\left|\dot{\bar{r}}\right| = \left[R^2p^2\left(\cos^2 pt + sen^2 pt\right) + C^2\right]^{1/2} = \left(R^2p^2 + C^2\right)^{1/2}$$

$$\ddot{\bar{r}} = -Rp^2 senpt\ \bar{i} - Rp^2\cos pt\ \bar{k}$$

$$\dot{\bar{r}}\ x\ \ddot{\bar{r}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ Rp\cos pt & C & -R\ psenpt \\ -Rp^2 senpt & 0 & -Rp^2\cos pt \end{vmatrix}$$

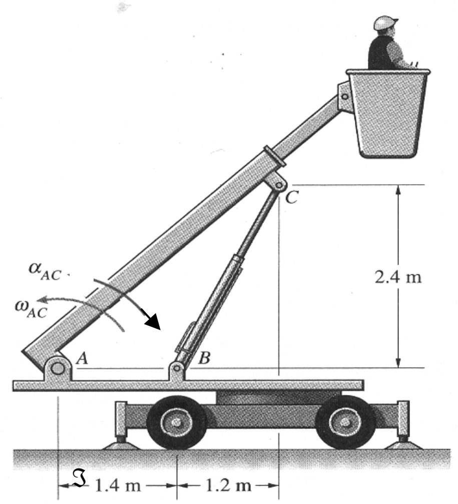
$$\dot{\bar{r}}\ x\ \ddot{\bar{r}} = -CRp^2\cos pt\ \bar{i} + \left(R^2p^3sen^2pt + R^2p^3\cos^2 pt\right)\bar{j} + CRp^2senpt\bar{k}$$

$$\frac{1}{\rho_C} = \frac{\left|\dot{\bar{r}}x\ddot{\bar{r}}\right|}{\left|\dot{\bar{r}}\right|^3} = \left[\frac{C^2R^2p^4\cos^2 pt}{\left(R^2p^2+C^2\right)^3} + \frac{R^4p^6}{\left(R^2p^2+C^2\right)^3} + \frac{C^2R^2p^4sen^2 pt}{\left(R^2p^2+C^2\right)^3}\right]^{1/2}$$

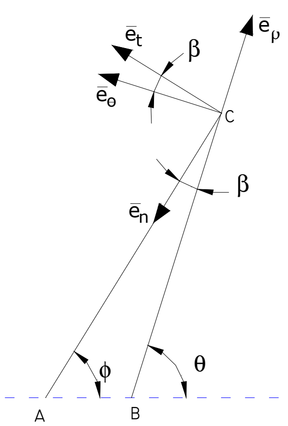
$$\frac{1}{\rho_C} = \sqrt{\frac{p^4R^2\left(R^2p^2+C^2\right)}{\left(R^2p^2+C^2\right)^3}} = \frac{p^2R}{\left(p^2R^2+C^2\right)}$$

$$\therefore\quad \rho_C = \frac{p^2R^2+C^2}{p^2R} = R + \frac{C^2}{p^2R}\quad \text{(Unid. de longitud)}$$

1-4.- Si la velocidad angular ω_{AC} = 5 °/seg y la aceleración angular α_{AC} = - 2°/seg^2. Usando coordenada tangencial y normal y/o polar, determine la aceleración angular del actuador hidráulico BC y la razón de cambio de su razón de extensión.



P1-4



P1-4a

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios, que definen las coordenadas pedidas (ver figura P1-4a):

$$r_{AC} = \sqrt{2.4^2 + 2.6^2} = 3.54\ \text{ m}$$

$\rho_{BC} = 2.683$ m

$\theta = 63.43°$, $\phi = 42.71°$ y $\beta = 20.72°$

2).- Cálculo del movimiento de C tomando como punto de referencia A en coordenadas tangencial y normal:

$$\overline{V}_C = \omega_{AC} r_{AC}\ \overline{e}_t = 5 * \frac{\pi}{180} * 3.54\ \overline{e}_t = 0.309\ \overline{e}_t \quad (1)$$

$$\overline{a}_C = \alpha_{AC} r_{AC}\ \overline{e}_t + \omega_{AC}^2 r_{AC}\ \overline{e}_n = -2 * \frac{\pi}{180} * 3.54\ \overline{e}_t + \left(5 * \frac{\pi}{180}\right)^2 * 3.54\ \overline{e}_n$$

$$\overline{a}_C = -0.124\ \overline{e}_t + 0.027\ \overline{e}_n \quad \text{(m/seg)} \qquad (2)$$

3).- Cálculo del movimiento de C tomando como punto de referencia B, en coordenadas polares, para luego transformarle en tangencial y normal:

$$\overline{e}_\rho = sen\beta\ \overline{e}_t - \cos\beta\ \overline{e}_n \quad \text{y} \quad \overline{e}_\theta = \cos\beta\ \overline{e}_t + sen\beta\ \overline{e}_n$$

a).- Cálculo de la velocidad angular de BC y su razón de extensión:

$$\overline{V}_C = \dot{\rho}_{BC}\ \overline{e}_\rho + \rho_{BC}\dot{\theta}\ \overline{e}_\theta$$

$$\overline{V}_C = \dot{\rho}_{BC}\left(sen\beta\ \overline{e}_t - \cos\beta\ \overline{e}_n\right) + \rho_{BC}\dot{\theta}\left(\cos\beta\ \overline{e}_t + sen\beta\ \overline{e}_n\right)$$

$$\overline{V}_C = \left(\dot{\rho}_{BC} sen\beta + \rho_{BC}\dot{\theta}\cos\beta\right)\overline{e}_t + \left(\rho_{BC}\dot{\theta} sen\beta - \dot{\rho}_{BC}\cos\beta\right)\overline{e}_n \qquad (3)$$

(1)= (3) e igualando componentes:

$$\left(0 = \rho_{BC}\dot{\theta} sen\beta - \dot{\rho}_{BC}\cos\beta\right) * sen\beta \qquad (4)$$

$$\underline{\left(0.309 = \rho_{BC}\dot{\theta}\cos\beta + \dot{\rho}_{BC} sen\beta\right) * \cos\beta} \qquad (5)$$

(4) + (5) $0.309\cos\beta = \rho_{BC}\dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = \frac{0.309\cos 20.72°}{2.683} = 0.1077 \ \text{rad/seg} \ = 6.172 \ \text{°/seg}$$

En (4):

$$\dot{\rho}_{BC} = \rho_{BC}\dot{\theta} tg\beta = 2.683 * 0.1077\ tg 20.72° = 0.109 \quad \text{m/seg}$$

b).- Cálculo de la aceleración angular de BC y la razón de cambio de su razón de extensión:

$$\bar{a}_C = \left(\ddot{\rho}_{BC} - \rho_{BC}\dot{\theta}^2\right)\bar{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}_{BC}\dot{\theta} + \rho_{BC}\ddot{\theta}\right)\bar{e}_\theta$$

$$\bar{a}_C = \left(\ddot{\rho}_{BC} - \rho_{BC}\dot{\theta}^2\right)\left(sen\beta\,\bar{e}_t - \cos\beta\,\bar{e}_n\right) + \left(2\dot{\rho}_{BC}\dot{\theta} + \rho_{BC}\ddot{\theta}\right)\left(\cos\beta\,\bar{e}_t + sen\beta\,\bar{e}_n\right)$$

$$\bar{a}_C = \left[\left(\ddot{\rho}_{BC} - \rho_{BC}\dot{\theta}^2\right)sen\beta + \left(2\dot{\rho}_{BC}\dot{\theta} + \rho_{BC}\ddot{\theta}\right)\cos\beta\right]\bar{e}_t + \left[-\left(\ddot{\rho}_{BC} - \rho_{BC}\dot{\theta}^2\right)\cos\beta + \left(2\dot{\rho}_{BC}\dot{\theta} + \rho_{BC}\ddot{\theta}\right)sen\beta\right]\bar{e}_n \qquad (6)$$

(2)= (6) e igualando componentes:

$$\left[-0.124 = \left(\ddot{\rho}_{BC} - \rho_{BC}\dot{\theta}^2\right)sen\beta + \left(2\dot{\rho}_{BC}\dot{\theta} + \rho_{BC}\ddot{\theta}\right)\cos\beta\right] * \cos\beta \qquad (7)$$

$$\left[0.027 = -\left(\ddot{\rho}_{BC} - \rho_{BC}\dot{\theta}^2\right)\cos\beta + \left(2\dot{\rho}_{BC}\dot{\theta} + \rho_{BC}\ddot{\theta}\right)sen\beta\right] * sen\beta \qquad (8)$$

(7) + (8):

$$0.027 sen\beta - 0.124\cos\beta = 2\dot{\rho}_{BC}\dot{\theta} + \rho_{BC}\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{0.027 sen 20.72° - 0.124\cos 20.72° - 2 * 0.109 * 0.1077}{2.683}$$

$$\ddot{\theta} = -0.0484 \quad \text{rad/seg}^2 \; = -2.77 \quad °/\text{seg}^2$$

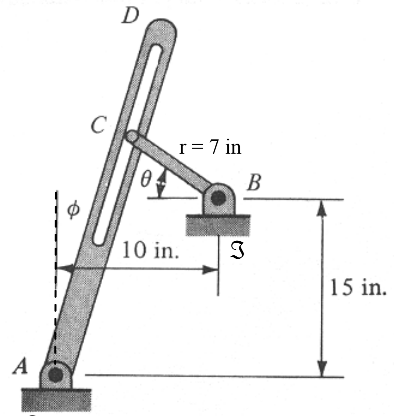
En (7):

$$\ddot{\rho}_{BC} = \frac{\rho_{BC}\dot{\theta}^2 sen\beta - 0.124 - \left(2\dot{\rho}_{BC}\dot{\theta} + \rho_{BC}\ddot{\theta}\right)\cos\beta}{sen\beta}$$

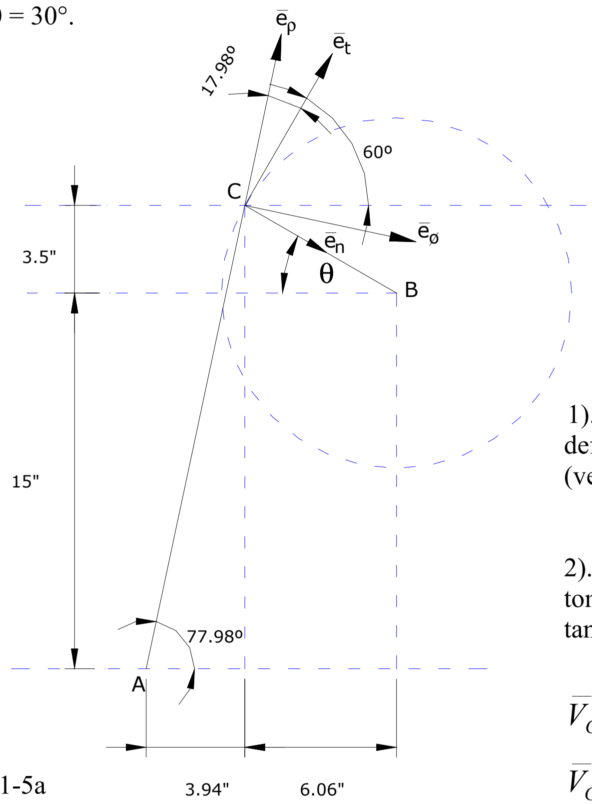
$$\ddot{\rho}_{BC} = \frac{2.683 * 0.1077^2 sen 20.72° - 0.124 - \left(2 * 0.109 * 0.1077 - 2.683 * 0.0484\right)\cos 20.72°}{sen 20.72°}$$

$$\ddot{\rho}_{BC} = -0.0381 \quad \text{m/seg}^2$$

1-5.- El brazo BC gira en sentido horario a 200 RPM, el perno C en el extremo de este brazo desliza en la ranura del elemento AD. Usando coordenadas tangencial y normal y/o polares, calcule $\dot{\phi}$ y $\ddot{\phi}$ para $\theta = 30°$.



P1-5



P1-5a

Solución

1).- Direcciones de los vectores unitarios, que definen las coordenadas tangencial y normal, y polar (ver figura P-5a):

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de C, tomando como punto base B y usando coordenadas tangencial y normal:

$$\overline{V}_{Cc/\Im} = \dot{\theta}\, r\, \overline{e}_t = 200 * \frac{\pi}{30} * 7\, \overline{e}_t$$

$$\overline{V}_{Cc/\Im} = 146.6\, \overline{e}_t \quad \text{(plg/seg)} \qquad (1)$$

$$\overline{a}_{C/\Im} = \overset{0}{\ddot{\theta}} r\, \overline{e}_t + \dot{\theta}^2 r\, \overline{e}_n = \left(\frac{20\pi}{3}\right)^2 * 7\, \overline{e}_n = 3070.54\, \overline{e}_n \quad (\text{plg/seg}^2) \qquad (2)$$

3).- Cálculo de la velocidad y aceleración de C, tomando como punto base A y usando coordenadas polares:

$$\overline{V}_{C/\Im} = \dot{\rho}\, \overline{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\, \overline{e}_\phi = \dot{\rho}\, \overline{e}_\rho + 18.92\dot{\phi}\, \overline{e}\phi \qquad (3)$$

$$\overline{a}_{C/\Im} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\overline{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\overline{e}_\phi = \left(\ddot{\rho} - 18.92\dot{\phi}^2\right)\overline{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\overline{e}_\phi \qquad (4)$$

4).- Ecuaciones de compatibilidad:

a).- Si: (1) = (3), transformamos $\bar{e}_t$ y $\bar{e}_n$ en $\bar{e}_\rho$ y $\bar{e}_\phi$, para luego igualar componentes:

$$\bar{e}_t = \cos 17.98°\ \bar{e}_\rho + sen 17.98° = 0.95\ \bar{e}_\rho + 0.309\ \bar{e}_\phi$$

$$\bar{e}_n = -sen 17.98°\ \bar{e}_\rho + \cos 17.98° = -0.309\ \bar{e}_\rho + 0.95\ \bar{e}_\phi$$

Luego:

$$146.6\left(0.95\ \bar{e}_\rho + 0.309\ \bar{e}_\phi\right) = \dot{\rho}\ \bar{e}_\rho + 18.92\dot{\phi}\ \bar{e}_\phi$$

$\dot{\rho} = 139.25$ plg/seg y $\dot{\phi} = 2.39$ rad/seg

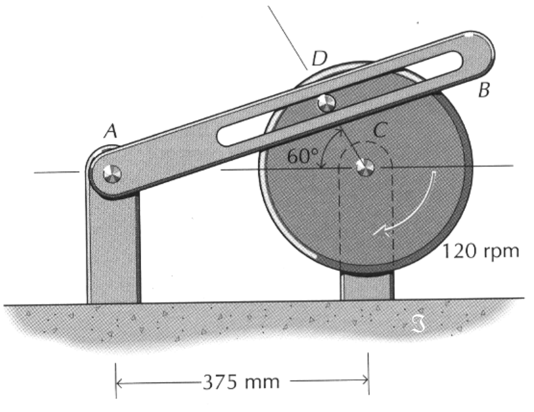
b).- Si: (2) = (4), transformamos $\bar{e}_t$ y $\bar{e}_n$ en $\bar{e}_\rho$ y $\bar{e}_\phi$, para luego igualar las componentes transversales:

$$3070.54\left(-0.308\ \bar{e}_\rho + 0.95\bar{e}_\phi\right) = \left(\ddot{\rho} - 18.92\dot{\phi}^2\right)\bar{e}_\rho + \left(2 * 139.25 * 2.39 + 18.92\ddot{\phi}\right)\bar{e}_\phi$$

$$3070.54 * 0.95 = 665.615 + 18.92\ \ddot{\phi}$$

$\ddot{\phi} = 118.996 \cong 119$ rad/seg^2

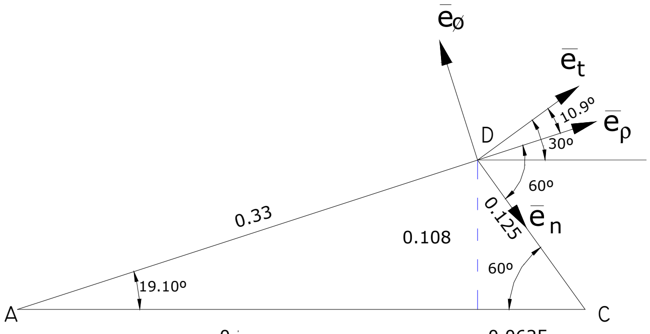
1-6.- La rueda de la figura gira en sentido horario con frecuencia constante de 120 RPM. El pasador D está fijo a la rueda en un punto situado a 125 mm de su centro y desliza por la guía en el brazo AB. Usando Coordenadas tangencial y normal y/o polares, determine la velocidad angular ω_{AB} y la aceleración angular α_{AB} del brazo AB en el instante representado.



P1-6

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios que definen las coordenadas polar, tangencial y normal (ver figura P-6a):



P1-6a

$$\bar{e}_t = \cos 10.9°\ \bar{e}_\rho + sen 10.9°\ \bar{e}_\phi$$

$$\bar{e}_t = 0.982\ \bar{e}_\rho + 0.19\ \bar{e}_\phi$$

$$\bar{e}_n = sen 10.9°\ \bar{e}_\rho - \cos 10.9°\ \bar{e}_\phi$$

$$\bar{e}_n = 0.19\ \bar{e}_\rho - 0.982\ \bar{e}_\phi$$

2).- Cálculo del movimiento de D, tomando como punto de referencia C en $\Im$:

$$\bar{V}_C = \omega\, r\, \bar{e}_t = 120 * \frac{\pi}{30} * 0.125\, \bar{e}_t = 1.57\, \bar{e}_t = 1.542\, \bar{e}_\rho + 0.3\, \bar{e}_\phi \quad \text{(m/seg)} \qquad (1)$$

$$\bar{a}_C = \omega^2 r\, \bar{e}_n = 19.74\, \bar{e}_n = 3.75\, \bar{e}_\rho - 19.385\, \bar{e}_\phi \quad \text{(m/seg}^2\text{)} \qquad (2)$$

3).- Cálculo del movimiento de D, tomando como punto de referencia A en $\Im$:

$$\bar{V}_C = \dot{\rho}\, \bar{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\, \bar{e}_\phi = \dot{\rho}\, \bar{e}_\rho + 0.33\omega_{AB}\bar{e}_\phi \qquad (3)$$

(1)= (3):

$$\dot{\rho} = 1.542 \ \text{m/seg} \quad \text{y} \qquad \omega_{AB} = \frac{0.3}{0.33} = 0.9 \ \text{rad/seg}$$

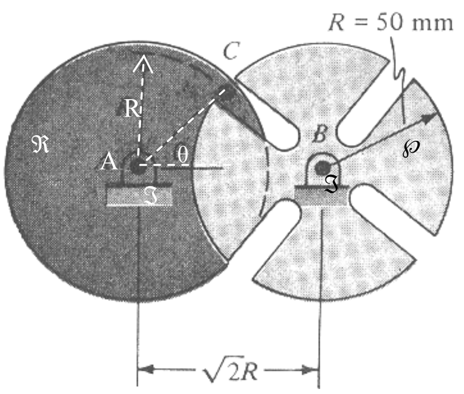
$$\bar{a}_C = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\bar{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\bar{e}_\phi \qquad (4)$$

(2)= (4):

$$a_\phi = 2 * 1.542 * 0.9 + 0.33\alpha_{AB} = -19.385$$

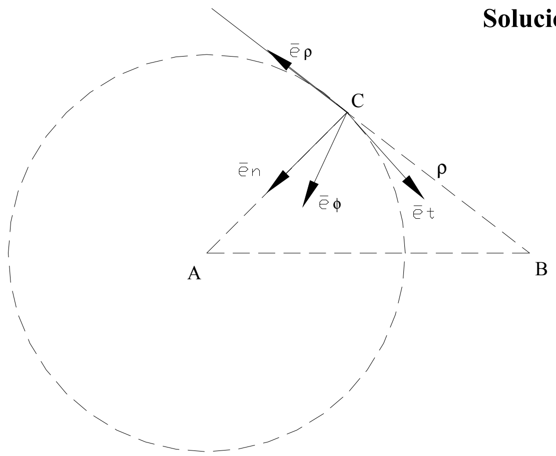
$$\alpha_{AB} = -67.15 \ \text{rad/seg}^2$$

1-7.- El mecanismo de ginebra de un contador mecánico convierte en movimiento de rotación constante de la rueda $\Re$ de R = 50 mm, en un movimiento de rotación intermitente de la rueda $\wp$. El perno C está montado en $\Re$ y desliza en la ranura de la rueda $\wp$. Usando coordenadas tangencial y normal y/o polares, calcule la velocidad y aceleración angulares de la rueda $\wp$, para θ = 30° con la rueda $\Re$ girando a 100 RPM en sentido horario.



P1-7

Solución



P1-7a

1).- Orientación de los ejes que definen las coordenadas tangencial y normal, y del polar escogido, además cálculos elementales (ver figura P1-7a):

a).- Cálculo de ρ, para $\theta = 30^{a}$, por la ley de cósenos (ver figura P1-7b):

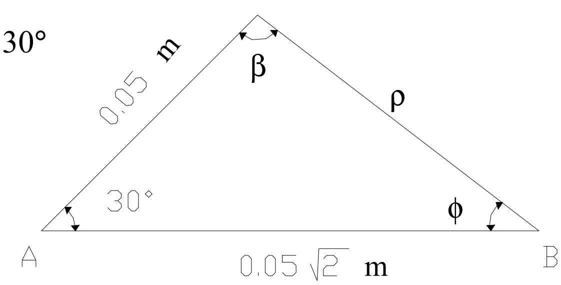
$$\rho^2 = 0.05^2 + \left(0.05\sqrt{2}\right)^2 - 2 * 0.05 * 0.05\sqrt{2}\cos 30°$$

ρ = 0.0371 m → ρ = 37.1 mm

b).- Cálculo de ϕ por ley de senos:

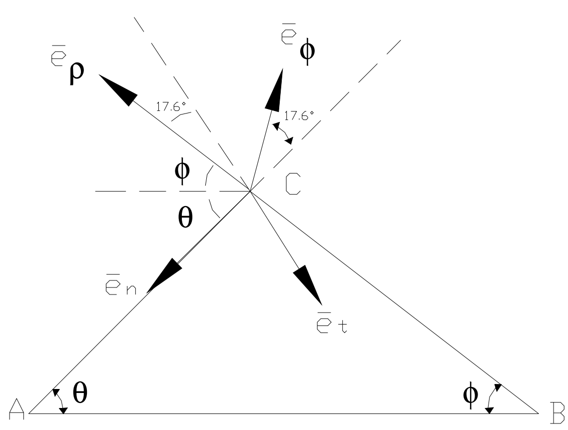
$$\frac{sen\phi}{50} = \frac{sen30°}{37.1} \quad \rightarrow \quad sen\phi = 0.67385$$

$$\phi = 42.4°$$



P1-7b

c).- Orientación de los vectores unitarios $\bar{e}_\rho$ y $\bar{e}_\phi$ en $\bar{e}_t$ y $\bar{e}_n$:



P1-7c

$$\bar{e}_\rho = -\cos 17.6° \, \bar{e}_t + sen17.6° \, \bar{e}_n$$

$$\bar{e}_\rho = -0.953 \, \bar{e}_t + 0.302 \, \bar{e}_n$$

$$\bar{e}_\phi = -sen17.6° \, \bar{e}_t - \cos 17.6° \, \bar{e}_n$$

$$\bar{e}_\phi = -0.302 \, \bar{e}_t - 0.953 \, \bar{e}_n$$

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de C, tomando como punto base A y usando coordenadas tangencial y normal:

$$\overline{V}_C = \omega\, r\, \overline{e}_t = 100 * \frac{\pi}{30} * 0.05\, \overline{e}_t = 0.524\, \overline{e}_t \quad \text{(m/seg)} \qquad (1)$$

$$\overline{a}_C = \omega^2 r\, \overline{e}_n = \left(10\frac{\pi}{3}\right)^2 * 0.05\, \overline{e}_n = 5.483\, \overline{e}_n \quad (\text{m/seg}^2) \qquad (2)$$

3).- Cálculo de la velocidad y aceleración de C, tomando como punto base B y usando coordenadas polares:

$$\overline{V}_C = \dot{\rho}\, \overline{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\, \overline{e}_\phi = \dot{\rho}\, \overline{e} + 0.0371\dot{\phi}\, \overline{e}_\phi$$

$$\overline{V}_C = \dot{\rho}(-0.953\, \overline{e}_t + 0.302\, \overline{e}_n) + 0.0371\dot{\phi}(-0.302\, \overline{e}_t - 0.953\, \overline{e}_n)$$

$$\overline{V}_C = (-0.953\dot{\rho} - 0.0112\dot{\phi})\overline{e}_t + (0.302\dot{\rho} - 0.0353\dot{\phi})\overline{e}_n \qquad (3)$$

(1)= (3), igualando componentes y operando:

$$(-0.953\dot{\rho} - 0.0112\dot{\phi} = 0.524) * 0.302$$

$$(\quad 0.302\dot{\rho} - 0.0353\dot{\phi} = 0) * 0.953$$

$$-0.037\dot{\phi} = 0.158 \quad \rightarrow \quad \dot{\phi} = -4.27 \quad \text{rad/seg}$$

También:

$$0.302\dot{\rho} - 0.0353 * (-4.27) = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\rho} = -0.499 \quad \text{m/seg}$$

$$\overline{a}_C = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\overline{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\overline{e}_\phi$$

$$\overline{a}_C = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)(-0.953\, \overline{e}_t + 0.302\, \overline{e}_n) + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})(-0.302\, \overline{e}_t - 0.953\, \overline{e}_n)$$

$$\begin{aligned}\overline{a}_C = {} & \left[-(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) * 0.953 - (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) * 0.302\right]\overline{e}_t + \\ & \left[(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) * 0.302 - (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) * 0.953\right]\overline{e}_n \qquad (4)\end{aligned}$$

Si: (2) = (4), igualando componentes y operando:

$$-\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^{2}\right)*0.953-\left(2\dot{\rho}\dot{\phi}+\rho\ddot{\phi}\right)*0.302=0$$

$$-\left[\ddot{\rho}-0.05*4.27^{2}\right]*0.953-\left[2\,(-0.499)(-4.27)+0.05\ddot{\phi}\right]*0.302=0$$

$$-0.953\ddot{\rho}-0.0151\ddot{\phi}=0.4182 \qquad (5)$$

$$\left[\left(\ddot{\rho}-0.05*4.27^{2}\right)*0.302\right]-\left[2\,(-0.499)(-4.27)+0.05\ddot{\phi}\right]*0.953=5.483$$

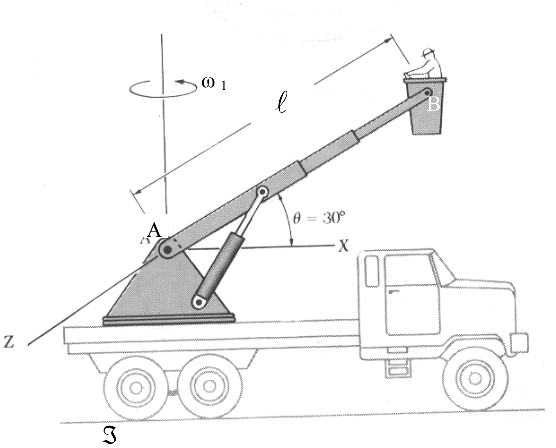
$$0.302\ddot{\rho}-0.0477\ddot{\phi}=9.82 \qquad (6)$$

0.302 x (5) + 0.953 x (6):

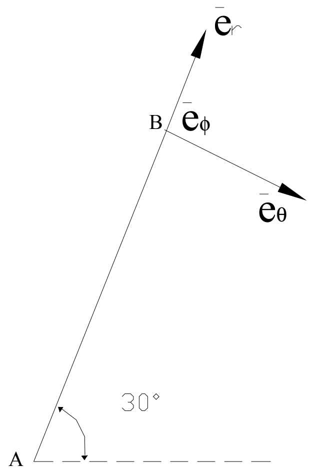
$$-0.05\ddot{\phi}=9.485 \;\rightarrow\; \ddot{\phi}=-189.7 \quad \text{rad/seg}^2$$

$$\ddot{\phi}=189.7 \quad \text{rad/seg}^2 \quad \text{(Horario)}$$

1-8.- El brazo telescópico AB se emplea para situar al operario a la altura de los cables, eléctricos y de teléfono. Si la longitud AB aumente a una velocidad constante (dℓ/dt) = 0.20 m/seg y el brazo gira a una velocidad angular constante ω_1 = 0.25 rad/seg respecto al eje vertical., mientras que el ángulo θ que forma con la horizontal mantiene un valor constante. Usando coordenadas esféricas, determínese la aceleración del punto B, cuando ℓ = 5 m.



P1-8



P1-8a

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios que definen las coordenadas esféricas (ver figura P1-8a):

2).- Identificación de los parámetros que definen el movimiento:

$r = 5\ m$	$\theta = 60°$	$\dot{\phi} = 0.25\ \ rad/seg$
$\dot{r} = 0.2\ m/seg$	$\dot{\theta} = 0$	$\ddot{\phi} = 0$
$\ddot{r} = 0$	$\ddot{\theta} = 0$	

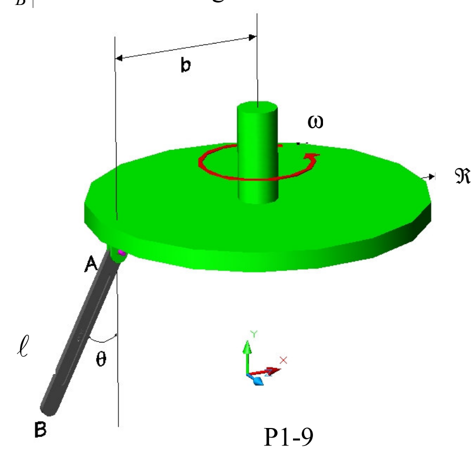
3).- Cálculo de la aceleración de B:

$$\bar{a}_B = \begin{pmatrix} \overbrace{\ddot{r}}^{0} - r\overbrace{\dot{\theta}^2}^{0} - \\ r\dot{\phi}^2 sen^2\theta \end{pmatrix} \bar{e}_r + \begin{pmatrix} 2\dot{r}\overbrace{\dot{\theta}}^{0} + r\overbrace{\ddot{\theta}}^{0} - \\ r\dot{\phi}^2 sen\theta\cos\theta \end{pmatrix} \bar{e}_\theta + \begin{pmatrix} 2r\overbrace{\dot{\theta}}^{0}\dot{\phi}\cos\theta + \\ 2\dot{r}\dot{\phi}sen\theta + r\overbrace{\ddot{\phi}}^{0}sen\theta \end{pmatrix} \bar{e}_\phi$$

$$\bar{a}_B = -5*0.25^2 sen^2 60°\bar{e}_r - 5*0.25^2 sen60°\cos 60°\bar{e}_\theta + 2*0.2*0.25sen60°\bar{e}_\phi$$

$$\bar{a}_B = -0.234\ \bar{e}_r - 0.135\ \bar{e}_\theta + 0.0866\ \bar{e}_\phi \quad \rightarrow \quad |\bar{a}_B| = 0.284\ \ \text{m/seg}^2$$

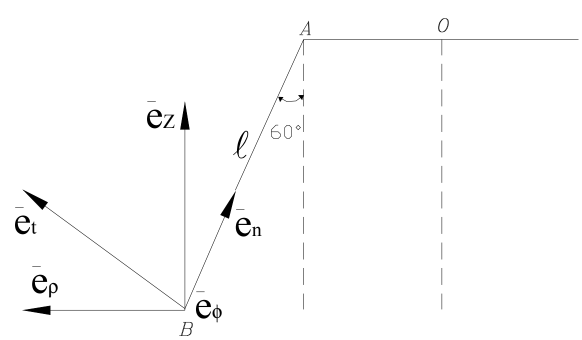
1-9.- La varilla AB uniforme de longitud ℓ (ver figura P1-9) cuelga libremente del soporte A en la cara inferior del disco $\Re$. El disco gira alrededor de un eje vertical con velocidad angular constante ω = 2 rad/seg. Si θ aumenta a razón $\dot{\theta}$ y este a $\ddot{\theta}$ = 0.1 rad/seg^2. Usando coordenadas cilíndricas, calcule la velocidad y aceleración de B, para θ = 60°, conociendo ℓ = 40 cm, b = ℓ/4 y para θ = 0°, $\dot{\theta}$=0 rad/seg.



P1-9

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios que definen las coordenadas cilíndricas (ver figura P1-9a):



P1-9a

2).- Cálculo de la velocidad angular de AB, velocidad y aceleración de B en $\Re$, para θ = 60° :

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} * \frac{d\theta}{d\theta} = \ddot{\theta} \qquad \rightarrow \qquad \int_0^{\pi/3} \ddot{\theta}\ d\theta = \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\ d\dot{\theta}$$

$$0.1 * \frac{\pi}{3} = \frac{\dot{\theta}^2}{2} \qquad \rightarrow \qquad \dot{\theta} = 0.46\ \ \text{rad/seg}$$

$$V_B = \ell \dot{\theta} = 0.184 \quad \text{m/seg}$$

$$\bar{a}_B = \ddot{\theta}\, \ell\, \bar{e}_t + \dot{\theta}^2 \ell\, \bar{e}_n = 0.04\, \bar{e}_t + 0.085\, \bar{e}_n \quad (\text{m/seg}^2)$$

3).- Identificación de los parámetros que definen el movimiento en coordenadas cilíndricas:

$$\rho = \ell sen 60° + 0.1 = 0.446\ m$$

$$\dot{\rho} = V_B \cos 60° = 0.092\ m/seg$$

$$\ddot{\rho} = a_t \cos 60° - a_n \cos 30° = -0.054\ m/seg^2$$

$$\dot{\phi} = \omega = 2\ rad/seg$$

$$\ddot{\phi} = 0$$

$$\dot{Z} = V_B sen 60° = 0.159\ m/seg$$

$$\ddot{Z} = a_t sen 60° + a_n sen 30° = 0.0598\ m/seg^2$$

4).- Cálculo de la velocidad y aceleración de B en el marco inercial tierra:

$$\bar{V}_{B/\Im} = \dot{\rho}\, \bar{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\, \bar{e}_\phi + \dot{Z}\, \bar{e}_Z = 0.092\, \bar{e}_\rho + 0.446 * 2\, \bar{e}_\phi + 0.159\, \bar{e}_Z$$

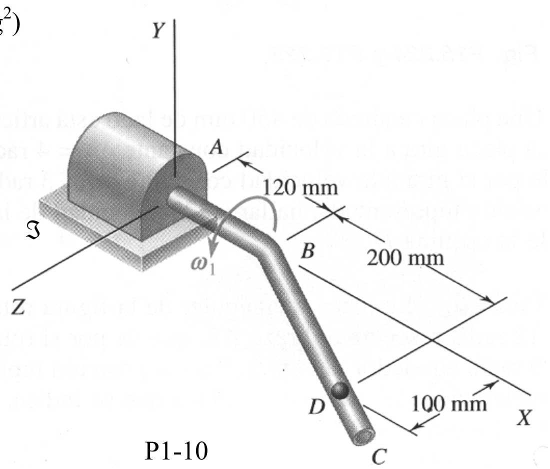
$$\bar{V}_{B/\Im} = 0.092\, \bar{e}_\rho + 0.892\, \bar{e}_\phi + 0.159\, \bar{e}_Z \ \ (\text{m/seg}) \ \rightarrow \ \left|\bar{V}_{B/\Im}\right| = 0.911 \quad \text{m/seg}$$

$$\bar{a}_{B/\Im} = (-0.054 - 0.446 * 4)\, \bar{e}_\rho + (2 * 0.092 * 2)\, \bar{e}_\phi + 0.0598\, \bar{e}_Z$$

$$\bar{a}_{B/\Im} = -1.838\, \bar{e}_\rho + 0.368\, \bar{e}_\phi + 0.0598\, \bar{e}_Z \ \ (\text{m/seg}^2)$$

$$\left|\bar{a}_{B/\Im}\right| = 1.875 \quad \text{m/seg}^2$$

1-10.- Un tubo acodado ABC gira a la velocidad angular ω_1 = 5 rad/seg, decreciendo a razón de α_1 = 1 rad/seg^2. Sabiendo que una bola de cojinete D se mueve por su interior hacia el extremo C con una celeridad relativa v = 1.5 m/seg, decreciendo a una razón de 0.5 m/seg^2. Usando coordenadas cilíndricas, para la posición mostrada, hallar la velocidad y aceleración de D.



P1-10

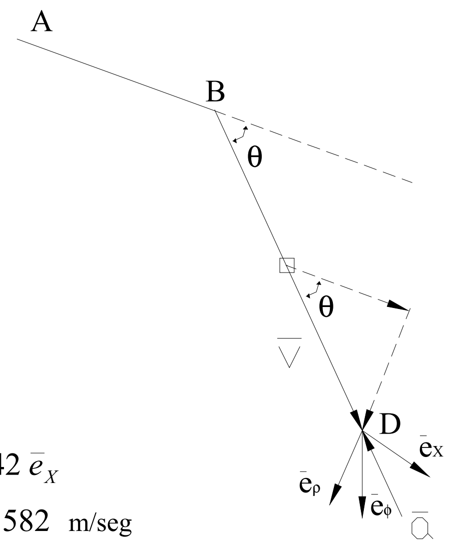
Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios que definen las coordenadas cilíndricas (ver figura P1-10a) e identificación de los parámetros que definen el movimiento:

$$tg\theta = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = 26.57°$$

$$\begin{array}{l|l} \rho = 0.1\ m & \dot{\phi} = \omega_1 = 5\ rad/seg \\ \dot{\rho} = vsen\theta = 0.671\ m/seg & \ddot{\phi} = \alpha_1 = -1\ rad/seg^2 \\ \ddot{\rho} = -asen\theta = -0.224\ m/seg^2 & \end{array}$$

$$\dot{X} = v\cos\theta = 1.342\ m/seg$$
$$\ddot{X} = -a\cos\theta = -0.447\ m/seg^2$$



P1-10a

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de D en $\Im$:

$$\overline{V}_D = \dot{\rho}\ \overline{e}_r + \rho\dot{\phi}\ \overline{e}_\phi + \dot{X}\ \overline{e}_X = 0.671\ \overline{e}_\rho + 0.1*5\ \overline{e}_\phi + 1.342\ \overline{e}_X$$

$$\overline{V}_D = 0.671\ \overline{e}_\rho + 0.5\ \overline{e}_\phi + 1.342\ \overline{e}_X \text{ (m/seg)} \rightarrow \left|\overline{V}_D\right| = 1.582 \text{ m/seg}$$

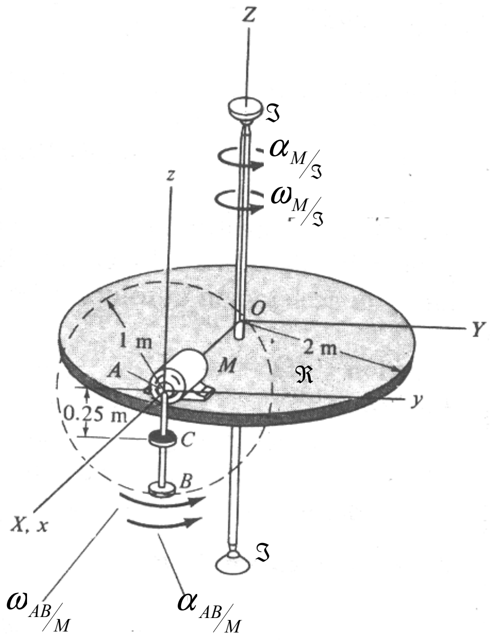
$$\overline{a}_D = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\overline{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\overline{e}_\phi + \ddot{X}\ \overline{e}_X$$

$$\overline{a}_D = \left(-0.224 - 0.1*25\right)\overline{e}_\rho + \left(2*0.671*5 - 0.1*1\right)\overline{e}_\phi - 0.447\ \overline{e}_X$$

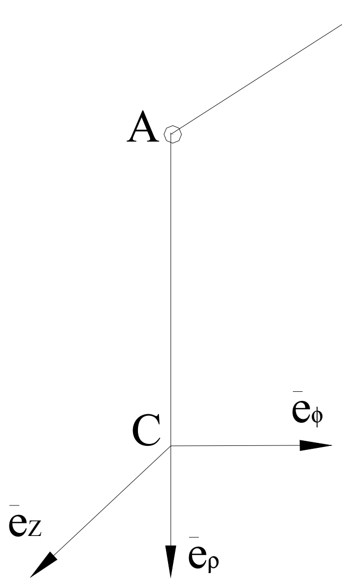
$$\overline{a}_D = -2.724\ \overline{e}_\rho + 6.61\ \overline{e}_\phi - 0.447\ \overline{e}_X \text{ (m/seg}^2\text{)}$$

$$\left|\overline{a}_D\right| = 7.167 \text{ m/seg}^2$$

1-11.- Un motor M y una barra AB tienen movimientos angulares (todas antihorarias) $\omega_{M/\Im}$ = 5 rad/seg, $\alpha_{M/\Im}$ = 2 rad/seg^2, $\omega_{AB/M}$ = 3 rad/seg y $\alpha_{AB/M}$ = 1 rad/seg^2. Un collarín C sobre la barra AB se desliza a 0.25 m de A y se está moviendo hacia abajo a lo largo de la barra con una velocidad de 3 m/seg y una aceleración de 2 m/seg^2. Determínese la velocidad y aceleración de C en este instante: a) con respecto al disco $\Re$, usando coordenadas cilíndricas en M y b) con respecto al marco inercial $\Im$, usando coordenadas cartesianas.



P1-11



P1-11a

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios que definen las coordenadas cilíndricas en M (ver figura P1-11a):

2).- Movimiento de C respecto al marco móvil motor M o al disco $\Re$ (están ligados), utilizando coordenadas cilíndricas (polares), para el instante indicado (donde $\bar{e}_\rho = -\bar{k}$ y $\bar{e}_\phi = \bar{j}$):

$$\bar{V}_{C/M} = \bar{V}_{C/\Re} = \dot{\rho}\,\bar{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\bar{e}_\phi = 3\,\bar{e}_\rho + 0.25*3\,\bar{e}_\phi$$

$$\bar{V}_{C/M} = \bar{V}_{C/\Re} = 3\,\bar{e}_\rho + 0.75\,\bar{e}_\phi \text{ (m/seg)} \quad \rightarrow \quad \left(\bar{V}_{C/M} = 0.75\bar{j} - 3\,\bar{k}\right) \text{ m/seg}$$

$$\bar{a}_{C/M} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\bar{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\bar{e}_\phi = (2 - 0.25*9)\,\bar{e}_\rho + (2*3*3 + 0.25*1)\,\bar{e}_\phi$$

$$\bar{a}_{C/M} = \bar{a}_{C/\Re} = -0.25\,\bar{e}_\rho + 18.5\,\bar{e}_\phi \text{ (m/seg}^2\text{)} \quad \rightarrow \left(\bar{a}_{C/M} = 18.5\bar{j} + 0.25\,\bar{k}\right) \text{ m/seg}^2$$

3).- Movimiento del marco móvil motor M (ligado a $\Re$) y del punto conveniente o base A :

$$\bar{\omega}_{M/\Im} = \bar{\omega}_\Re = 5\,\bar{k} \text{ (rad/seg)} \quad \text{y} \quad \dot{\bar{\omega}}_{M/\Im} = \bar{\alpha}_\Re = 2\,\bar{k} \text{ (rad/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{V}_{A/\Im} = \bar{\omega}_{M/\Im}\, x\, \bar{r}_{0A} = 5\,\bar{k}\ x\ 2\,\bar{i} = 10\bar{j} \text{ (m/seg)}$$

$$\bar{a}_{A/\Im} = \dot{\bar{\omega}}_{M/\Im}\, x\, \bar{r}_{0A} - \omega^2_{M/\Im}\bar{r}_{0A} = 2\,\bar{k}\ x\ 2\,i - 25\left(2\,\bar{i}\right) = -50\,\bar{i} + 4\bar{j} \text{ (m/seg}^2\text{)}$$

4).- Movimiento de C respecto al marco inercial $\Im$:

$$\bar{V}_{C/\Im} = \bar{V}_{A/\Im} + \bar{V}_{C/M} + \bar{\omega}_{M/\Im}\, x\, \bar{r}_{AC} = 10\,\bar{j} + 0.75\,\bar{j} - 3\,\bar{k} + 5\,\bar{k}\ x\left(-0.25\,\bar{k}\right)$$

$$\bar{V}_{C/\Im} = 10.75\ \bar{j} - 3\,\bar{k} \quad \text{(m/seg)}$$

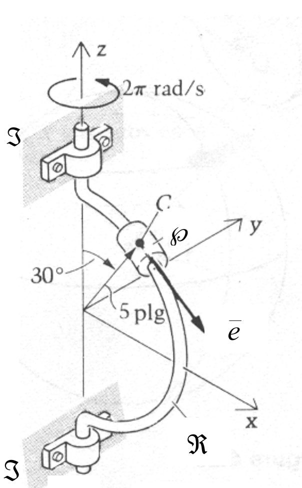
$$\bar{a}_{C/\Im} = \bar{a}_{C/\Im} + \bar{a}_{C/M} + \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{M/\Im}\ x\ \bar{r}_{AC}}^{0} + \bar{\omega}_{M/\Im}\ x\ \overbrace{\left(\bar{\omega}_{M/\Im}\, x\, \bar{r}_{AC}\right)}^{0} + 2\bar{\omega}_{M/\Im}\, x\, \bar{V}_{C/M}$$

$$2\bar{\omega}_{M/\Im}\, x\, \bar{V}_{C/M} = 10\,\bar{k}\ x\left(0.75\,\bar{j} - 3\,\bar{k}\right) = -7.5\,\bar{i} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{a}_{C/\Im} = \left(-50\,\bar{i} + 4\,\bar{j}\right) + \left(18.5\,\bar{j} + 0.25\,\bar{k}\right) - 7.5\,\bar{i}$$

$$\bar{a}_{C/\Im} = -57.5\,\bar{i} + 22.5\ \bar{j} + 0.25\,\bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

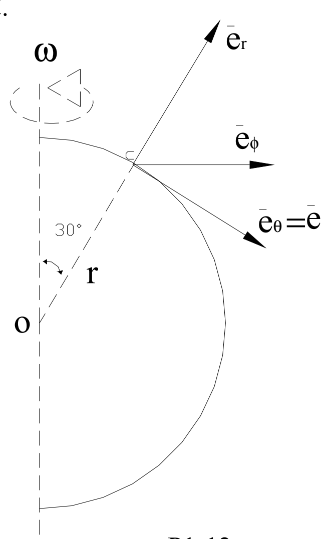
1-12.- La barra curva $\Re$ en la figura gira alrededor de la vertical a $\omega = 2\pi$ rad/seg. En centro C del collarín $\wp$ tiene velocidad y aceleración relativos a $\Re$ de 20 $\bar{e}$ plg/seg y $-10\,\bar{e}$ plg/seg^2 respectivamente; $\bar{e}$ tiene la dirección de la velocidad de C en $\Re$. Usando coordenadas esféricas, para el instante dado, calcule la velocidad y aceleración de C en el marco $\Im$ en el que gira $\Re$.



P1-12

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios de la coordenada esférica (ver figura P1-12a) e identificación de los parámetros que definen el movimiento:



P1-12a

$$\left| \begin{array}{l} r = 5\ p\lg \\ \dot{r} = 0 \\ \ddot{r} = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \theta = 30^\circ \\ \dot{\theta} = \dfrac{20}{5} = 4\ rad/seg \\ \ddot{\theta} = -\dfrac{10}{5} = -2\ rad/seg^2 \end{array} \left| \begin{array}{l} \dot{\phi} = 2\pi\ rad/seg \\ \ddot{\phi} = 0 \end{array} \right|$$

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de C en $\Im$:

$$\overline{V}_{C/\Im} = \overset{0}{\overbrace{\dot{r}}}\,\overline{e}_r + r\dot{\theta}\,\overline{e}_\theta + r\dot{\phi}sen\theta\,\overline{e}_\phi = 5*4\,\overline{e}_\theta + 5*2\pi\ sen30^\circ\,\overline{e}_\phi$$

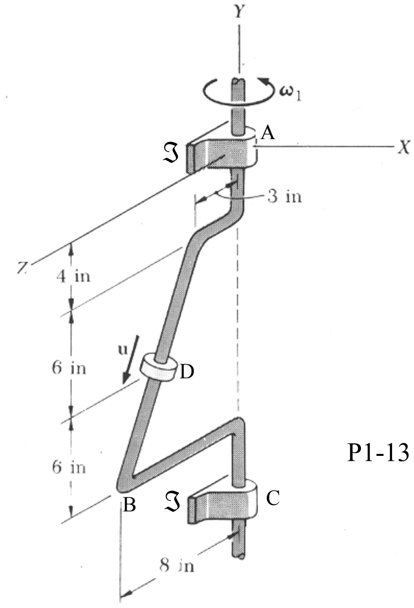
$$\overline{V}_{C/\Im} = 20\,\overline{e}_\theta + 15.71\,\overline{e}_\phi \quad \text{(plg/seg)} \quad \rightarrow \quad \left|\overline{V}_{C/\Im}\right| = 25.43\ \text{plg/seg}$$

$$\overline{a}_{C/\Im} = \left(-r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 sen^2\theta\right)\overline{e}_r + \left(r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 sen\theta\cos\theta\right)\overline{e}_\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\,\overline{e}_\phi$$

$$\overline{a}_{C/\Im} = -129.35\,\overline{e}_r - 95.53\,\overline{e}_\theta + 217.8\,\overline{e}_\phi \quad \text{(plg/seg}^2\text{)}$$

$$\left|\overline{a}_{C/\Im}\right| = 270.73\ \text{plg/seg}^2$$

1-13.- La barra doblada gira a una velocidad angular constante ω_1 = 4 rad/seg. Sabiendo que el collarín D se desplaza hacia abajo a lo largo de ella con velocidad constante relativa u = 65 plg/seg, para la posición mostrada en la figura, determine usando coordenadas cilíndricas, la velocidad y aceleración de D.

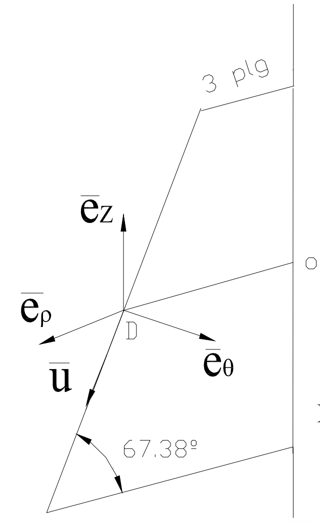


P1-13

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios que definen las coordenadas cilíndricas (ver figura P1-13a) e identificación de los parámetros, que definen el movimiento:

$$\rho = 5.5 \quad p\lg \qquad \dot{\theta} = 4\ rad/seg \qquad \dot{Z} = -60\ pls/seg$$
$$\dot{\rho} = 25 \quad p\lg/seg \qquad \ddot{\theta} = 0 \qquad \ddot{Z} = 0$$
$$\ddot{\rho} = 0$$



P1-13a

3).- Cálculo de la velocidad y aceleración de D:

$$\bar{V}_D = \dot{\rho}\,\bar{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\bar{e}_\theta + \dot{Z}\,\bar{e}_Z = 25\,\bar{e}_\rho + 5.5*4\,\bar{e}_\theta - 60\,\bar{e}_Z$$

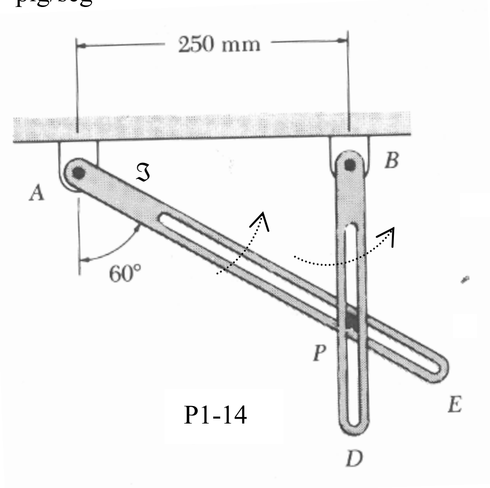
$$\bar{V}_D = 25\,\bar{e}_\rho + 22\,\bar{e}_\theta - 60\,\bar{e}_Z \quad \text{(plg/seg)}$$

$$\left|\bar{V}_D\right| = 68.62 \quad \text{plg/seg}$$

$$\bar{a}_D = -\rho\dot{\theta}^2\bar{e}_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\,\bar{e}_\theta = -5.5*16\,\bar{e}_\rho + 2*25*4\,\bar{e}_\theta$$

$$\bar{a}_D = -88\,\bar{e}_\rho + 200\,\bar{e}_\theta \quad \text{(plg/seg}^2\text{)} \quad \rightarrow \quad \left|\bar{a}_D\right| = 218.5 \quad \text{plg/seg}^2$$

1-14.- El movimiento del pasador "P" está guiado por la ranura de las barra AE y BD. Sabiendo que las barra giran con velocidades angulares antihorarias constantes $\omega_{AE} = 4$ rad/seg y $\omega_{BD} = 5$ rad/seg. Determine, para la posición indicada: a) usando coordenadas polares, la velocidad del pasador P y b) el radio de curvatura de la trayectoria de P.

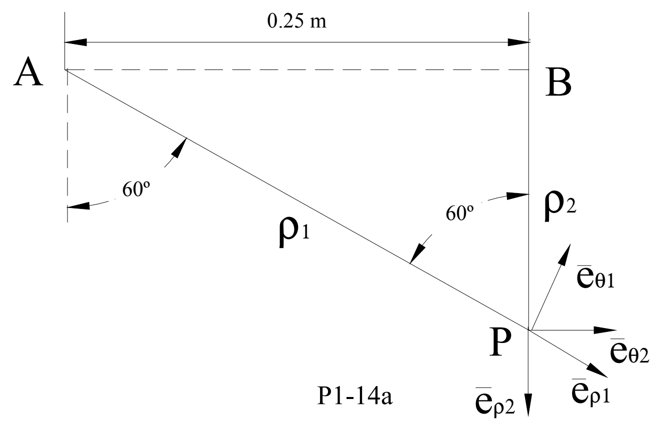


P1-14

Solución

1).- Para la parte a) utilizaremos coordenadas polares.

a).- Orientación de los vectores unitarios que definen las coordenadas polares:



P1-14a

$$\rho_1 = 0.289 \quad \text{m} \quad \text{y} \qquad \rho_2 = 0.144 \quad \text{m}$$

$$\bar{e}_{\rho 1} = sen30°\,\bar{e}_{\rho 2} + \cos 30°\,\bar{e}_{\theta 2}$$

$$\bar{e}_{\theta 1} = -\cos 30°\,\bar{e}_{\rho 2} + sen30°\,\bar{e}_{\theta 2}$$

b).- Cálculo de la velocidad de P:

i).- Tomando como punto de referencia a A:

$$\overline{V}_P = \dot{\rho}_1 \ \overline{e}_{\rho 1} + \rho_1 \dot{\theta}_1 \ \overline{e}_{\theta 1}$$

$$\overline{V}_P = \dot{\rho}_1 \left(sen30° \ \overline{e}_{\rho 2} + \cos 30° \ \overline{e}_{\theta 2} \right) + 0.289 * 4 \left(-\cos 30° \ \overline{e}_{\rho 2} + sen30° \ \overline{e}_{\theta 2} \right)$$

$$\overline{V}_P = \left(\dot{\rho}_1 sen30° - 1.156 \cos 30° \right) \overline{e}_{\rho 2} + \left(\dot{\rho}_1 \cos 30° + 1.156 sen30° \right) \overline{e}_{\theta 2} \qquad (1)$$

ii).- Tomando como punto de referencia a B:

$$\overline{V}_P = \dot{\rho}_2 \ \overline{e}_{\rho 2} + \rho_2 \dot{\theta}_2 \ \overline{e}_{\theta 2} = \dot{\rho}_2 \ \overline{e}_{\rho 2} + 0.144 * 5 \ \overline{e}_{\theta 2}$$

$$\overline{V}_P = \dot{\rho}_2 \ \overline{e}_{\rho 2} + 0.72 \ \overline{e}_{\theta 2} \qquad (2)$$

(1) = (2) e igualando componentes:

$$\dot{\rho}_1 \cos 30° + 1.156 sen30° = 0.72 \quad \rightarrow \quad \dot{\rho}_1 = 0.164 \ \text{ m/seg}$$

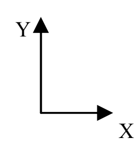
En (1):

$$\overline{V}_P = 0.164 \ \overline{e}_{\rho 1} + 1.156 \ \overline{e}_{\theta 1} \quad \text{(m/seg)} \quad \rightarrow \quad \left| \overline{V}_P \right| = 1.168 \quad \text{m/seg}$$

2).- Para encontrar el radio de curvatura utilizaremos movimientos en marcos móviles.-

Si: P'$\in$ a AE y P'' $\in$ a BD, ambos coincidentes con P y sabiendo que:

$$\frac{1}{\rho_C} = \frac{\left| \overline{V}_{P/\Im} \ x \ \overline{a}_{P/\Im} \right|}{\left| \overline{V}_{P/\Im} \right|^3}$$



a).- Cálculo de la velocidad de P en $\Im$:

i).- Velocidad de P, tomando como punto de referencia A en $\Im$:

$$\overline{V}_{P/\Im} = \overline{V}_{P'/\Im} + \overline{V}_{P/AE}$$

$$\overline{V}_{P/\Im} = 4 \ \overline{k} \ x \left(0.25 \ \overline{i} - 0.144 \ \overline{j} \right) + V_{P/AE} \left(sen60° \ \overline{i} - \cos 60° \ \overline{j} \right)$$

$$\overline{V}_{P/\Im} = \left(0.576 + 0.866 \ \overline{V}_{P/AE} \right) \overline{i} + \left(1 - 0.5 \ V_{P/AE} \right) \overline{j} \qquad (3)$$

ii).- Velocidad de P, tomando como punto de referencia B en $\Im$:

$$\bar{V}_{P/\Im} = \bar{V}_{P''/\Im} + \bar{V}_{P/BD} = 5\,\bar{k}\; x\left(-0.144\,\bar{j}\right) + V_{P/BD}\,\bar{j}$$

$$\bar{V}_{P/\Im} = 0.72\,\bar{i} + V_{P/BD}\,\bar{j} \qquad (4)$$

(3) = (4) e igualando componentes:

$$0.576 + 0.866\, V_{P/AE} = 0.72 \quad \rightarrow \quad V_{P/AE} = 0.166 \text{ m/seg}$$

$$1 - 0.5 * 0.166 = V_{P/BD} \quad \rightarrow \quad V_{P/BD} = 0.917 \text{ m/seg}$$

Luego:

$$\bar{V}_{P/AE} = 0.166\left(0.866\,\bar{i} - 0.5\,\bar{j}\right) \text{ (m/seg)} \;\; \text{y} \;\; \bar{V}_{P/BD} = 0.917\,\bar{j} \text{ (m/seg)}$$

En (4):

$$\bar{V}_{P/\Im} = 0.72\,\bar{i} + 0.917\,\bar{j} \text{ (m/seg)}$$

b).- Cálculo de la aceleración de P en $\Im$.-

i).- Aceleración de P, tomando como punto de referencia A en $\Im$:

$$\bar{a}_{P/\Im} = \bar{a}_{P'/\Im} + 2\bar{\omega}_{AE}\, x\, \bar{V}_{P/AE} + \bar{a}_{P/AE}$$

$$\bar{a}_{P'/\Im} = -\omega_{AE}^2\,\bar{r}_{AP} = -16\left(0.25\,\bar{i} - 0.144\,\bar{j}\right) = -4\,\bar{i} + 2.304\,\bar{j} \text{ (m/seg}^2\text{)}$$

$$2\bar{\omega}_{AE}\, x\, \bar{V}_{P/AE} = 8\,\bar{k}\; x\; 0.166\left(0.866\,\bar{i} - 0.5\,\bar{j}\right) = 0.664\,\bar{i} + 1.15\,\bar{j} \text{ (m/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{a}_{P/AE} = a_{P/AE}\left(0.866\, i - 0.5\,\bar{j}\right) = 0.866\, a_{P/AE}\,\bar{i} - 0.5\, a_{P/AE}\,\bar{j} \text{ (m/seg}^2\text{)}$$

Luego:

$$\bar{a}_{P/\Im} = \left(-4 + 0.664 + 0.866\, a_{P/AE}\right)\bar{i} + \left(2.304 + 1.15 - 0.5\, a_{P/AE}\right)\bar{j}$$

$$\bar{a}_{P/\Im} = \left(0.866\, a_{P/AE} - 3.336\right)\bar{i} + \left(3.454 - 0.5\, a_{P/AE}\right)\bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)} \qquad (5)$$

ii).- Aceleración de P, tomando como punto de referencia B en $\Im$:

$$\bar{a}_{P/\Im} = \bar{a}_{P"/\Im} + 2\bar{\omega}_{BD}\, x\, \bar{V}_{P/BD} + \bar{a}_{P/BD}$$

$$\bar{a}_{P"/\Im} = -\omega_{BD}^2 \bar{r}_{BP} = -25\left(-0.144\,\bar{j}\right) = 3.6\ \bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$2\bar{\omega}_{BD}\, x\, \bar{V}_{P/BD} = 10\ \bar{k}\ x\ 0.917\ \bar{j} = -9.17\ \bar{i} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{a}_{P/BD} = a_{P/BD}\ \bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

Luego:

$$\bar{a}_{P/\Im} = -9.17\ \bar{i} + \left(3.6 + a_{P/BD}\right)\bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)} \qquad (6)$$

(5) = (6) e igualando componentes:

$$0.866\, a_{P/AE} - 3.336 = -9.17 \quad \rightarrow \quad a_{P/AE} = -6.74 \ \ \text{m/seg}^2$$

$$3.454 - 0.5\left(-6.74\right) = 3.6 + a_{P/BD} \quad \rightarrow \quad a_{P/BD} = 3.224 \ \ \text{m/seg}^2$$

En (6):

$$\bar{a}_{P/\Im} = -9.17\ \bar{i} + 6.824\ \bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

c).- Cálculo del radio de curvatura:

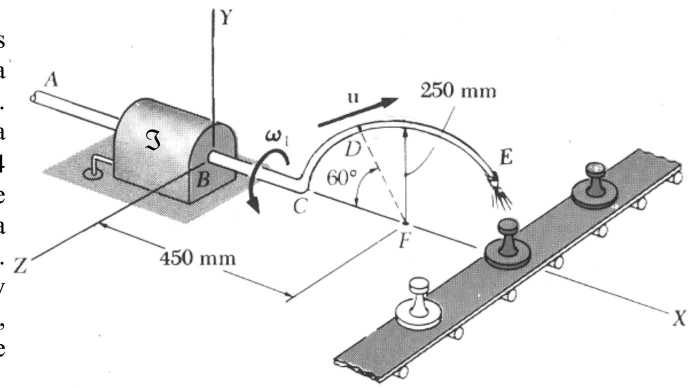
$$\bar{V}_{P/\Im}\, x\, \bar{a}_{P/\Im} = \left(.72\ \bar{i} + 0.917\ \bar{j}\right) x \left(-9.17\ \bar{i} + 6.824\ \bar{j}\right) = 13.31\ \bar{k} \quad \text{(m}^2\text{/seg}^3\text{)}$$

$$\left|\bar{V}_{P/\Im}\right|^3 = 1.585 \quad \text{(m}^3\text{/seg}^3\text{)}$$

Luego:

$$\frac{1}{\rho_C} = \frac{\left|\bar{V}_{P/\Im}\, x\, \bar{a}_{P/\Im}\right|}{\left|\bar{V}_{P/\Im}\right|^3} = \frac{13.31}{1.581} = 8.397 \quad \rightarrow \quad \rho_C = 0.119 \ \text{m} \quad \rightarrow \quad \rho_C = 119 \ \ \text{mm}$$

1-15.- Ciertos productos manufacturados se pintan con un rociador al pasar por una estación de trabajo que se muestra. Sabiendo que el tubo doblado ACE gira a una velocidad angular constante ω_1 = 0.4 rad/seg y la partícula D de la pintura se mueve con respecto al tubo con una velocidad constante u = 150 mm/seg. Usando coordenadas cilíndricas y esféricas, para la posición mostrada, determínese la velocidad y aceleración de D.

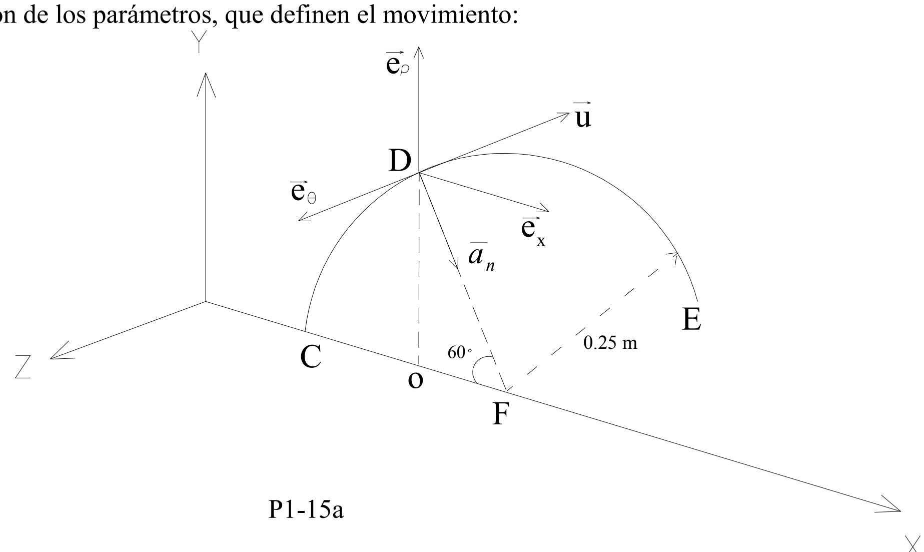


P1-15

Solución

1).- Usando coordenadas cilíndricas.-

a).- Orientación de los vectores unitarios, que definen las coordenadas cilíndricas (ver figura P1-15a) e identificación de los parámetros, que definen el movimiento:



P1-15a

$$\rho = 0.25sen60° = 0.217\ m$$
$$\dot{\rho} = usen30° = 0.075\ m/seg$$
$$\ddot{\rho} = -\frac{u^2}{r}\cos 30°$$
$$\ddot{\rho} = -0.078\ m/seg^2$$

$$\dot{\theta} = \omega_1$$
$$\omega_1 = 0.4\ rad/seg$$
$$\ddot{\theta} = 0$$

$$\dot{X} = 0.15\cos 30° = 0.13\ m/seg$$
$$\ddot{X} = \frac{u^2}{r} sen30° = 0.045\ m/seg^2$$

b).- Cálculo de la velocidad y aceleración de D:

$$\overline{V}_D = \dot{\rho}\,\overline{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\overline{e}_\theta + \dot{X}\,\overline{e}_X = 0.075\,\overline{e}_\rho + 0.217*0.4\,\overline{e}_\theta + 0.13\,\overline{e}_X$$

$$\overline{V}_D = 0.075\,\overline{e}_\rho + 0.0868\,\overline{e}_\theta + 0.13\,\overline{e}_X \quad \text{(m/seg)} \quad \rightarrow \quad \left|\overline{V}_D\right| = 0.1734 \ \text{m/seg}$$

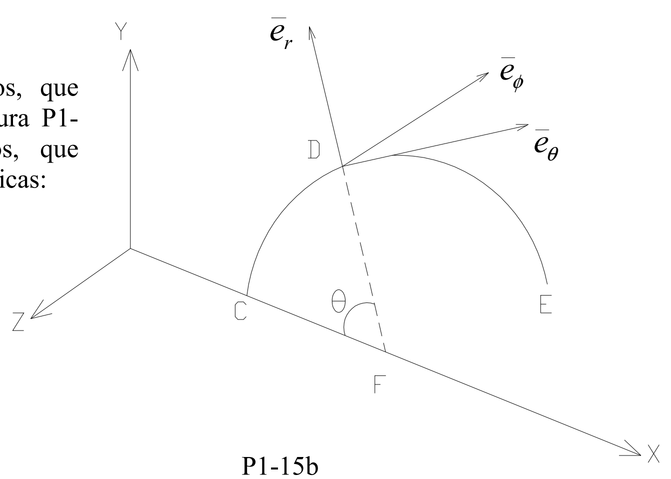
$$\overline{a}_D = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\overline{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\overbrace{\ddot{\theta}}^{0}\right)\overline{e}_\theta + \ddot{X}\,\overline{e}_X$$

$$\overline{a}_D = \left(-0.078 - 0.035\right)\overline{e}_\rho + 0.06\,\overline{e}_\theta + 0.045\,\overline{e}_X$$

$$\overline{a}_D = -0.113\,\overline{e}_\rho + 0.06\,\overline{e}_\theta + 0.045\,\overline{e}_X \quad \text{(m/seg}^2\text{)} \quad \rightarrow \quad \left|\overline{a}_D\right| = 0.136 \ \text{m/seg}^2$$

2).- Usando coordenadas esféricas.-

a).- Orientación de los vectores unitarios, que definen las coordenadas esféricas (ver figura P1-15b) e identificación de los parámetros, que definen el movimiento en coordenadas esféricas:



P1-15b

$r = 0.25\ m$	$\theta = 60°$
$\dot{r} = 0$	$\dot{\theta} = 0.6\ rad/seg$
$\ddot{r} = 0$	$\ddot{\theta} = 0$

$\dot{\phi} = -0.4\ rad/seg$

$\ddot{\phi} = 0$

b).- Cálculo de la velocidad y aceleración de D:

$$\overline{V}_D = \dot{r}\,\overline{e}_r + r\dot{\theta}\,\overline{e}_\theta + r\dot{\phi}\,sen\theta\,\overline{e}_\phi = 0.25*0.6\,\overline{e}_\theta - 0.25*0.4\,sen60°\,\overline{e}_\phi$$

$$\overline{V}_D = 0.15\,\overline{e}_\theta - 0.0866\,\overline{e}_\phi \quad \text{(m/seg)} \rightarrow \left|\overline{V}_D\right| = 0.1732 \ \text{m/seg}$$

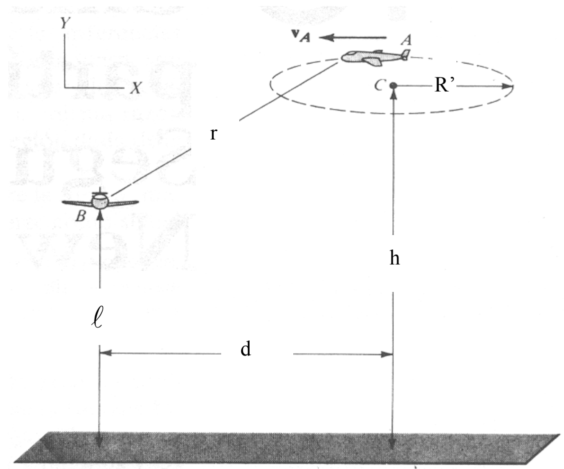
$$\overline{a}_D = \left(-r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 sen^2\theta\right)\overline{e}_r + \left(-r\dot{\phi}^2 sen\theta\cos\theta\right)\overline{e}_\theta + 2r\dot{\theta}\,\dot{\phi}\cos\theta\,\overline{e}_\phi$$

$$\overline{a}_D = \left(-0.25*0.6^2 - 0.25*0.4^2 sen^2 60°\right)\overline{e}_r - 0.25*0.4^2 sen\ 60°\cos 60°\,\overline{e}_\theta - 2*0.25*0.6*0.4\cos 60°\,\overline{e}_\phi$$

$$\bar{a}_D = -0.12\,\bar{e}_r - 0.0173\,\bar{e}_\theta - 0.06\,\bar{e}_\phi \quad (\text{m/seg}^2) \quad \rightarrow \quad \left|\bar{a}_D\right| = 0.1353 \quad \text{m/seg}^2$$

1-16.- Considere la situación de tránsito aéreo de la figura. El avión de control A vuela con velocidad constante V_A en un patrón circular a una altura h = 15000 pies, mientras que otro avión B vuela a una altura ℓ = 8000 pies. Suponga que B y C están en el plano XY como se indica. Calcule $\dot{r}$ y $\ddot{r}$ para $\bar{V}_A$ = -300 $\bar{i}$ (pies/seg), $\bar{V}_B$ = - 600 $\bar{k}$ (pies/seg), R' = 5000 pies y d = 9000 pies.

.



P1-16

Solución

1).- Movimiento del marco móvil A y del punto base A:

$$\bar{\omega} = \dot{\bar{\omega}} = \bar{0}$$

$$\bar{R} = 15000\,\bar{j} \quad (\text{pies})$$

$$\dot{\bar{R}} = -300\,\bar{i} \quad (\text{pie/seg})$$

$$\ddot{\bar{R}} = \frac{300^2}{500}\,\bar{e}_n = 18\,\bar{k} \quad (\text{pie/seg}^2)$$

2).- Movimiento de B respecto a A:

$$\bar{\rho} = -9000\,\bar{i} - 7000\,\bar{j} \quad (\text{pies})$$

$$\dot{\bar{\rho}} = ? \quad \text{y} \quad \ddot{\bar{\rho}} = ?$$

3).- Movimiento de B respecto al marco inercial tierra:

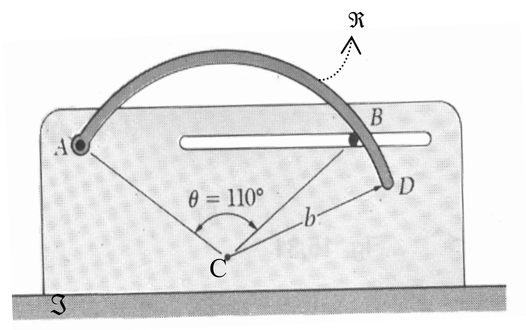
$$\bar{V}_B = \dot{\bar{R}} + \overbrace{\bar{\omega}}^{0}\;x\;\bar{\rho} + \dot{\bar{\rho}}$$

$$-600\,\bar{k} = -300\,\bar{i} + \dot{\bar{\rho}} \quad \rightarrow \quad \dot{\bar{\rho}} = 300\,\bar{i} + 600\,\bar{k} \quad (\text{pie/seg})$$

$$\left|\dot{\bar{\rho}}\right| = \dot{r} = 670.82 \quad \text{pie/seg}$$

$$\bar{a}_B = \ddot{\bar{R}} + \overbrace{\dot{\bar{\omega}}}^{0} \, x \, \bar{\rho} + \overbrace{\bar{\omega}}^{0} \, x \left(\overbrace{\bar{\omega}}^{0} \, x \, \bar{\rho} \right) + 2\overbrace{\bar{\omega}}^{0} \, x \, \dot{\bar{\rho}} + \ddot{\bar{\rho}}$$

$$\bar{0} = 18\,\bar{k} + \ddot{\bar{\rho}} \quad \rightarrow \quad \ddot{\bar{\rho}} = -18\,\bar{k} \;\; \text{(pie/seg}^2\text{)} \quad \rightarrow \quad \left|\ddot{\bar{\rho}}\right| = \ddot{r} = 18 \;\; \text{pie/seg}^2$$



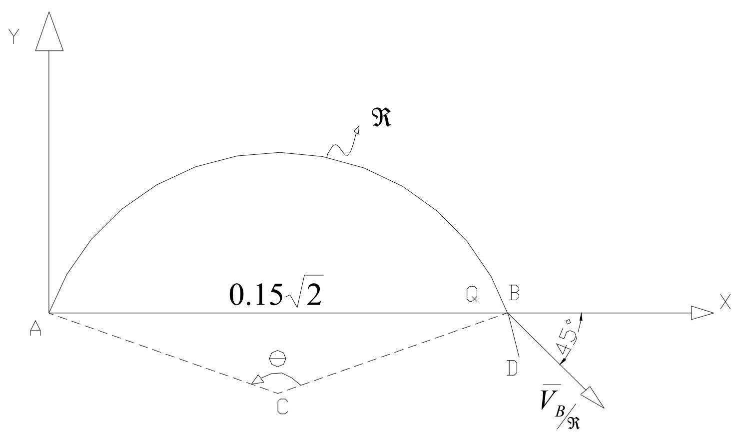
P1-17

1-17.- La barra AD está doblada en forma de un arco de circunferencia de radio b = 150 mm/seg. La posición de la barra se controla mediante el pasador B que desliza en la ranura horizontal y también a lo largo de la barra. Sabiendo que para θ = 90° el pasador B se mueve a la derecha con una velocidad constante de 75 mm/seg, determínese la velocidad y aceleración angulares de la barra.

Solución

1).- Cálculo de la velocidad angular de la barra doblada:

Si: Q ∈ a ℜ y coincide con B



P1-17a

$$\bar{V}_{B/\Im} = \bar{V}_{B/\Re} + \bar{V}_{Q/\Im} \qquad (1)$$

Donde:

$$\bar{V}_{B/\Im} = 0.075\,\bar{i} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{V}_{B/\Re} = V_{B/\Re}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\bar{i} - \bar{j}\right) \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{V}_{Q/\Im} = \omega\,\bar{k}x\left(0.15\sqrt{2}\,\bar{i}\right) = 0.15\sqrt{2}\omega\,\bar{j} \;\; \text{m/seg}$$

Luego en (1):

$$0.075\,\bar{i} = V_{B/\Re}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\bar{i} - \bar{j}\right) + 0.15\sqrt{2}\omega\,\bar{j}$$

Igualando componentes y operando:

$$V_{B/\Re}\frac{\sqrt{2}}{2}=0.075 \quad \rightarrow \quad V_{B/\Re}=0.106 \quad \text{m/seg}$$

$$0=-V_{B/\Re}\frac{\sqrt{2}}{2}+0.15\sqrt{2}\omega \quad \rightarrow \quad V_{B/\Re}\frac{\sqrt{2}}{2}=0.15\sqrt{2}\omega$$

$$0.075=0.15\sqrt{2}\omega \quad \rightarrow \quad \omega=0.354 \quad \text{rad/seg}$$

2).- Cálculo de la aceleración angular de la barra doblada:

$$\bar{a}_{B/\Im}=\bar{a}_{B/\Re}+\bar{a}_{Q/\Im}+2\bar{\omega}\ x\ \bar{V}_{B/\Re}$$

Si:

$$\bar{a}_{B/\Im}=\bar{0}$$

$$\bar{a}_{B/\Re}=\frac{V_{B/\Re}^2}{\rho_C}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\bar{i}-\bar{j}\right)+a_t\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\bar{i}-\bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_{Q/\Im}=\alpha\ \bar{k}\ x\ 0.15\sqrt{2}\ \bar{i}-\omega^2\left(0.15\sqrt{2}\ \bar{i}\right)=0.15\sqrt{2}\alpha\ \bar{j}-0.15\sqrt{2}\omega^2\bar{i}$$

$$2\bar{\omega}\ x\ \bar{V}_{B/\Re}=0.708\bar{k}\ x\ 0.106\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\bar{i}-\bar{j}\right)=0.053\left(\bar{i}+\bar{j}\right)$$

Luego:

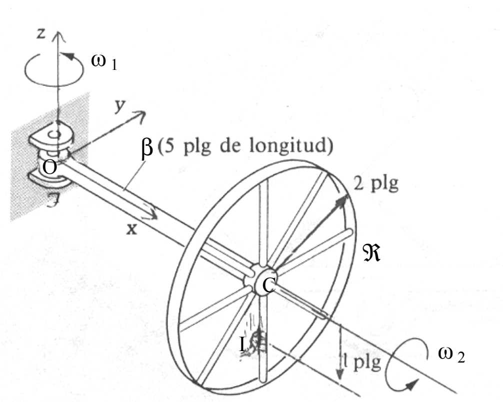
$$\bar{0}=\begin{pmatrix} a_t\dfrac{\sqrt{2}}{2}-7.945x10^{-3}- \\ 0.0265+0.053\end{pmatrix}\bar{i}+\begin{pmatrix}-7.945x10^{-3}-a_t\dfrac{\sqrt{2}}{2}+ \\ 0.15\sqrt{2}\alpha+0.053\end{pmatrix}\bar{j}$$

Igualando componentes y operando:

$$0=a_t\frac{\sqrt{2}}{2}+0.0185 \quad \rightarrow \quad a_t=0.0262 \quad \text{m/seg}^2$$

$$0=0.045-0.0185+0.212\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha=0.1253 \quad \text{rad/seg}^2$$

1-18.- La barra eje β de 5 plg de longitud en la figura gira en el gozne $\Im$ a $\omega_1 = 3$ rad/seg en el sentido indicado. La rueda gira simultáneamente a $\omega_2 = 2$ rad/seg alrededor de su eje como se indica; ambas rapideces son constantes. El insecto se desplaza hacia adentro sobre un rayo de la rueda a 0.2 plg/seg y aumentando a razón de 0.1 plg/seg^2, ambas magnitudes con relación al rayo. Para el instante mostrado, encuentre: a) la velocidad angular de la rueda y b) la aceleración del insecto.



P1-18

Solución

1).- Movimiento del marco móvil rueda $\Re$ y del punto base C:

$$\bar{\omega}_{\Re/\Im} = \bar{\omega}_{\Re/\beta} + \bar{\omega}_{\beta/\Im} = 2\,\bar{i} + 3\,\bar{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im} = \bar{\omega}_{\beta/\Im}\ x\ \bar{\omega}_{\Re/\beta} = 3\,\bar{k}\ x\ 2\,\bar{i} = 6\,\bar{j} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{V}_{C/\Im} = \bar{\omega}_{\beta/\Im}\ x\ \bar{r}_{OC} = 3\,\bar{k}\ x\ 5\,\bar{i} = 15\,\bar{j} \quad \text{(plg/seg)}$$

$$\bar{a}_{C/\Im} = \bar{\omega}_{\beta/\Im}\ x\left(\bar{\omega}_{\beta/\Im}\,x\,\bar{r}_{OC}\right) \quad \rightarrow \quad \bar{a}_{C/\Im} = 3\,\bar{k}\ x\ 15\,\bar{j} = -45\,\bar{i} \quad \text{(plg/seg}^2\text{)}$$

2).- Movimiento del insecto I respecto a la rueda $\Re$:

$$\bar{r}_{CI} = -\bar{k} \ \text{(plg)}, \quad \bar{V}_{I/\Re} = 0.2\,\bar{k} \ \text{(plg/seg)} \quad \text{y} \quad \bar{a}_{I/\Re} = 0.1\,\bar{k} \ \text{(plg/seg}^2\text{)}$$

3).- Movimiento del insecto I en el marco $\Im$:

$$\bar{V}_{I/\Im} = \bar{V}_{C/\Im} + \bar{\omega}_{\Re/\Im}\,x\,\bar{r}_{CI} + \bar{V}_{I/\Re} = 15\,\bar{j} + \left(2\,\bar{i} + 3\,\bar{k}\right)x\left(-\bar{k}\right) + 0.2\,\bar{k}$$

$$\bar{V}_{I/\Im} = 17\,\bar{j} + 0.2\,\bar{k} \quad \text{(plg/seg)} \qquad \rightarrow \qquad \left|\bar{V}_{I/\Im}\right| = 17.001 \ \text{plg/seg}$$

$$\bar{a}_{I/\Im} = \bar{a}_{C/\Im} + \dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im}\,x\,\bar{r}_{CI} + \bar{\omega}_{\Re/\Im}\,x\left(\bar{\omega}_{\Re/\Im}\,x\bar{r}_{CI}\right) + 2\bar{\omega}_{\Re/\Im}\,x\,\bar{V}_{I/\Re} + \bar{a}_{I/\Re}$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im}\,x\,\bar{r}_{CI} = 6\,\bar{j}\ x\left(-\bar{k}\right) = -6\,\bar{i} \quad \text{(plg/seg}^2\text{)}$$

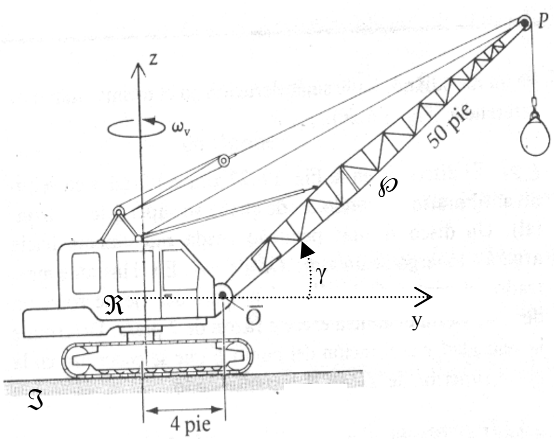
$$\bar{\omega}_{\Re/\Im}\, x \left(\bar{\omega}_{\Re/\Im}\, x\, \bar{r}_{C\,I}\right) = \left(2\,\bar{i} + 3\,\bar{k}\right) x\; 2\;\bar{j} = -6\,\bar{i} + 4\,\bar{k} \quad (\text{plg/seg}^2)$$

$$2\bar{\omega}_{\Re/\Im}\, x\, \bar{V}_{I/\Re} = \left(4\,\bar{i} + 6\,\bar{k}\right) x\; 0.2\;\bar{k} = -0.8\;\bar{j} \quad (\text{plg/seg}^2)$$

$$\bar{a}_{I/\Im} = \left(-45 - 6 - 6\right)\bar{i} - 0.8\;\bar{j} + \left(0.1 + 4\right)\bar{k}$$

$$\bar{a}_{I/\Im} = -57\;\bar{i} - 0.8\;\bar{j} - 4.1\;\bar{k} \quad (\text{plg/seg}^2) \quad \rightarrow \quad \left|\bar{a}_{C/\Im}\right| = 57.15 \quad \text{plg/seg}^2$$

1-19.- La grúa $\Re$ en la figura gira alrededor de la vertical con ω_V = 0.2 rad/seg constante y simultáneamente un aguilón $\wp$ de 50 pies de longitud se levanta con rapidez creciente ω_H = 0.1 t rad/seg. Los ejes (x,y,z) están fijos a la grúa $\Re$ en O y el aguilón tiene la dirección del eje "y" cuando t = 0. Halle, cuando el aguilón forma un ángulo de 60° con la horizontal: a) $\bar{\omega}_{\wp/\Im}$ y $\bar{\alpha}_{\wp/\Im}$ y b) usando coordenadas esféricas en $\Re$, $\bar{V}_{P/\Im}$ y $\bar{a}_{P/\Im}$.



P1-19

Solución

1).- Cálculo del movimiento angular de β:

$$\bar{\omega}_{\wp/\Im} = \bar{\omega}_{\wp/\Re} + \bar{\omega}_{\Re/\Im} = \bar{\omega}_H + \bar{\omega}_V \qquad (1)$$

$$\bar{\alpha}_{\wp/\Im} = \dot{\bar{\omega}}_{\wp/\Re} + \bar{\omega}_{\Re/\Im}\, x\, \bar{\omega}_{\wp/\Re} + \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{\wp/\Re}}^{0} \qquad (2)$$

a).- Cálculo del movimiento angular de ω_H en γ = 60°:

$$\omega_H = \frac{d\gamma}{dt} = 0.1\,t \quad \rightarrow \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\gamma = \int_0^t 0.1\,t\;dt \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{3} = 0.05\,t^2 \quad \rightarrow \quad t = 4.58 \;\; \text{seg}$$

Luego:

$\omega_H = 0.458$ rad/seg y $\dot{\omega}_H = 0.1$ rad/seg^2

b).- Cálculo del movimiento angular de β en (1) y (2), para t = 4.58 seg:

$$\bar{\omega}_{\wp/\Im} = 0.458\,\bar{i} + 0.2\,\bar{k} \quad \text{(rad/seg)} \tag{3}$$

$$\left|\bar{\omega}_{\wp/\Im}\right| = 0.499 \cong 0.5 \text{ rad/seg}$$

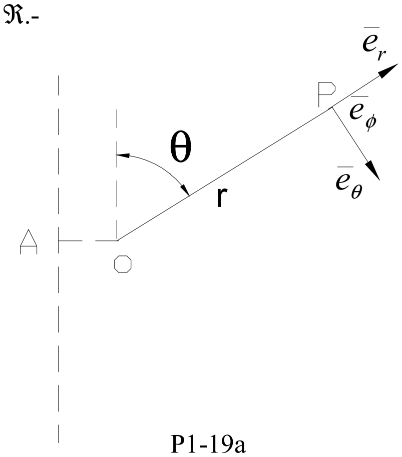
$$\bar{\alpha}_{\wp/\Im} = 0.1\,\bar{i} + 0.2\bar{k}\ x\ 0.458\,\bar{i} = 0.1\,\bar{i} + 0.916\,\bar{j} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)} \tag{4}$$

$$\left|\bar{\alpha}_{\wp/\Im}\right| = 0.136 \text{ rad/seg}^2$$

2).- Cálculo del movimiento de P usando coordenadas esféricas en $\Re$.-

a).- Orientación de los vectores unitarios que definen las coordenadas esféricas (ver figura P1-19a) e identificación de los parámetros que definen el movimiento:

$$\left| \begin{array}{l} r = 50\ pies \\ \dot{r} = 0 \\ \ddot{r} = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \theta = 30° \\ \dot{\theta} = -0.458\ rad/seg \\ \ddot{\theta} = -0.1\ rad/seg^2 \end{array} \left| \begin{array}{l} \dot{\phi} = 0 \\ \\ \ddot{\phi} = 0 \end{array} \right|$$



P1-19a

b).- Cálculo de la velocidad y aceleración de P en $\Re$:

$$\bar{V}_{P/\Re} = r\dot{\theta}\,\bar{e}_\theta = 50(-0.458)\,\bar{e}_\theta = -22.9\,\bar{e}_\theta \quad \text{(pie/seg)}$$

$$\bar{a}_{P/\Re} = -r\dot{\theta}^2\,\bar{e}_r + r\ddot{\theta}\,\bar{e}_\theta = -10.48\,\bar{e}_r - 5\,\bar{e}_\theta \quad \text{(pie/seg}^2\text{)}$$

c).- Cálculo del movimiento angular del marco móvil $\Re$ y del punto base O, usando coordenadas esféricas en $\Re$, ya definido:
Si:

$$\bar{k} = \cos\theta\,\bar{e}_r - sen\theta\,\bar{e}_\theta = \cos 30°\,\bar{e}_r - sen30°\,\bar{e}_\theta = 0.866\,\bar{e}_r - 0.5\,\bar{e}_\theta$$

$$\bar{j} = sen\theta\,\bar{e}_r + \cos\theta\,\bar{e}_\theta = 0.5\,\bar{e}_r + 0.866\,\bar{e}_\theta$$

$\bar{i} = -\bar{e}_{\phi}$

También:

$\bar{\omega}_{\Re/\Im} = 0.2(0.866\ \bar{e}_r - 0.5\ \bar{e}_{\theta}) = 0.1732\ \bar{e}_r - 0.1\ \bar{e}_{\theta}$ (rad/seg)

$\bar{\alpha}_{\Re/\Im} = \bar{0}$

$\bar{V}_{O/\Im} = \bar{\omega}_{\Re/\Im}\ x\ \bar{r}_{AO} = 0.2\ \bar{k}\ \ x\ 4\ \bar{j} = -0.8\ \bar{i} = 0.8\ \bar{e}_{\phi}$ (pie/seg)

$\bar{a}_{O/\Im} = \bar{\omega}_{\Re/\Im}\ x\left(\bar{\omega}_{\Re/\Im}\ x\ \bar{r}_{AO}\right) = 0.2\ \bar{k}\ \ x\ (-0.8\ \bar{i}) = -0.16\ \bar{j}$

$\bar{a}_{O/\Im} = -0.08\ \bar{e}_r - 0.139\ \bar{e}_{\theta}$ (pie/seg^2)

d).- Cálculo del movimiento de P en $\Im$:

$\bar{V}_{P/\Im} = \bar{V}_{O/\Im} + \bar{\omega}_{\Re/\Im}\ x\ \bar{r}_{OP} + \bar{V}_{P/\Re}$

$\bar{V}_{P/\Im} = 0.8\ \bar{e}_{\phi} + (0.1732\ \bar{e}_r - 0.1\ \bar{e}_{\theta})x50\ \bar{e}_r - 22.9\ \bar{e}_{\theta}$

$\bar{V}_{P/\Im} = -22.9\ \bar{e}_{\theta} + 5.8\ \bar{e}_{\phi}$ (m/seg) $\quad \rightarrow \quad \left|\bar{V}_{P/\Im}\right| = 23.623$ pie/seg

$\bar{a}_{P/\Im} = \bar{a}_{O/\Im} + \overbrace{\bar{\alpha}_{\Re/\Im}}^{0}\ x\ \bar{r}_{OP} + \bar{\omega}_{\Re/\Im}\ x\left(\bar{\omega}_{\Re/\Im}\ x\ \bar{r}_{OP}\right) + 2\bar{\omega}_{\Re/\Im}\ x\ \bar{V}_{P/\Re} + \bar{a}_{P/\Re}$

$\bar{\omega}_{\Re/\Im}\ x\left(\bar{\omega}_{\Re/\Im}\ x\ \bar{r}_{OP}\right) = (0.1732\ \bar{e}_r - 0.1\ \bar{e}_{\theta})\ x\ 5\ \bar{e}_{\phi} = -0.5\ \bar{e}_r - 0.866\ \bar{e}_{\theta}$ (pie/seg^2)

$2\bar{\omega}_{\Re/\Im}\ x\ \bar{V}_{P/\Re} = (0.3464\ \bar{e}_r - 0.2\ \bar{e}_{\theta})\ x\ (-22.9\ \bar{e}_{\theta}) = -7.93\ \bar{e}_{\phi}$ (pie/seg^2)

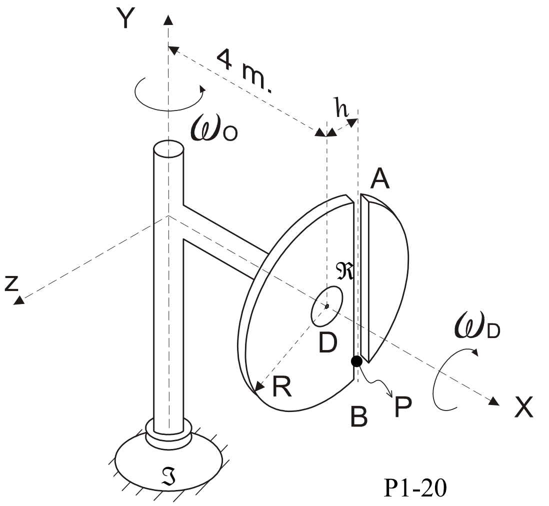
Luego:

$\bar{a}_{P/\Im} = (-0.08 - 0.5 - 10.48)\ \bar{e}_r + (-0.139 - 0.866 - 5)\ \bar{e}_{\theta} - 7.93\ \bar{e}_{\phi}$

$$\bar{a}_{P/\Im} = -11.06\,\bar{e}_r - 6.005\,\bar{e}_\theta - 7.93\,\bar{e}_\phi \quad (\text{pie/seg}^2)$$

$$\left|\bar{a}_{P/\Im}\right| = 14.875 \quad \text{pie/seg}^2$$

1-20.- Una partícula P se mueve con una aceleración relativa constante $a_o = 3$ m/seg^2 de A hacia B, en la ranura AB de un disco giratorio vertical. En el instante mostrado (ver figura), la partícula está en B con una rapidez de V_o =10 m/seg a lo largo de A a B, el disco está girando, respecto a su eje horizontal con una rapidez angular constante ω_D = 15 rad/seg. El eje horizontal está rígidamente unido a un eje vertical que gira con una velocidad angular constante ω_o = 1 rad/seg. Determine la velocidad y aceleración de P, para el instante considerado, si: h = 3 m y R = 5 m.



P1-20

Solución

1).- Movimiento del marco móvil disco $\Re$ y del punto base o conveniente D:

$$\bar{\omega}_{\Re/\Im} = \bar{\omega}_{\Re/OD} + \bar{\omega}_{OD/\Im} = -15\,\bar{i} + \bar{j} \quad (\text{rad/seg})$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im} = \bar{\omega}_{\Re/OD}\; x\; \bar{\omega}_{OD/\Im} = \bar{j}\; x\left(-15\,\bar{i}\right) = 15\,\bar{k} \quad (\text{rad/seg}^2)$$

$$\bar{V}_{D/\Im} = \bar{\omega}_{OD/\Im}\; x\; \bar{r}_{OD} = \bar{j}\; x\; 4\,\bar{i} = -4\,\bar{k} \quad (\text{m/seg})$$

$$\bar{a}_{D/\Im} = -\bar{\omega}^2_{OD/\Im}\,\bar{r}_{OD} = -\left(4\,\bar{i}\right) = -4\,\bar{i} \quad (\text{m/seg}^2)$$

2).- Movimiento de P en el marco móvil $\Re$:

$$\bar{r}_{DP} = -4\bar{j} - 3\,\bar{k} \;\; (\text{m}), \quad \bar{V}_{P/\Re} = -10\,\bar{j} \;\; (\text{m/seg}) \;\; \text{y} \quad \bar{a}_{P/\Re} = -3\,\bar{j} \;\; (\text{m/seg}^2)$$

3).- Movimiento de P en el marco inercial $\Im$:

$$\bar{V}_{P/\Im} = \bar{V}_{D/\Im} + \bar{\omega}_{\Re/\Im}\; x\; \bar{r}_{DP} + \bar{V}_{P/\Re} = -4\,\bar{k} + \left(-15\,\bar{i} + \bar{j}\right) x \left(-5\bar{j} - 3\,\bar{k}\right) - 10\,\bar{j}$$

$$\bar{V}_{P/\Im} = -3\,\bar{i} - 55\,\bar{j} + 71\,\bar{k} \quad (\text{m/seg}) \;\rightarrow\; \left|\bar{V}_{P/\Im}\right| = 89.96 \;\; \text{m/seg}$$

$$\bar{a}_{P/\Im} = \bar{a}_{D/\Im} + \dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im}\; x\; \bar{r}_{DP} + \bar{\omega}_{\Re/\Im}\; x\left(\bar{\omega}_{\Re/\Im}\; x\; \bar{r}_{DP}\right) + 2\bar{\omega}_{\Re/\Im}\; x\; \bar{V}_{P/\Re} + \bar{a}_{P/\Re}$$

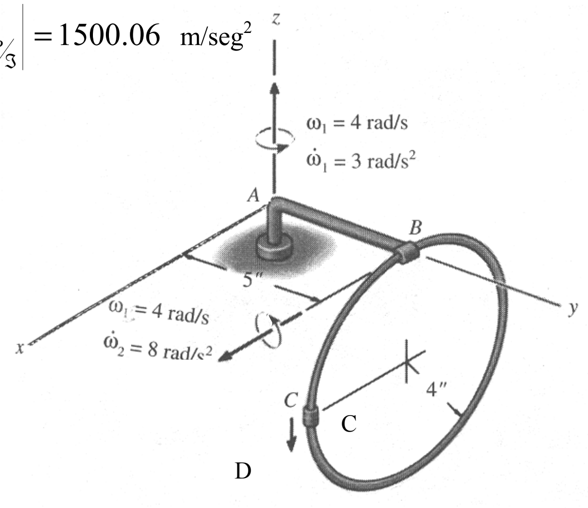
$$\dot{\overline{\omega}}_{\Re/\Im}\, x\, \overline{r}_{DP} = 15\,\overline{k}\; x\left(-5\,\overline{j} - 3\,\overline{k}\right) = 75\,\overline{i} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\overline{\omega}_{\Re/\Im}\, x\left(\overline{\omega}_{\Re/\Im}\, x\, \overline{r}_{DP}\right) = \left(-15\,\overline{i} + \overline{j}\right) x \left(-3\,\overline{i} - 45\,\overline{j} + 75\,\overline{k}\right) = 75\,\overline{i} + 1125\,\overline{j} + 678\,\overline{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$2\overline{\omega}_{\Re/\Im}\, x\, \overline{V}_{P/\Re} = \left(-30\,\overline{i} + 2\,\overline{j}\right) x \left(-10\,\overline{j}\right) = 300\,\overline{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\overline{a}_{P/\Im} = 146\,\overline{i} + 1128\,\overline{j} + 978\,\overline{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)} \;\rightarrow\; \left|\overline{a}_{P/\Im}\right| = 1500.06 \;\; \text{m/seg}^2$$

1-21.- En el instante que se ilustra, la varilla AB gira en torno del eje Z con una velocidad angular ω_1 = 4 rad/seg y una aceleración angular $\dot{\omega}_1$ = 3 rad/seg^2 . En ese mismo instante, la varilla circular sufre un movimiento angular de ω_2 =2 rad/seg y $\dot{\omega}_2$ = 8 rad/seg^2 en relación con la varilla AB como se ilustra. Si el collarín D se mueve hacia abajo en torno de la varilla circular con rapidez de 3 plg/seg, la cual se incrementa a 8 plg/seg^2. Determine la velocidad y aceleración del collarín en el instante mostrado.



P1-21

Solución

1).- Movimiento del marco móvil varilla circular y del punto conveniente o base C:

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 = 2\,\overline{i} + 4\,\overline{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\dot{\overline{\omega}} = \dot{\overline{\omega}}_1 + \overline{\omega}_1 x\, \overline{\omega}_2 + \dot{\overline{\omega}}_2 = 3\,\overline{k} + 4\,\overline{k}\; x\; 2\,\overline{i} + 8\,\overline{i} \;\rightarrow\; \dot{\overline{\omega}} = 8\,\overline{i} + 8\,\overline{j} + 3\,\overline{k} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

$$\overline{R} = 5\,\overline{j} - 4\,\overline{k} \quad \text{(plg)}$$

$$\dot{\overline{R}} = \overline{\omega}_1 x\, \overline{r}_{AB} + \left(\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2\right) x\, \overline{r}_{BC} = 4\,\overline{k}\; x\; 5\,\overline{j} + \left(2\,\overline{i} + 4\,\overline{k}\right) x \left(-4\,\overline{k}\right) \;\rightarrow\; \dot{\overline{R}} = -20\,\overline{i} + 8\,\overline{j} \quad \text{(plg/seg)}$$

$$\ddot{\overline{R}} = \overline{a}_B + \dot{\overline{\omega}}\; x\overline{r}_{BC} + \overline{\omega}\; x\left(\overline{\omega}\; x\overline{r}_{BC}\right) = \dot{\overline{\omega}}_1 x\overline{r}_{AB} - \omega_1^2\,\overline{r}_{AB} + \dot{\overline{\omega}}\; x\overline{r}_{BC} + \overline{\omega}\; x\left(\overline{\omega}\; x\overline{r}_{BC}\right)$$

$$\ddot{\overline{R}} = 3\,\overline{k} x 5\,\overline{j} - 16\left(3\,\overline{j}\right) + \left(8\,\overline{i} + 8\,\overline{j}\right) x \left(-4\,\overline{k}\right) + \left(2\,\overline{i} + 4\,\overline{k}\right) x \left[\left(2\,\overline{i} + 4\,\overline{k}\right) x \left(-4\,\overline{k}\right)\right]$$

$$\ddot{\overline{R}} = -\left(9 + 32 + 32\right)\overline{i} + \left(32 - 48\right)\overline{j} + 16\,\overline{k} = -73\,\overline{i} - 16\,\overline{j} + 16\,\overline{k} \quad \text{(plg/seg}^2\text{)}$$

2).- Movimiento de D en el marco móvil varilla circular:

$\overline{\rho} = 4\,\overline{i}$ (plg)

$\dot{\overline{\rho}} = -3\,\overline{k}$ (plg/seg)

$\ddot{\overline{\rho}} = -8\,\overline{k} + \frac{9}{4}\left(-\overline{i}\right) = -2.25\,\overline{i} - 8\,\overline{k}$ (plg/seg^2)

3).- Movimiento de D respecto al marco inercial $\Im$:

$$\overline{V}_D = \dot{\overline{R}} + \overline{\omega}\ x\ \overline{\rho} + \dot{\overline{\rho}} = -20\,\overline{i} + 8\overline{j} + \left(2\,\overline{i} + 4\,\overline{k}\right) x\ 4\,\overline{i} + \left(-3\,\overline{k}\right)$$

$$\overline{V}_D = -20\,\overline{i} + 24\overline{j} - 3\,\overline{k} \quad \text{(plg/seg)}$$

$$\overline{a}_D = \ddot{\overline{R}} + \dot{\overline{\omega}}\ x\overline{\rho} + \overline{\omega}\ x\left(\overline{\omega}\ x\overline{\rho}\right) + 2\overline{\omega}\ x\dot{\overline{\rho}} + \ddot{\overline{\rho}}$$

$$\dot{\overline{\omega}}\ x\overline{\rho} = \left(8\,\overline{i} + 8\overline{j} + 3\,\overline{k}\right) x\ 4\,\overline{i} = 12\overline{j} - 32\,\overline{k} \quad \text{(plg/seg}^2\text{)}$$

$$\overline{\omega}\ x\left(\overline{\omega}\ x\overline{\rho}\right) = \left(2\,\overline{i} + 4\,\overline{k}\right) x\ 16\overline{j} = -64\,\overline{i} + 32\,\overline{k} \quad \text{(plg/seg}^2\text{)}$$

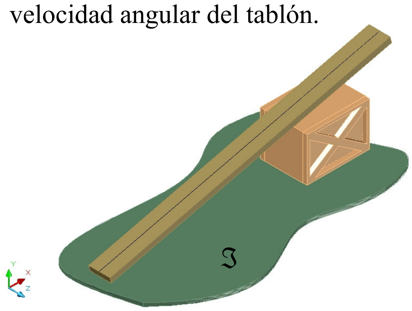
$$2\overline{\omega}\ x\dot{\overline{\rho}} = \left(4\,\overline{i} + 8\,\overline{k}\right) x\left(-3\,\overline{k}\right) = 12\,\overline{j} \quad \text{(plg/seg}^2\text{)}$$

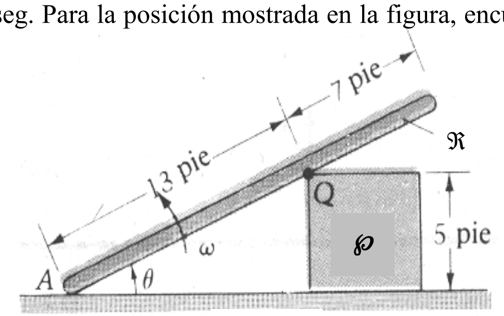
Luego:

$$\overline{a}_D = \left(-73 - 2.25 - 64\right)\overline{i} + \left(-16 + 12 + 12\right)\overline{j} + \left(16 - 8 - 32 + 32\right)\overline{k}$$

$$\overline{a}_D = -139.25\,\overline{i} + 8\,\overline{j} + 8\,\overline{k} \quad \text{(plg/seg}^2\text{)}$$

1-22.- El tablón $\Re$ resbala sobre el piso en A y sobre el bloque $\wp$ en Q. El bloque $\wp$ se mueve hacia la derecha con una velocidad constante de 6 pies/seg, mientras que el extremo A del tablón se mueve hacia a la izquierda con una velocidad constante de 4 pies/seg. Para la posición mostrada en la figura, encuentre la velocidad angular del tablón.





P1-22

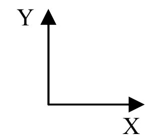
Solución

Marco móvil el tablón, Q tiene un movimiento lineal respecto al tablón y Q $\in \wp$.-

1).- Velocidad del marco móvil y del punto base A (XY):

$$\bar{\omega} = \omega \, \bar{k}$$

$$\dot{\bar{R}} = -4 \, \bar{i} \quad \text{(pie/seg)}$$



2).- Movimiento de Q respecto al marco móvil:

$$\bar{\rho} = 12 \, \bar{i} + 5 \, \bar{j} \quad \text{(pies)}$$

$$\dot{\bar{\rho}} = \dot{\rho}\left(\frac{12}{13}\,\bar{i} + \frac{5}{13}\,\bar{j}\right) \quad \text{(pie/seg)}$$

3).- Movimiento de Q respecto al marco inercial tierra:

$$\bar{V}_Q = 6 \, \bar{i} \quad \text{(pie/seg)} \qquad (1)$$

También:

$$\bar{V}_Q = \dot{\bar{R}} + \bar{\omega} \, x \bar{\rho} + \dot{\bar{\rho}} = -4 \, \bar{i} + \omega \, \bar{k} \; x\left(12 \, \bar{i} + 5 \bar{j}\right) + \dot{\rho}\left(\frac{12}{13}\,\bar{i} + \frac{5}{13}\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_Q = \left(\frac{12}{13}\dot{\rho} - 4 - 5\omega\right)\bar{i} + \left(\frac{5}{13}\dot{\rho} + 12\omega\right)\bar{j} \qquad (2)$$

(1)= (2), igualando componentes y operando:

$$6 = \frac{12}{13}\dot{\rho} - 4 - 5\omega \quad \rightarrow \quad 10 = \frac{12}{13}\dot{\rho} - 5\omega \qquad (3)$$

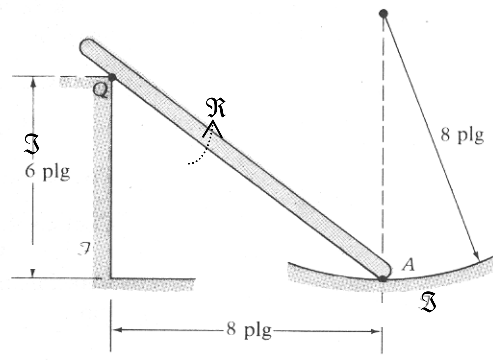
$$0 = \frac{5}{13}\dot{\rho} + 12\omega \quad \rightarrow \quad \dot{\rho} = -\frac{12*13}{5}\omega \qquad (4)$$

(4) en (3):

$$10 = -\frac{12^2 * 13}{13*5}\omega \quad \rightarrow \quad \omega = -0.347 \quad \text{rad/seg}$$

$\bar{\omega} = -0.347\ \bar{k}$ (rad/seg)

1-23.- En la figura V_A = 5 plg/seg (←) y $\frac{d}{dt}\left|\bar{V}_A\right| = 8$ plg/seg². Si la barra AB permanece en contacto con el escalón y con la superficie curva, encuentre su aceleración angular. *Sugerencia: considere al punto Q (fijo al escalón) como el punto móvil y note que Q se mueve sobre una recta relativa a la barra $\mathfrak{R}$.*

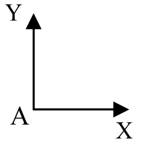


P1-23

Solución

De acuerdo a lo anunciado la barra será el marco móvil, que hace que Q tenga un movimiento lineal con respecto a este marco.

1).- Movimiento del marco móvil $\mathfrak{R}$ y del punto base A:



$$\bar{\omega}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{I}} = \omega\,\bar{k} \quad \text{(rad/seg)} \qquad y \qquad \bar{\alpha}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{I}} = \alpha\,\bar{k} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{V}_A = -5\,\bar{i} \quad \text{(plg/seg)} \quad y \quad \bar{a}_A = -8\,\bar{i} + \tfrac{25}{8}\,\bar{j} = -8\,\bar{i} + 3.125\,\bar{j} \quad \text{(plg/seg}^2\text{)}$$

2).- Movimiento de Q respecto al marco de referencia móvil $\mathfrak{R}$:

$$\bar{r}_{AQ} = -8\,\bar{i} + 6\,\bar{j} \quad \text{(plg)}$$

$$\bar{V}_{Q/\mathfrak{R}} = V_{Q/\mathfrak{R}}\left(\tfrac{4}{5}\,\bar{i} - \tfrac{3}{5}\,\bar{j}\right) \quad \text{(plg/seg)}$$

$$\bar{a}_{Q/\mathfrak{R}} = a_{Q/\mathfrak{R}}\left(\tfrac{4}{5}\,\bar{i} - \tfrac{3}{5}\,\bar{j}\right) \quad \text{(plg/seg}^2\text{)}$$

3).- Movimiento de Q respecto al marco inercial $\mathfrak{I}$:

a).- Velocidad de Q:

$$\bar{V}_{Q/\mathfrak{I}} = \bar{V}_A + \bar{\omega}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{I}}\,x\,\bar{r}_{AQ} + \bar{V}_{Q/\mathfrak{R}} \quad \rightarrow \quad \bar{V}_{Q/\mathfrak{I}} = \bar{0} = -5\,\bar{i} + \omega\,\bar{k}x\left(-8\,\bar{i} + 6\bar{j}\right) + V_{Q/\mathfrak{R}}\left(\tfrac{4}{5}\,\bar{i} - \tfrac{3}{5}\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{0} = \left(-5 - 6\omega + \frac{4}{5}V_{Q/\mathfrak{R}}\right)\bar{i} - \left(8\omega + \frac{3}{5}V_{Q/\mathfrak{R}}\right)\bar{j}$$

Igualando componentes y operando:

$$0 = 8\omega + \frac{3}{5}\,V_{Q/\Re} \quad \rightarrow \quad V_{Q/\Re} = -\frac{40}{3}\omega \;\rightarrow\; 0 = \frac{4}{5}\,\bar{V}_{Q/\Re} - 5 - 6\omega \;\rightarrow\; 0 = +\frac{160}{15}\omega + 5 + 6\omega$$

$\omega = -0.3$ rad/seg y $V_{Q/\Re} = 4$ plg/seg

b).- Aceleración de Q:

$$\bar{a}_{Q/\Im} = \bar{a}_A + \alpha\,\bar{k}\;x\;\bar{r}_{AQ} - \omega^2_{\Re/\Im}\bar{r}_{AQ} + 2\bar{\omega}_{\Re/\Im}\;x\;\bar{V}_{Q/\Re} + \bar{a}_{Q/\Re}$$

$$\bar{0} = \left(-8 - 6\alpha + 0.072 + 1.44 + 0.8\,a_{Q/\Re}\right)\bar{i} + \left(3.125 - 8\alpha - 0.054 + 1.92 - 0.6\,a_{Q/\Re}\right)\bar{j}$$

Igualando componentes y operando:

$$8*\left(0.8\,a_{Q/\Re} - 6\alpha = 6.488\right)$$

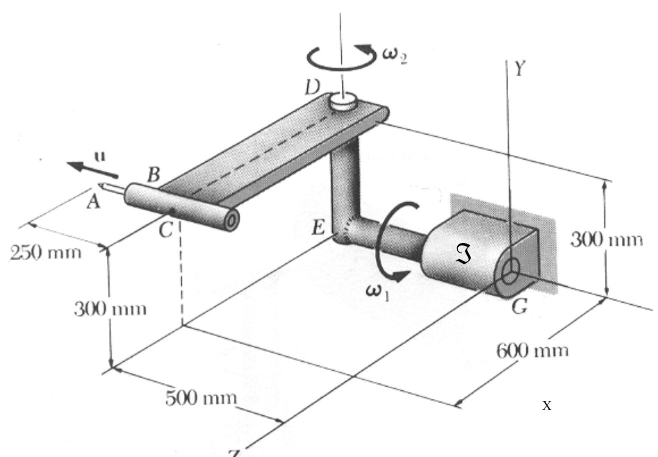
$$6*\left(0.6\,a_{Q/\Re} + 8\alpha = 4.991\right)$$

$$10\,a_{Q/\Re} = 81.85 \qquad \rightarrow \qquad a_{Q/\Re} = 8.185 \text{ plg/seg}^2$$

Luego:

$$\alpha = 0.01 \text{ rad/seg}^2$$

1-24.- La posición de la punta de la aguja A está controlada por el robot aquí mostrado. En la posición indicada la punta se mueve a una velocidad constante u = 180 mm/seg relativa al solenoide BC. Al mismo tiempo el brazo CD gira a una velocidad angular constante ω_2 = 1.6 rad/seg con respecto a la componente DEG. Sabiendo que el robot completo gira alrededor del eje X a una velocidad angular constante ω_1 = 1.2 rad/seg, determínese, la velocidad y aceleración de A para el instante mostrado.



P1-24

Solución

1).- Movimiento del marco móvil Solenoide y del punto base o conveniente C.-

a).- Movimiento del marco móvil:

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 = 1.2\,\overline{i} + 1.6\,\overline{j} \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\dot{\overline{\omega}} = \overline{\omega}_1\ x\ \overline{\omega}_2 = 1.2\,\overline{i}\ x\ 1.6\,\overline{j} = 1.92\,\overline{k} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

b).- Movimiento del punto base C:

$$\overline{R} = -0.5\,\overline{i} + 0.3\,\overline{j} + 0.6\,\overline{k} \quad \text{(m)}$$

i).- Movimiento del marco intermedio DEG y del punto conveniente D:

$$\overline{\omega}_{DE} = \overline{\omega}_1 = 1.2\,\overline{i} \quad \text{y} \quad \dot{\overline{\omega}}_{DE} = \overline{0}$$

$$\overline{V}_D = \overline{\omega}_{DE} x\ \overline{r}_D = 1.2\,\overline{i}\ x\ \left(-0.5\,\overline{i} + 0.3\,\overline{j}\right) = 0.36\,\overline{k} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\overline{a}_D = \overline{\omega}_{DE} x\left(\overline{\omega}_{DE} x\ \overline{r}_D\right) = 1.2\,\overline{i}\ x\ 0.36\,\overline{k} = -0.432\,\overline{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

ii).- Movimiento del punto base C en el marco intermedio DEG:

$$\overline{\rho}_C = 0.6\,\overline{k} \quad \text{(m)}$$

$$\dot{\overline{\rho}}_C = \overline{\omega}_2 x\ \overline{\rho}_C = 1.6\,\overline{j}\ x\ 0.6\,\overline{k} = 0.96\,\overline{i} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\ddot{\overline{\rho}}_C = \overline{\omega}_2 x\left(\overline{\omega}_2 x\ \overline{\rho}_C\right) = 1.6\,\overline{j}\ x\ 0.96\,\overline{i} = -1.536\,\overline{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

iii).- Movimiento de C en el marco primario $\Im$:

$$\dot{\overline{R}} = \overline{V}_D + \overline{\omega}_{DE} x\ \overline{\rho}_C + \dot{\overline{\rho}}_C = 0.36\,\overline{k} + 1.2\,\overline{i}\ x\ 0.6\,\overline{k} + 0.96\,\overline{i}$$

$$\dot{\overline{R}} = 0.96\,\overline{i} - 0.72\,\overline{j} + 0.36\,\overline{k} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\ddot{\overline{R}} = \overline{a}_D + \overline{\omega}_{DE} x\left(\overline{\omega}_{DE} x\ \overline{\rho}_C\right) + 2\overline{\omega}_{DE} x\ \dot{\overline{\rho}}_C + \ddot{\overline{\rho}}_C$$

$$\ddot{\overline{R}} = -0.432\,\overline{j} + 1.2\,\overline{i}\ x\left(-0.72\,\overline{j}\right) + 2.4\,\overline{i}\ x\ 0.96\,\overline{i} - 1.536\,\overline{k}$$

$$\ddot{\overline{R}} = -0.432\,\overline{j} - 2.4\,\overline{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

2).- Movimiento de A en el marco móvil solenoide BC:

$\bar{\rho}_A = -0.25\,\bar{i}$ (m) , $\dot{\bar{\rho}}_A = \bar{u} = -0.18\,\bar{i}$ (m/seg) y $\ddot{\bar{\rho}} = \bar{0}$

3).- Movimiento de A en el marco primario $\Im$:

$$\bar{V}_A = \dot{\bar{R}} + \bar{\omega}\ x\ \bar{\rho}_A + \dot{\bar{\rho}}_A$$

$$\bar{V}_A = 0.96\,\bar{i} - 0.72\,\bar{j} + 0.36\,\bar{k} + (1.2\,\bar{i} + 1.6\,\bar{j})x(-0.25\,\bar{i}) - 0.18\,\bar{i}$$

$$\bar{V}_A = 0.78\,\bar{i} - 0.72\,\bar{j} + 0.76\,\bar{k}\ \text{(m/seg)} \rightarrow \left|\bar{V}_A\right| = 1.3\ \text{m/seg}$$

$$\bar{a}_A = \ddot{\bar{R}} + \dot{\bar{\omega}}\ x\ \bar{\rho}_A + \bar{\omega}\ x(\bar{\omega}\ x\ \bar{\rho}_A) + 2\bar{\omega}\ x\ \dot{\bar{\rho}}_A + \ddot{\bar{\rho}}$$

$$\dot{\bar{\omega}}\ x\ \bar{\rho}_A = 1.92\,\bar{k}\ x(-0.25\,\bar{i}) = -0.48\,\bar{j}\ \text{(m/seg}^2\text{)}$$

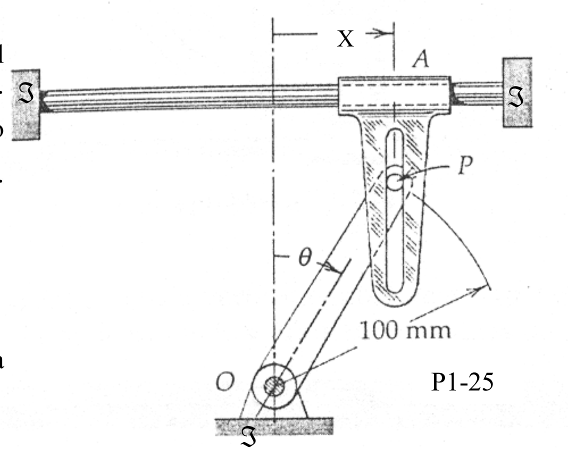
$$\bar{\omega}\ x(\bar{\omega}\ x\ \bar{\rho}_A) = (1.2\,\bar{i} + 1.6\,\bar{j})x\ 0.4\,\bar{k} = -0.48\,\bar{j} + 0.64\,\bar{i}\ \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$2\bar{\omega}\ x\ \dot{\bar{\rho}}_A = (2.4\,\bar{i} + 3.2\,\bar{j})x(-0.18\,\bar{i}) = 0.576\,\bar{k}\ \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{a}_A = 0.64\,\bar{i} - (0.432 - 0.48 + 0.48)\,\bar{j} + (0.576 - 2.4)\,\bar{k}$$

$$\bar{a}_A = 0.64\,\bar{i} - 1.392\,\bar{j} - 1.824\,\bar{k}\ \text{(m/seg}^2\text{)}$$

1-25.- La rotación del brazo OP está controlada por el movimiento horizontal del vástago ranurado vertical. Si $\dot{X} = 1.2$ m/seg y $\ddot{X} = 9$ m/seg^2 cuando $X = 50$ mm, hallar $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ en ese instante. Usando coordenadas cartesianas.



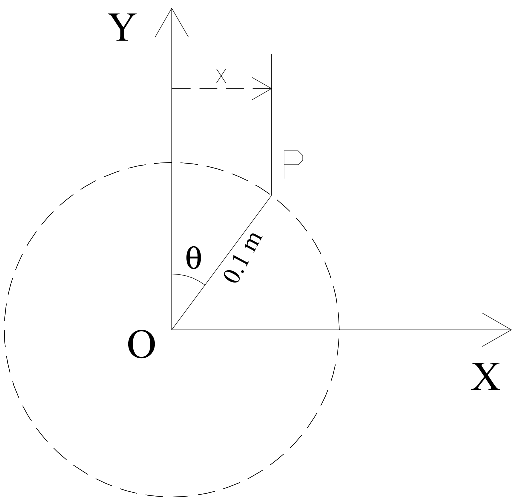
P1-25

Solución

1).- Gráfico para un instante cualquiera (ver figura P1-25a):

Si:

$$sen\theta = \frac{X}{0.1} \quad \rightarrow \quad X = 0.1 sen\theta \qquad (1)$$



P1-25a

2).- Derivando respecto al tiempo dos veces (1), y despejando $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$:

$$\dot{X} = 0.1\cos\theta\,\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{X}}{0.1\cos\theta} \qquad (2)$$

$$\ddot{X} = -0.1 sen\theta\,\dot{\theta}^2 + 0.1\cos\theta\,\ddot{\theta} \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{\ddot{X} + 0.1 sen\theta\,\dot{\theta}^2}{0.1\cos\theta} \qquad (3)$$

3).- Para el caso especifico de : $X = 0.05$ m , $\dot{X} = 1.2$ m/seg, y $\ddot{X} = 9$ m/seg^2 .-

En (1):

$$sen\theta = \frac{0.05}{0.1} = 0.5 \quad \rightarrow \quad \theta = 30°$$

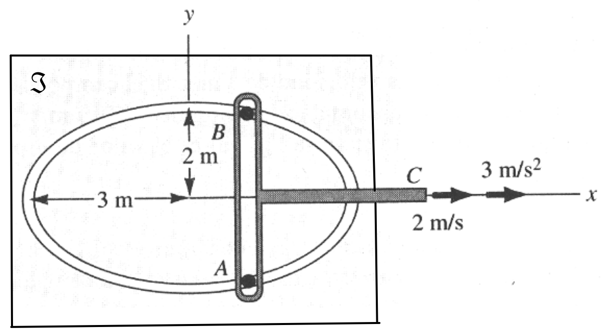
En (2):

$$\dot{\theta} = \frac{1.2}{0.1\cos 30°} = 13.86 \ \text{rad/seg}$$

En (3):

$$\ddot{\theta} = \frac{9 + 0.1\, sen30° * 13.86^2}{0.1\cos 30°} = 214.84 \ \text{rad/seg}^2$$

1-26.- Los pasadores A y B deben permanecer siempre en la ranura vertical del yugo C, el cual se mueve para X = 1.5 m, hacia a la derecha a una velocidad de 2 m/seg y aceleración de 3 m /seg^2 (constante), partiendo del reposo cuando X = 0, tal como se muestra en la figura. Además, los pasadores no pueden abandonar la ranura elíptica. a) ¿Cuál es la velocidad a la que los pasadores se aproximan una a otra? y b) ¿Cuál es el ritmo de cambio de la velocidad de acercamiento entre los pasadores?



P1-26

Solución

1).- Por intersección de trayectorias:

Si:

$$\frac{X^2}{3^2}+\frac{Y^2}{2^2}=1 \qquad (1)$$

$$X=\overbrace{X_0}^{0}+\overbrace{\dot{X}_0}^{0}t+\frac{1}{2}\ddot{X}\,t^2 \quad \rightarrow \quad X=\frac{3}{2}t^2 \qquad (2)$$

Derivando (1) y (2) respecto al tiempo dos veces:

$$\frac{\dot{X}X}{3^2}+\frac{\dot{Y}Y}{2^2}=0 \qquad (3)$$

$$\dot{X}=3\,t \qquad (4)$$

$$\frac{X\ddot{X}+\dot{X}^2}{3^2}+\frac{Y\ddot{Y}+\dot{Y}^2}{2^2}=0 \qquad (5)$$

$$\ddot{X}=3 \ \text{m/seg}^2 \qquad (6)$$

3).- Para el caso especifico de : $X=1.5$ m , $\dot{X}=2$ m/seg , y $\ddot{X}=3$ m/seg^2 para B y A.

En (1):

$$\frac{1.5^2}{3^2}+\frac{Y^2}{2^2}=1 \quad \rightarrow \quad Y_B=1.732 \ \text{m} \ \ \text{y} \ \ Y_A=-1.732 \ \text{m}$$

En (3):

$$\frac{15*2}{3^2}+\frac{1.732\dot{Y}_B}{2^2}=0 \quad \rightarrow \quad \dot{Y}_B=-0.77 \text{ m/seg y } \dot{Y}_A=0.77 \text{ m/seg}$$

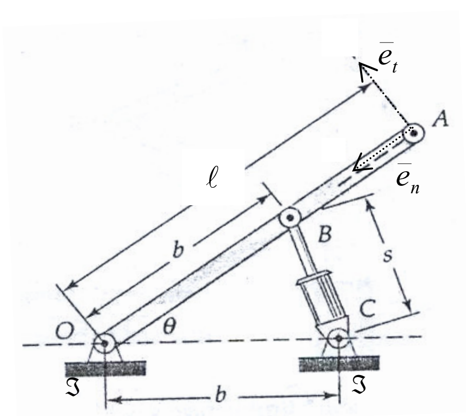
En (5):

$$\frac{1.5*3+2^2}{3^2}+\frac{1.732\ddot{Y}_B+0.77^2}{2^2}=0 \quad \rightarrow \quad \ddot{Y}_B=-2.52 \text{ m/seg}^2 \quad \text{y} \quad \ddot{Y}_A=2.52 \text{ m/seg}^2$$

4).- Cálculo de la velocidad y aceleración de acercamiento entre A y B, que se da en la dirección vertical:

$$\dot{Y}_A=\dot{Y}_B+\dot{Y}_{A/B} \quad \rightarrow \quad \dot{Y}_{A/B}=\dot{Y}_A-\dot{Y}_B=0.77-(-0.77)=1.54 \text{ m/seg}$$

$$\ddot{Y}_A=\ddot{Y}_B+\ddot{Y}_{A/B} \quad \rightarrow \quad \ddot{Y}_{A/B}=\ddot{Y}_A-\ddot{Y}_B=2.52-(-2.52)=5.04 \text{ m/seg}^2$$



P1-27

1-27.- La rotación de la biela OA está gobernada por el émbolo del cilindro hidráulico BC, el cual se extiende a la velocidad constante $\dot{s}=K$ durante un intervalo del movimiento. Obtener la expresión vectorial de la velocidad y aceleración del extremo A para un valor de θ dado, empleando los vectores unitarios $\bar{e}_t$ y $\bar{e}_n$ de las coordenadas naturales.

Solución

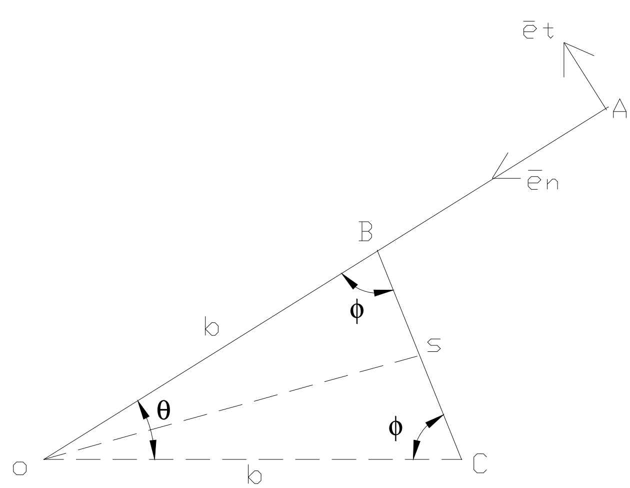
1).- Cálculo del movimiento angular de OA:

Si:

$$sen\,\theta/2=\frac{s/2}{b} \quad \rightarrow \quad sen\,\theta/2=\frac{s}{2b} \qquad (1)$$

Derivando (1) dos veces, respecto al tiempo:

$$\cos\theta/2*\frac{\dot{\theta}}{2}=\frac{\dot{s}}{2b} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta}=\frac{K}{b\cos\theta/2} \quad (2)$$



P1-27a

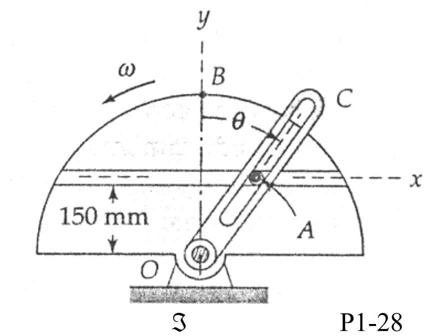
$$\cos\tfrac{\theta}{2}\,\ddot{\theta} - sen\tfrac{\theta}{2}\,\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{\overset{0}{\ddot{s}}}{b} \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = tg\tfrac{\theta}{2}\,\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{K^2}{2b^2}\,\frac{tg\tfrac{\theta}{2}}{\cos^2\tfrac{\theta}{2}} \qquad (3)$$

2).- Cálculo del movimiento de A en las coordenadas naturales pedido:

$$\overline{V}_A = \dot{\theta}\,\ell\,\overline{e}_t = \frac{K\ell}{b\cos\tfrac{\theta}{2}}\,\overline{e}_t \quad \text{(Unidades de velocidad)}$$

$$\overline{a}_A = \ddot{\theta}\,\ell\,\overline{e}_t + \dot{\theta}^2\ell\,\overline{e}_n = \frac{K^2\ell}{b^2\cos^2\tfrac{\theta}{2}}\left(\frac{1}{2}tg\tfrac{\theta}{2}\,\overline{e}_t + \overline{e}_n\right) \quad \text{(Unid. de aceleración)}$$

1-28.- El sector semicircular gira con una velocidad angular antihoraria constante ω = 3 rad/seg. Simultáneamente, el brazo ranurado OC oscila alrededor de la recta OB (fijo en el sector) de modo que θ varia constantemente a razón de 2 rad/seg, salvo al final de cada oscilación cuando se invierte el movimiento. Hallar la aceleración total del pasador A cuando θ = 30° y $\dot{\theta}$ es positiva (horario); usando coordenadas polares en el sector, para el instante pedido.



P1-28

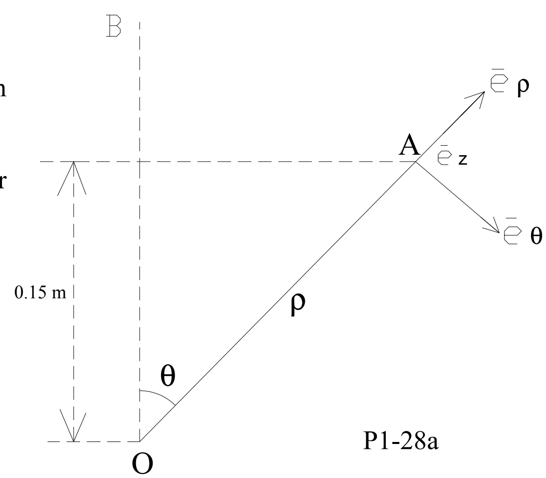
Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios que definen las coordenadas polares (ver figura P1-28a):

2).- Movimiento del marco móvil sector semicircular y del punto base "O":

$$\overline{\omega} = -3\,\overline{e}_Z \text{ rad/seg} \quad \text{y} \quad \dot{\overline{\omega}} = \overline{0}$$

$$\overline{V}_{O/\Im} = \overline{a}_{O/\Im} = \overline{0}$$



P1-28a

3).- Movimiento de A respecto al marco móvil.-

a).- Identificación de los parámetros que definen el movimiento en las coordenadas polares:

$$\rho = \frac{0.15}{\cos\theta} \quad \rightarrow \quad \rho = 0.15\sec\theta \qquad (1)$$

$$\dot{\rho} = 0.15\sec\theta\,tg\theta\,\dot{\theta} \qquad (2)$$

$$\ddot{\rho} = 0.15\left(\sec\theta\, tg^2\theta\, \dot{\theta}^2 + \sec^3\theta\, \dot{\theta}^2 + \sec\theta\, tg\theta\, \ddot{\theta}\right) \quad (3)$$

Para el caso especifico de: $\theta = 30°$, $\dot{\theta} = 2$ rad/seg, y $\ddot{\theta} = 0$ en (1), (2), y (3):

$\rho = 0.173$ m, $\dot{\rho} = 0.2$ m/seg y $\ddot{\rho} = 1.155$ m/seg^2

$\dot{\theta} = 2$ rad/seg y $\ddot{\theta} = 0$

b).- Cálculo del movimiento:

$$\bar{r}_{OA} = 0.173\, \bar{e}_\rho$$

$$\bar{V}_{A/OC} = \dot{\rho}\, \bar{e}_\rho + \rho\, \dot{\theta}\, \bar{e}_\theta = 0.2\, \bar{e}_\rho + 0.173 * 2\, \bar{e}_\theta = 0.2\, \bar{e}_\rho + 0.346\, \bar{e}_\theta \text{ (m/seg)}$$

$$\bar{a}_{A/OC} = \left(\ddot{\rho} - \rho\, \dot{\theta}^2\right)\bar{e}_\rho + 2\dot{\rho}\, \dot{\theta}\, \bar{e}_\theta = (1.155 - 0.173 * 4)\bar{e}_\rho + 2 * 0.2 * 2\bar{e}_\theta$$

$$\bar{a}_{A/OC} = 0.463\, \bar{e}_\rho + 0.8\, \bar{e}_\theta \text{ (m/seg}^2\text{)}$$

4).- Cálculo de la aceleración de A respecto al marco $\Im$:

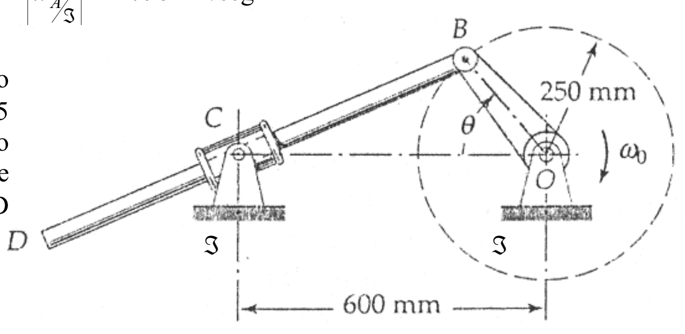
$$\bar{a}_{A/\Im} = \bar{a}_{A/OC} - \omega^2 \bar{r}_{OA} + 2\bar{\omega}\ x\ \bar{V}_{A/OC}$$

$$\bar{a}_{A/\Im} = 0.463\bar{e}_\rho + 0.8\bar{e}_\theta - 9 * 0.173\bar{e}_\rho - 6\bar{e}_Z x\left(0.2\bar{e}_\rho + 0.346\bar{e}_\theta\right)$$

$$\bar{a}_{A/\Im} = (0.463 - 1.557 + 2.076)\,\bar{e}_\rho + (0.8 - 1.2)\,\bar{e}_\theta$$

$$\bar{a}_{A/\Im} = 0.982\, \bar{e}_\rho - 0.4\, \bar{e}_\theta \text{ (m/seg}^2) \quad \rightarrow \quad \left|\bar{a}_{A/\Im}\right| = 1.06 \text{ m/seg}^2$$

1-29.- La manivela OB gira, en sentido horario, con una velocidad constante $\omega_o = 5$ rad/seg., usando coordenadas polares y/o naturales para B. Hallar, en el instante en que $\theta = 90°$, la aceleración angular de la barra BD que desliza por el collarín que pivota en "C".



P1-29

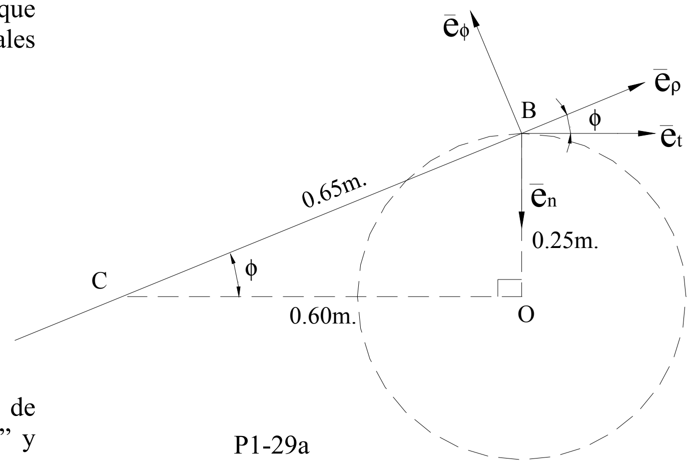
Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios, que definen las coordenadas polares y naturales (ver figura P1-29a), para θ = 90º:

$$tg\phi = \frac{0.25}{0.6} \quad \rightarrow \quad \phi = 22.62°$$

$$\bar{e}_\rho = \cos\phi\ \bar{e}_t - sen\phi\ \bar{e}_n$$

$$\bar{e}_\phi = -sen\phi\ \bar{e}_t - \cos\phi\ \bar{e}_n$$



P1-29a

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de B, tomando como punto de referencia "O" y usando coordenadas naturales:

$$\bar{V}_B = \omega_o r\ \bar{e}_t = 5*0.25\ \bar{e}_t = 1.25\ \bar{e}_t \text{ (m/seg)} \qquad (1)$$

$$\bar{a}_B = \omega_o^2 r\ \bar{e}_n = 25*0.25\ \bar{e}_n = 6.25\ \bar{e}_n \text{ (m/seg}^2\text{)} \qquad (2)$$

3).- Cálculo de la velocidad y aceleración de B, tomando como punto de referencia C y usando coordenadas polares:

$$\bar{V}_B = \dot{\rho}\ \bar{e}_\rho + \rho\ \dot{\phi}\ \bar{e}_n = \dot{\rho}\left(\cos\phi\ \bar{e}_t - sen\phi\ \bar{e}_n\right) + 0.65\dot{\phi}\left(-sen\phi\ \bar{e}_t - \cos\phi\ \bar{e}_n\right)$$

$$\bar{V}_B = \left(\dot{\rho}\cos\phi - 0.65\dot{\phi}\ sen\phi\right)\bar{e}_t - \left(\dot{\rho}\ sen\phi + 0.65\dot{\phi}\cos\phi\right)\bar{e}_n \qquad (3)$$

(3)= (1), igualando componentes y operando:

$$\dot{\rho}\ sen\phi = -0.65\dot{\phi}\cos\phi$$

$$\dot{\rho}\cos\phi = 0.65\dot{\phi}\ sen\phi + 1.25$$

$$tg\phi = \frac{-0.65\dot{\phi}\cos\phi}{0.65\dot{\phi}\ sen\phi + 1.25} = \frac{0.25}{0.6}$$

$$\dot{\phi}\left(0.39\cos\phi + 0.1625 sen\phi\right) = -0.312 \quad \rightarrow \quad \dot{\phi} = -0.74 \text{ rad/seg}$$

También:

$$\dot{\rho}\ sen 22.62° = -0.65(-0.74)\cos 22.62° \quad \rightarrow \quad \dot{\rho} = 1.1544 \text{ m/seg}$$

Si:

$$\bar{a}_B = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\left(\cos\phi\ \bar{e}_t - sen\phi\ \bar{e}_n\right) + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\left(-sen\phi\ \bar{e}_t - \cos\phi\ \bar{e}_n\right)$$

$$\bar{a}_B = \begin{bmatrix} (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\cos\phi - \\ (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})sen\phi \end{bmatrix} \bar{e}_t - \begin{bmatrix} (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)sen\phi + \\ (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\cos\phi \end{bmatrix} \bar{e}_n \qquad (4)$$

(4)= (2), igualando componentes y operando:

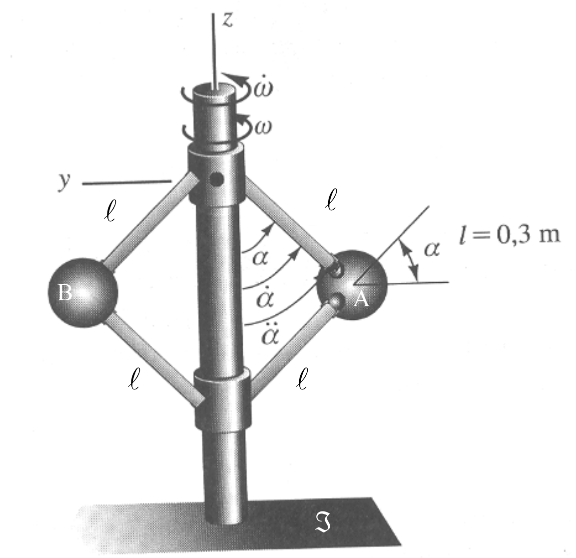
$$(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\cos\phi = (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})sen\phi$$
$$(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)sen\phi = -(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\cos\phi - 6.25$$

$$tg\phi = \frac{-(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\cos\phi - 6.25}{(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})sen\phi} = \frac{0.25}{0.6}$$

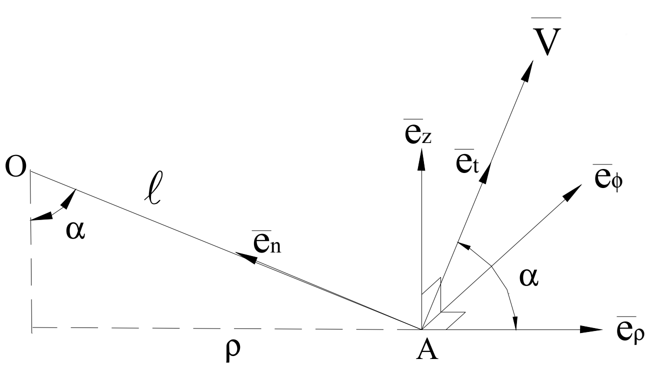
$$0.6\rho\ddot{\phi}\cos\phi + 0.25\rho\ddot{\phi}\ sen\phi = -0.25 * 2\dot{\rho}\dot{\phi}\ sen\phi - 3.75 - 0.6 * 2\dot{\rho}\ \dot{\phi}\cos\phi$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1.11 - 3.75}{0.4225} = -6.249 \ \text{ rad/seg}^2$$
$$\alpha = \ddot{\phi} \cong 6.25 \circlearrowleft \ \text{ rad/seg}^2$$

1-30.- Un regulador de bolas tiene los siguientes datos en el instante de interés: ω = 0.2 rad/seg, $\dot{\omega}$ = 0.04 rad/seg^2 , α = 45° , $\dot{\alpha}$ = 5 rad/seg , y $\ddot{\alpha}$ = 0.2 rad/seg^2 . Determinar para el instante mencionado los vectores velocidad y aceleración de la esfera A, utilizando las coordenadas cilíndricas, si ℓ = 0.3 m.



P1-30



P1-30a

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios (ver figura P1-30a) e identificación de los parámetros que definen el movimiento:

$$\begin{vmatrix} \rho = \ell sen\alpha = 0.3sen45° = 0.212\ m \\ \dot{\rho} = \dot{\alpha}\ \ell\cos\alpha = 1.061\ m/seg \\ \ddot{\rho} = \ddot{\alpha}\ \ell\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\ell sen\alpha = -5.261\ m/seg^2 \end{vmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{\theta} = \omega = 0.2\ rad/seg \\ \ddot{\theta} = \dot{\omega} = 0.04\ rad/seg^2 \end{array} \right| \quad \text{y} \quad \left| \begin{array}{l} Z = -\ell \cos\alpha \\ \dot{Z} = \dot{\alpha}\ \ell sen\alpha = 5*0.3sen45° = 1.061\ m/seg \\ \ddot{Z} = \ddot{\alpha}\ \ell sen\alpha + \dot{\alpha}^2 \ell \cos\alpha = 5.346\ m/seg^2 \end{array} \right|$$

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de A:

$$\overline{V}_A = \rho\ \overline{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\ \overline{e}_\theta + \dot{Z}\ \overline{e}_Z = 1.061\ \overline{e}_\rho + 0.212*0.2\ \overline{e}_\theta + 1.061\ \overline{e}_Z$$

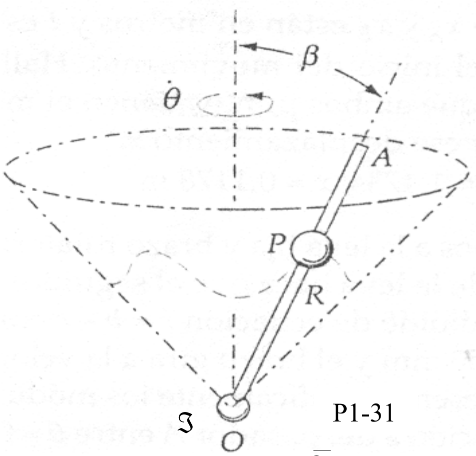
$$\overline{V}_A = 1.061\ \overline{e}_\rho + 0.0424\ \overline{e}_\theta + 1.061\ \overline{e}_Z \quad \text{(m/seg)}$$

$$\overline{a}_A = \left(\ddot{\rho} - \rho\ddot{\theta}^2\right)\overline{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\overline{e}_\theta + \ddot{Z}\ \overline{e}_Z$$

$$\overline{a}_A = \left(-5.261 - 0.212*0.2^2\right)\overline{e}_\rho + \left(2*1.061*0.2 + 0.212*0.04\right)\overline{e}_\theta + 5.346\ \overline{e}_Z$$

$$\overline{a}_A = -5.269\ \overline{e}_\rho + 0.4329\ \overline{e}_\theta + 5.346\ \overline{e}_Z \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

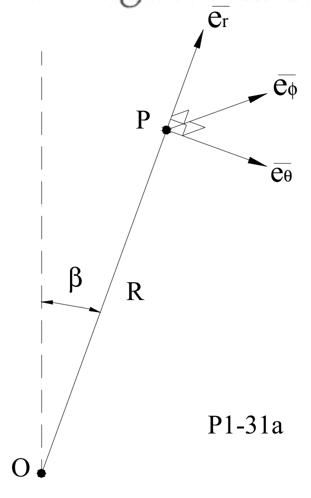
1-31.- La varilla OA se mantiene con un ángulo constante β = 30° y gira alrededor de la vertical con celeridad de 120 RPM. Simultáneamente el cursor P oscila a lo largo de la varilla a una distancia variable del pivote fijo O dada en milímetros por R = 400 + 100 sen2π n t, donde la frecuencia de oscilación n a lo largo de la varilla, es constante e igual a 2 ciclos por segundos, y el tiempo se mide en segundos. Calcular la aceleración del cursor en el instante en que su velocidad $\dot{R}$ a lo largo de la varilla sea máxima. Usando coordenadas esféricas.



P1-31

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios (ver figura P1-31a) e identificación de los parámetros que definen el movimiento en coordenadas esféricas:



P1-31a

$$\left| \begin{array}{l} r = R = 400 + 100 sen 2\pi\ nt \\ \dot{r} = \dot{R} = 200\pi\ n \cos 2\pi\ nt \\ \ddot{r} = \ddot{R} = -400\pi^2 n^2 sen 2\pi\ nt \end{array} \right|$$

Para $\dot{R}_{\max}$: $\cos 2\pi\ nt = 1$ y $sen 2\pi\ nt = 0$

Luego:

$$\left| \begin{array}{l} r = 0.4\ m \\ \dot{r} = 0.2 * \pi * 2 = 1.257\ m/seg \\ \ddot{r} = 0 \end{array} \right| \text{ y } \left| \begin{array}{l} \theta = \beta = 30^\circ \\ \dot{\theta} = 0 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \dot{\phi} = 120 * \frac{\pi}{30} = 4\pi\ rad/seg \\ \\ \ddot{\phi} = 0 \end{array} \right|$$

2).- Cálculo de la aceleración de P, para $\dot{R}_{\max}$:

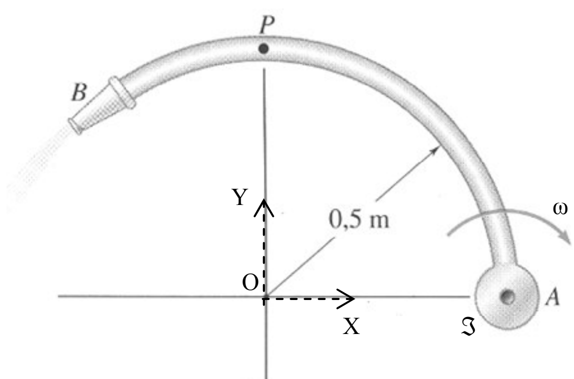
$$\bar{a}_P = -r\dot{\phi}^2 sen^2\theta\ \bar{e}_r - r\dot{\phi}^2 sen\theta \cos\theta\ \bar{e}_\theta + +2\dot{r}\dot{\phi}\ sen\theta\ \bar{e}_\phi$$

$$\bar{a}_P = -0.4(4\pi)^2\, 0.25\ \bar{e}_r - 0.4(4\pi)^2\, 0.5 * 0.866\ \bar{e}_\theta + 2 * 1.257 * 4\pi * 0.5\ \bar{e}_\phi$$

$$\bar{a}_P = -15.791\ \bar{e}_r - 27.35\ \bar{e}_\theta + 15.796\ \bar{e}_\phi$$

$$\left|\bar{a}_P\right| = 35.311 \text{ m/seg}^2$$

1-32.- Por una tubería curva AB que gira con una velocidad angular constante de 90 RPM fluye agua. Si la velocidad constante de ésta respecto a la tubería es 8 m/seg, hallar la aceleración total de una partícula de agua en el punto P.



P1-32

Solución

Marco móvil tubería curva AB.

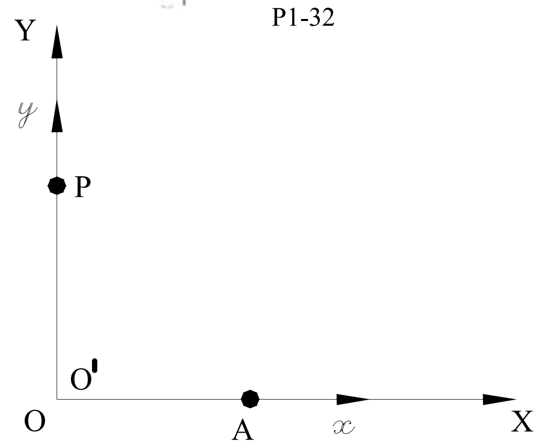
1).- Movimiento del marco móvil y del punto base "O' ":

$$\bar{\omega}_{AB/\Im} = -90 * \frac{\pi}{30}\ \bar{k} = -3\pi\ \bar{k} = -9.425\ \bar{k} \text{ (rad/seg)}$$

y $\dot{\bar{\omega}}_{AB/\Im} = \bar{0}$

$$\bar{V}_{O'/\Im} = \bar{\omega}_{AB/\Im}\, x\, \bar{r}_{AO'}$$

$$\bar{V}_{O'/\Im} = -3\pi\ \bar{k}\ x\left(-0.5\ \bar{i}\right) = 4.71\ \bar{j} \text{ (m/seg)}$$



$$\bar{a}_{O'/\Im} = -\omega_{AB/\Im}^2\, \bar{r}_{AO'} \ \rightarrow\ \bar{a}_{O'/\Im} = -88.82\left(-0.5\ \bar{i}\right) = 44.41\ \bar{i} \text{ (m/seg}^2\text{)}$$

P1-32a

2).- Movimiento de P respecto al marco móvil:

$$\bar{r}_{O'P} = 0.5\ \bar{j} \text{ (m)},\quad \bar{V}_{P/AB} = -8\ \bar{i} \text{ (m/seg) y } \bar{a}_{P/AB} = -\frac{8^2}{0.5}\ \bar{j} = -128\ \bar{j} \text{ (m/seg}^2\text{)}$$

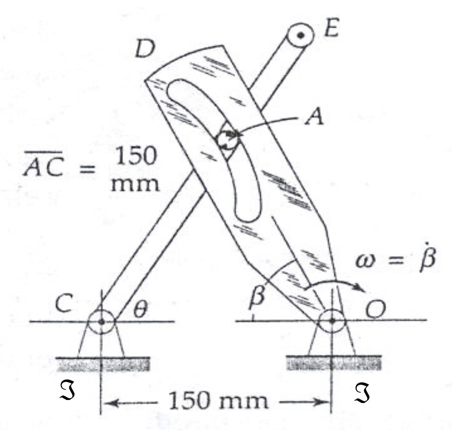
3).- Movimiento de P respecto al marco inercial:

$$\bar{a}_{P/\Im} = \bar{a}_{P/AB} + \bar{a}_{O'/\Im} - \omega^2_{AB/\Im}\bar{r}_{O'P} + 2\bar{\omega}_{AB/\Im} x \bar{V}_{P/AB}$$

$$\bar{a}_{P/\Im} = -128\ \bar{j} + 44.41\ \bar{i} - 9.425^2\left(0.5\ \bar{j}\right) - 18.85\ \bar{k}\ x\left(-8\ \bar{i}\right)$$

$$\bar{a}_{P/\Im} = 44.41\ \bar{i} - 21.62\ \bar{j} \text{ (m/seg}^2\text{)}$$

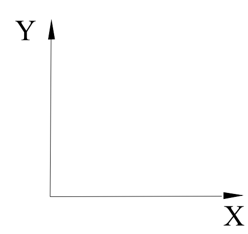
1-33.- Hallar la aceleración angular de la barra EC en la posición representada, con $\omega = \dot{\beta} = 2$ rad/seg y $\ddot{\beta} = 6$ rad/seg^2 cuando θ = β = 60° . La clavija A es solidaria de la barra EC. La ranura circular de la manivela DO tiene un radio de curvatura de 150 mm. En la posición de la figura, la tangente a la ranura en el punto de contacto es paralela a AO.



P1-33

Solución

Marco móvil DO y Q pertenece a OD, pero coincidente con A.



1).- Cálculo de la velocidad de A respecto a OD y la velocidad angular de CE (Δ OCA es equilátero).-

a).- Velocidad de A tomando como punto de referencia O en ℑ.

Si:

$$\bar{V}_{A/\Im} = \bar{V}_{A/OD} + \bar{V}_{Q/\Im} \qquad (1)$$

$$\bar{V}_{A/OD} = V_{A/OD}\left(0.5\ \bar{i} - 0.866\ \bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_{Q/\Im} = \bar{\omega} x \bar{r}_{OQ} = -2\ \bar{k}\ x\ 0.15\left(-0.5\ \bar{i} + 0.866\ \bar{j}\right) = 0.26\ \bar{i} + 0.15\ \bar{j}$$

b).- Velocidad de A tomando como punto de referencia C en $\Im$:

$$\bar{V}_{A/\Im} = \bar{\omega}_{CE} x \bar{r}_{CA} = -\omega_{CE} \bar{k}\ x\ 0.15\left(0.5\ i + 0.866\ \bar{j}\right) = \omega_{CE}\left(0.13\ \bar{i} - 0.075\ \bar{j}\right) \qquad (2)$$

(1)= (2):

$$\omega_{CE}\left(0.13\ \bar{i} - 0.075\ \bar{j}\right) = V_{A/OD}\left(0.5\ \bar{i} - 0.866\ \bar{j}\right) + 0.26\ \bar{i} + 0.15\ \bar{j}$$

Igualando componentes y operando:

$$0.13\omega_{CE} = 0.5\ V_{A/OD} + 0.26$$

$$-0.075\omega_{CE} = -0.866\ V_{A/OD} + 0.15$$

$$-1.733 = \frac{0.5\ V_{A/OD} + 0.26}{-0.866\ V_{A/OD} + 0.15} \quad \rightarrow \quad 1.5\ V_{A/OD} - 0.26 = 0.5\ V_{A/OD} + 0.26$$

$$V_{A/OD} = 0.52 \quad \text{m/seg}$$

$$\omega_{CE} = \frac{0.5 * 0.52 + 0.26}{0.13} = 4 \quad \text{rad/seg}$$

2).- Cálculo de la aceleración angular de CE:

a).- Aceleración de A tomando como punto de referencia O en $\Im$:

$$\bar{a}_{A/\Im} = \bar{a}_{A/OD} + \bar{a}_{Q/\Im} + 2\bar{\omega}\ x\ \bar{V}_{A/OD} \qquad (3)$$

$$\bar{a}_{A/OD} = a_t\left(0.5\ \bar{i} - 0.866\ \bar{j}\right) + \frac{0.52^2}{0.15}\left(-0.866\ \bar{i} - 0.5\ \bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_{A/OD} = \left(0.5\ a_t - 1.56\right)\bar{i} - \left(0.866\ a_t + 0.9\right)\bar{j} \quad (\text{m/seg}^2)$$

$$\bar{a}_{Q/\Im} = -6\ \bar{k}\ x\ 0.15\left(-0.5\ \bar{i} + 0.866\ \bar{j}\right) - 4 * 0.15\left(-0.5\ \bar{i} + 0.866\bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_{Q/\Im} = 1.08\ \bar{i} - 0.07\ \bar{j} \quad (\text{m/seg}^2)$$

$$2\overline{\omega} x \overline{V}_{A/OD} = -4\,\overline{k}\ x\ 0.52\left(0.5\,\overline{i} - 0.866\,\overline{j}\right) = -1.8\,\overline{i} - 1.04\,\overline{j}\ \ (\text{m/seg}^2)$$

b).- Aceleración de A tomando como punto de referencia C en $\Im$:

$$\overline{a}_{A/\Im} = \alpha\,\overline{k}\ x\ 0.15\left(0.5\,\overline{i} + 0.866\,\overline{j}\right) - \omega^2\left[0.15\left(0.5\,\overline{i} + 0.866\,\overline{j}\right)\right]$$

$$\overline{a}_{A/\Im} = \left(-0.13\alpha - 1.2\right)\overline{i} + \left(0.075\alpha - 2.08\right)\overline{j} \qquad (4)$$

(3)= (4), igualando componentes y operando:

$$-0.13\alpha - 1.2 = 0.5\,a_t - 1.56 + 1.08 - 1.8$$

$$a_t = 2.16 - 0.26\alpha \qquad (5)$$

$$0.075\alpha - 2.08 = -0.866 - 0.9 - 0.07 - 1.04$$

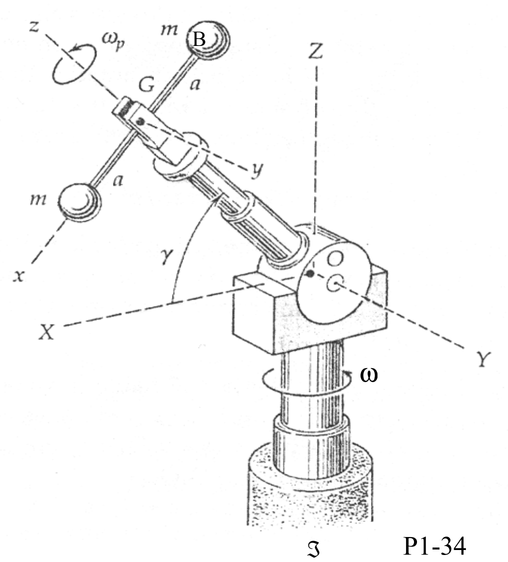
$$\alpha = -11.55\,a_t + 0.93 \qquad (6)$$

(5) en (6):

$$\alpha = 0.93 + 11.55\left(-2.16 + 0.26\alpha\right) = -24.018 + 3\alpha$$

$$\alpha = 12\ \circlearrowleft\ \text{rad/seg}^2$$

1-34.- Al manipular el halterio, la garra del mecanismo robótico lleva una velocidad angular constante ω_P = 2 rad/seg en torno al eje OG con γ fijo en 60°. La totalidad del conjunto rota en torno al eje Z a la velocidad constante ω = 0.8 rad/seg y G se mueve respecto a O a una velocidad constante de 0.2 m/seg: Hallar la velocidad y aceleración de B para el instante mostrado, si a = 300 mm y OG = 900 mm. Expresar los resultados en función de la orientación dada de los ejes x-y-z donde "y" es paralelo al "Y".



P1-34

Solución

Marco móvil eje OG.

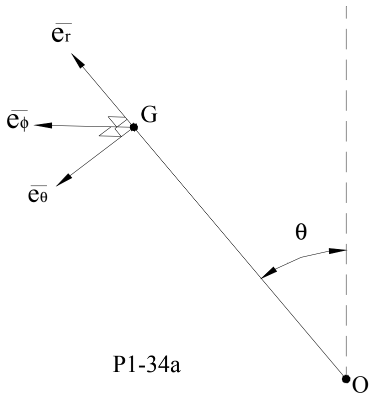
1).- Movimiento del marco móvil y del punto base G.

a).- Del Marco móvil:

$$\bar{\omega}_{OG/\Im} = \omega\left(-\cos\gamma\,\bar{i} + sen\gamma\,\bar{k}\right) \quad \rightarrow \quad \bar{\omega}_{OG/\Im} = 0.8\left(-\cos 60°\,\bar{i} + sen60°\,\bar{k}\right)$$

$$\bar{\omega}_{OG/\Im} = -0.4\,\bar{i} + 0.69\,\bar{k} \text{ (rad/seg)} \quad \text{y} \quad \dot{\bar{\omega}}_{OG/\Im} = \bar{0}$$

b).- Cálculo de la velocidad y aceleración de G, usando coordenadas esféricas:



P1-34a

$r = 0.9\,m$	$\theta = 30°$	$\dot{\phi} = \omega = 0.8\,rad/seg^2$
$\dot{r} = 0.2\,m/seg$	$\dot{\theta} = 0$	
$\ddot{r} = 0$	$\ddot{\theta} = 0$	$\ddot{\phi} = 0$

y

$$\bar{e}_r = \bar{k}, \quad \bar{e}_\theta = \bar{i}, \quad \bar{e}_\phi = \bar{j}$$

i).- Cálculo de la velocidad de G:

$$\bar{V}_{G/\Im} = \dot{r}\,\bar{e}_r + r\dot{\phi}\,sen\theta\,\bar{e}_\theta = 0.2\,\bar{e}_r + 0.9*0.8\,sen30°\,\bar{e}_\phi$$

$$\bar{V}_{G/\Im} = 0.2\,\bar{e}_r + 0.36\,\bar{e}_\phi = 0.36\,\bar{j} + 0.2\,\bar{k} \quad \text{(m/seg)}$$

ii).- Cálculo de la aceleración de G:

$$\bar{a}_{G/\Im} = -r\dot{\phi}^2 sen^2\theta\,\bar{e}_r - -r\dot{\phi}^2 sen\theta\cos\theta\,\bar{e}_\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\,sen\theta\,\bar{e}_\phi$$

$$\bar{a}_{G/\Im} = -0.9*0.8^2*0.5^2\,\bar{e}_r - 0.9*0.8^2*0.5*0.866\,\bar{e}_\theta + 2*0.2*0.8*0.5\,\bar{e}_\phi$$

$$\bar{a}_{G/\Im} = -0.144\,\bar{e}_r - 0.249\,\bar{e}_\theta + 0.16\,\bar{e}_\phi = -0.249\,\bar{i} + 0.16\,\bar{j} - 0.144\,\bar{k} \text{ (m/seg}^2\text{)}$$

2).- Movimiento de B respecto a OG:

$\bar{r}_{GB} = -0.3\,\bar{i}$ (m)

$\bar{V}_{B/OG} = \bar{\omega}_P \; x \; \bar{r}_{GB} = 2\,\bar{k} \; x \left(-0.3\,\bar{i}\right) = -0.6\,\bar{j}$ (m/seg)

$\bar{a}_{B/OG} = -\omega_P^2 \bar{r}_{GB} = -4\left(-0.3\,\bar{i}\right) = 1.2\,\bar{i}$ (m/seg^2)

3).- Cálculo de la velocidad y aceleración de B en el marco inercial $\Im$:

$$\bar{V}_{B/\Im} = \bar{V}_{B/OG} + \bar{V}_{G/\Im} + \bar{\omega}_{OG/\Im} \, x \, \bar{r}_{GB} \qquad (1)$$

$\bar{\omega}_{OG/\Im} \, x \, \bar{r}_{GB} = \left(-0.4\,\bar{i} + 0.69\,\bar{k}\right) x \left(-0.3\,\bar{i}\right) = -0.207\,\bar{j}$ (rad/seg)

En (1):

$\bar{V}_{B/\Im} = -0.6\,\bar{j} + 0.36\,\bar{j} + 0.2\,\bar{k} - 0.207\,\bar{j} = 0.447\,\bar{j} + 2\,\bar{k}$ (m/seg)

$\left|\bar{V}_{B/\Im}\right| = 2.05$ m/seg

$$\bar{a}_{B/\Im} = \bar{a}_{B/OG} + \bar{a}_{G/\Im} + \bar{\omega}_{OG/\Im} x \left(\bar{\omega}_{OG/\Im} x \bar{r}_{GB}\right) + 2\bar{\omega}_{OG/\Im} x \bar{V}_{B/OG} \qquad (2)$$

$\bar{\omega}_{OG/\Im} x \left(\bar{\omega}_{OG/\Im} \, x \, \bar{r}_{GB}\right) = \left(-0.4\,\bar{i} + 0.69\,\bar{k}\right) x \left(-0.207\,\bar{j}\right)$

$\bar{\omega}_{OG/\Im} x \left(\bar{\omega}_{OG/\Im} x \bar{r}_{GB}\right) = 0.143\,\bar{i} + 0.083\,\bar{k}$ (m/seg^2)

$2\bar{\omega}_{OG/\Im} x \bar{V}_{B/OG} = \left(-0.8\,\bar{i} + 1.38\,\bar{k}\right) x \left(-0.6\,\bar{j}\right) = 0.828\,\bar{i} + 0.48\,\bar{k}$ m(seg^2)

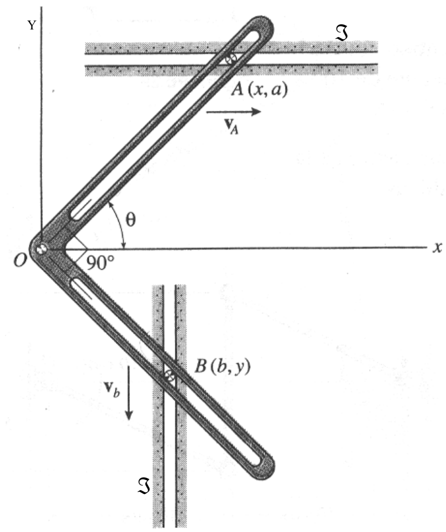
En (2):

$\bar{a}_{B/\Im} = \left(1.2 - 0.249 + 0.143 + 0.828\right)\bar{i} + 0.16\,\bar{j} + \left(-0.144 + 0.083 + 0.48\right)\bar{k}$

$\bar{a}_{B/\Im} = 1.922\,\bar{i} + 0.16\,\bar{j} + 0.419\,\bar{k}$ (m/seg^2)

$\left|\bar{a}_{B/\Im}\right| = 1.974$ m/seg^2

1-35.- Se obliga a girar al brazo ranurado AOB alrededor del punto O, cuando se mueve el perno A a lo largo del carril horizontal. Para la posición que se muestra, establezca la relación entre la velocidad V_B del perno B y la velocidad V_A del perno.



P1-35

Solución

1).- Aprovechando las trayectorias (ver figura P1-35a), que se conocen:

$$tg\theta = \frac{a}{X} \quad \rightarrow \quad \cot\theta = \frac{X}{a} \qquad (1)$$

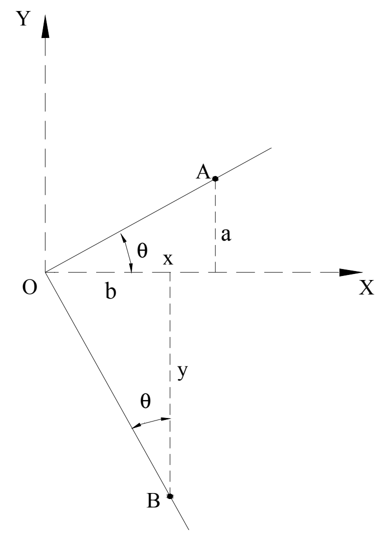
$$tg\theta = \frac{b}{Y} \quad \rightarrow \quad Y = b\cot\theta \qquad (2)$$

(1) en (2):

$$Y = \frac{b}{a}X \qquad (3)$$

2).- Cálculo de la relación de las velocidades de B y A, derivando (3), respecto al tiempo:

$$\dot{Y} = \frac{b}{a}\dot{X} \quad \Rightarrow \quad V_B = \frac{b}{a}V_A$$



P1-35a

1-36.- Un pasador está obligado a moverse dentro de una ranura circular de 6 m de radio. El pasador debe moverse también siguiendo una ranura recta que se mueve hacia a la derecha a una velocidad constante V de 3 m/seg, mientras se mantiene a un ángulo constante con la horizontal de 30º ¿Cuáles son la velocidad y aceleración del pasador A en el instante que se muestra?

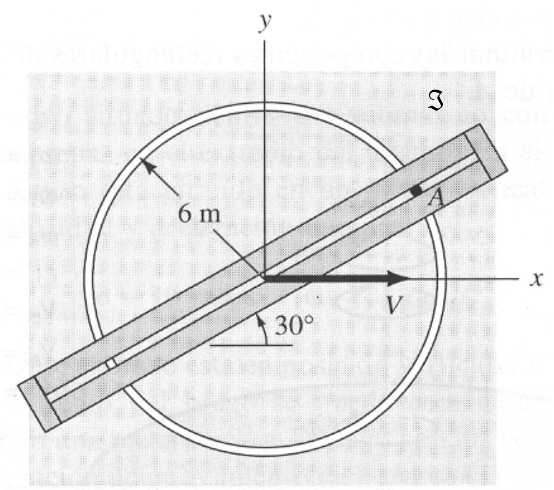
Solución

1).- Por intersección de trayectorias:

$$X^2 + Y^2 = 36 \qquad (1)$$

$$Y = b + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(X - 3\,t\right) \qquad (2)$$

2).- Derivando dos veces, respecto al tiempo (1) y (2):



P1-36

$$2X\dot{X} + 2Y\dot{Y} = 0 \qquad (3)$$

$$\dot{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\dot{X} - 3\right) \qquad (4)$$

$$\dot{X}^2 + X\ddot{X} + \dot{Y}^2 + Y\ddot{Y} = 0 \qquad (5)$$

$$\ddot{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ddot{X} \qquad (6)$$

3).- Para el caso especifico de $X = 5.196$ m y $Y = 3$ m:

En (3):

$$5.196\dot{X} + 3\dot{Y} = 0$$

Reemplazando (4):

$$5.196\dot{X} + \frac{3}{\sqrt{3}}\left(\dot{X} - 3\right) = 0$$

$$6.93\dot{X} = 5.196 \quad \rightarrow \quad \dot{X} = 0.75 \ \text{ m/seg}$$

En (4):

$$\dot{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0.75 - 3) = -1.3 \quad \text{m/seg}$$

$$\therefore \quad \bar{V}_A = 0.75\,\bar{i} - 1.3\,\bar{j} \quad \text{(m/seg)}$$

En (5):

$$0.75^2 + 5.196\ddot{X} + 1.3^2 + 3\ddot{Y} = 0$$

$$5.196\ddot{X} + 3\ddot{Y} = -2.2525$$

Reemplazando (6):

$$5.196\ddot{X} + \frac{3}{\sqrt{3}}\ddot{X} = -2.2525$$

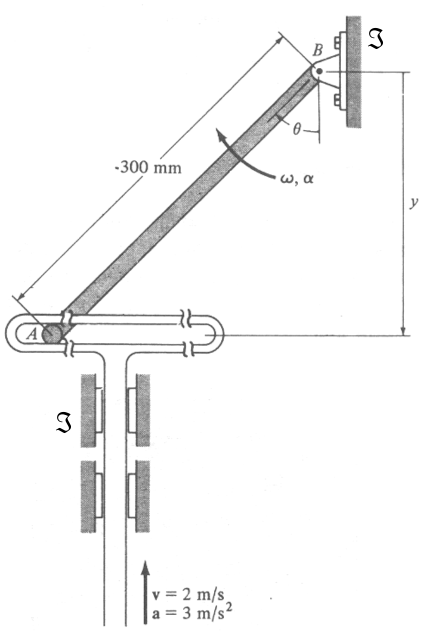
$$\ddot{X} = -0.325 \quad \text{m/seg}^2$$

En (6):

$$\ddot{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ddot{X} = -0.188 \quad \text{m/seg}^2$$

$$\therefore \quad \bar{a}_A = -0.325\,\bar{i} - 0.188\,\bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

1-37.- En el instante en que θ = 50º, la guía ranurada se está moviendo hacia arriba con una aceleración de 3 m/seg^2 y una velocidad de 2 m/seg. Usando coordenadas cartesianas, determine la velocidad angular y la aceleración angular de la barra AB en este instante.



P1-37

Solución

1).- Por las condiciones geométricas, que presenta el sistema (ver figura P1-37a):

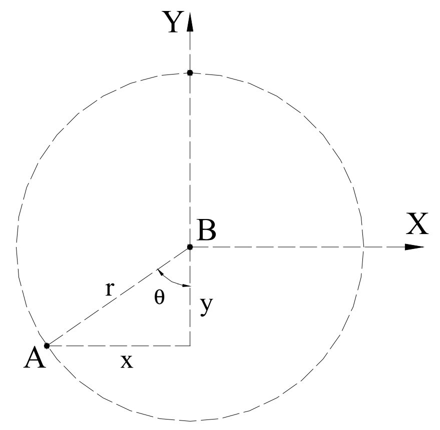
$$\cos\theta = \frac{Y}{r} \quad \rightarrow \quad Y = r\cos\theta \qquad (1)$$

2).- Derivando dos veces (1) respecto al tiempo:

$$\dot{Y} = -r\, sen\theta\, \dot{\theta} = -r\, sen\theta\, \omega_{AB} \qquad (2)$$

$$\ddot{Y} = -r\cos\theta\, \dot{\theta}^{\,2} - r\, sen\theta\, \ddot{\theta}$$

$$\ddot{Y} = -r\cos\theta\, \omega_{AB}^2 - r\, sen\theta\, \alpha_{AB} \qquad (3)$$



P1-37a

3).- Para el caso específico de $\theta = 50^{o}$, $r = 0.3$ m, $\dot{Y} = -2$ m/seg y $\ddot{Y} = -3$ m/seg^2.-

En (2):

$$\omega_{AB} = -\frac{\dot{Y}}{r\, sen\theta} = -\frac{(-2)}{0.3\, sen50^{o}} = 8.7 \ \text{rad/seg}$$

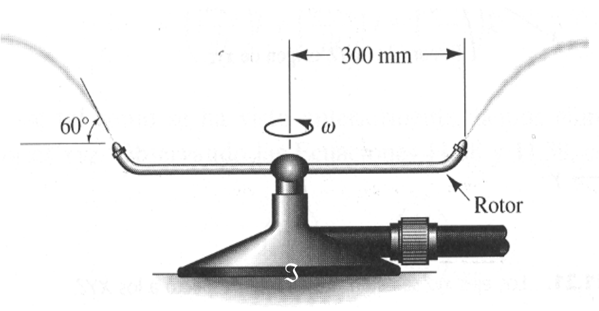
$$\therefore \quad \overline{\omega}_{AB} = -8.7\, \overline{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

En (3):

$$\alpha_{AB} = \frac{-\ddot{Y} - r\cos\theta\, \omega_{AB}^2}{r\, sen\,\theta} = \frac{-(-3) - 0.3\cos 50° * 8.7^2}{0.3\, sen\, 50°} = -50.46 \ \text{rad/seg}^2$$

$$\therefore \quad \overline{\alpha}_{AB} = 50.46\, \overline{k} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

1-38.- Se muestra un simple aspersor de jardín. El agua entra en la base y sale por el extremo a una velocidad de 3 m/seg respecto al rotor del aspersor. Además, ésta sale dirigida hacia arriba formando un ángulo de 60º como se muestra en el diagrama. El rotor tiene una velocidad angular de 2 rad/seg. Tomando como referencia el terreno ¿Cuáles son las componentes axial, transversal y radial de la velocidad y aceleración de una de las partículas del agua al salir del rotor?



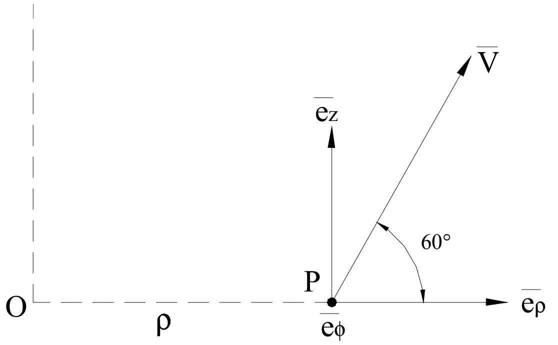
P1-38

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios (ver figura P1-38a) e identificación de los parámetros que definen el movimiento:

$$\rho = 0.3\ m \qquad \dot{\phi} = \omega = 2\ rad/seg$$
$$\dot{\rho} = 3\cos 60^{o} = 1.5\ m/seg$$
$$\ddot{\rho} = 0 \qquad \ddot{\phi} = 0$$

$$\dot{Z} = 3\ sen60^{o} = 2.6\ m/seg$$
$$\ddot{Z} = -9.81\ m/seg^{2}$$



P1-38a

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de la partícula del agua que está saliendo:

$$\overline{V}_P = \dot{\rho}\,\overline{e}_\rho + \rho\,\dot{\phi}\,\overline{e}_\phi + \dot{Z}\,\overline{e}_Z = 1.5\,\overline{e}_\rho + 0.3*2\,\overline{e}_\phi + 2.6\,\overline{e}_Z$$

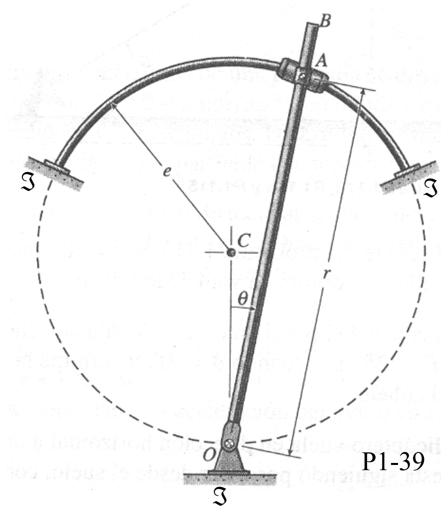
$$\overline{V}_P = 1.5\,\overline{e}_\rho + 0.6\,\overline{e}_\phi + 2.6\,\overline{e}_Z \text{ (m/seg)}$$

$$\overline{a}_P = -\rho\,\dot{\phi}^2\overline{e}_\rho + 2\dot{\rho}\,\dot{\phi}\,\overline{e}_\phi + \ddot{Z}\,\overline{e}_Z$$

$$\overline{a}_P = -0.3*4\,\overline{e}_\rho + 2*1.5*2\,\overline{e}_\phi - 9.81\,\overline{e}_Z$$

$$\bar{a}_P = -1.2\,\bar{e}_\rho + 6\,\bar{e}_\phi - 9.81\,\bar{e}_Z \quad (\text{m/seg}^2)$$

1-39.- El collarín A se mueve a lo largo de una guía circular de radio "e" al girar el brazo OB en torno a O. Determine los vectores velocidad y aceleración de A en función de $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ y e; usando coordenadas: a) Naturales y b) Polares.

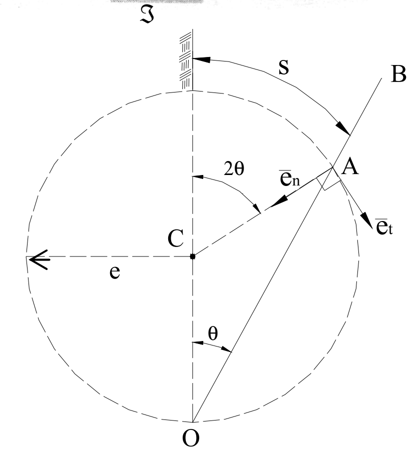


P1-39

Solución

1).- Usando coordenadas Naturales o Coordenadas Tangencial y normal.-

a).- Orientación de los vectores unitarios que definen las coordenadas (ver figura P1-39a):



P1-39a

b).- Cálculo de la velocidad y aceleración de A:
Si:

$$s = 2\theta\, e$$

$$\dot{s} = 2\dot{\theta}\, e$$

$$\ddot{s} = 2\ddot{\theta}\, e$$

Luego:

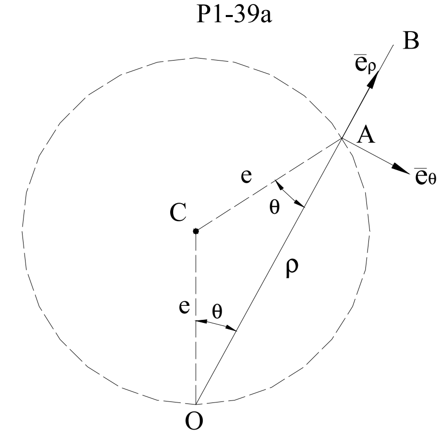
$$\bar{V}_A = \dot{s}\,\bar{e}_t = 2\,e\dot{\theta}\,\bar{e}_t \quad \rightarrow \left|\bar{V}_A\right| = 2\,e\dot{\theta}$$ (Unid. de Velocidad)

$$\bar{a}_A = \ddot{s}\,\bar{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho_c}\bar{e}_n = 2\,e\ddot{\theta}\,\bar{e}_t + 4\,e\dot{\theta}^2\bar{e}_n$$

$$\left|\bar{a}_A\right| = 2\,e\sqrt{\ddot{\theta}^2 + 4\dot{\theta}^4}$$ (Unid. de aceleración)

2).- Usando coordenadas Polares:

a).- Orientación de los vectores unitarios que definen las coordenadas (ver figura P1-39b):



P1-39b

b).- Cálculo de la velocidad y aceleración de A.-

Si:

$$\rho = 2\, e \cos\theta$$

$$\dot{\rho} = -2\, e\, sen\theta\, \dot{\theta}$$

$$\ddot{\rho} = -2\, e \cos\theta\, \dot{\theta}^2 - 2\, e\, sen\theta\, \ddot{\theta}$$

Luego:

$$\overline{V}_A = \dot{\rho}\, \overline{e}_\rho + \rho\, \dot{\theta}\, \overline{e}_\theta \quad \rightarrow \quad \overline{V}_A = -2\, e\, sen\theta\, \dot{\theta}\, \overline{e}_\rho + 2\, e \cos\theta\, \dot{\theta}\, \overline{e}_\theta$$

$\left|\overline{V}_A\right| = 2\, e\dot{\theta}$ (Unid. de velocidad)

$$\overline{a}_A = \left(\ddot{\rho} - \rho\, \dot{\theta}^2\right)\overline{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\, \dot{\theta} + \rho\, \ddot{\theta}\right)\overline{e}_\theta$$

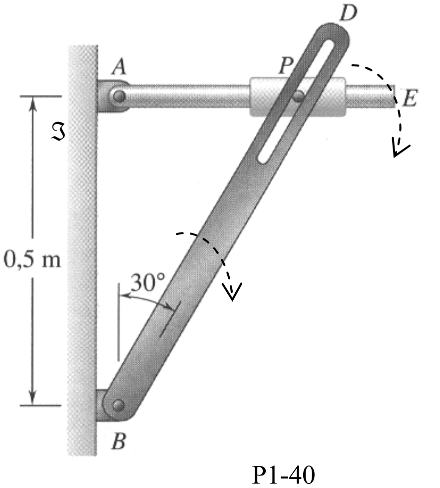
$$\overline{a}_A = \left(-2\, e \cos\theta\, \dot{\theta}^2 - 2esen\theta\, \ddot{\theta} - 2e\cos\theta\, \dot{\theta}^2\right)\overline{e}_\rho + \left(-4esen\theta\, \dot{\theta}^2 + 2e\cos\theta\, \ddot{\theta}\right)\overline{e}_\theta$$

$$\overline{a}_A = \left(-4e\cos\theta\, \dot{\theta}^2 - 2esen\theta\, \ddot{\theta}\right)\overline{e}_\rho + \left(-4esen\theta\, \dot{\theta}^2 + 2e\cos\theta\, \ddot{\theta}\right)\overline{e}_\theta$$

$$\left|\overline{a}_A\right| = 2e\sqrt{2^2\dot{\theta}^4\cos^2\theta + \ddot{\theta}^2 sen^2\theta + 2*2\cos\theta\, sen\theta + 2^2\dot{\theta}^4 sen^2\theta + \ddot{\theta}^2\cos^2\theta - 2*2\cos\theta sen\theta}$$

$\left|\overline{a}_A\right| = 2e\sqrt{\ddot{\theta}^2 + 4\dot{\theta}^4}$ (Unid. de aceleración)

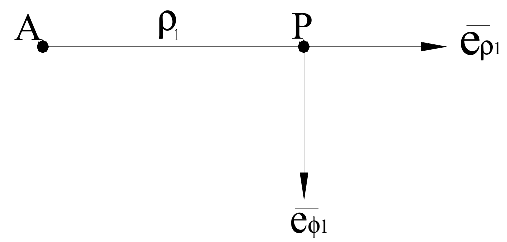
1-40.- El pasador P es solidario a la corredera y su movimiento está guiado por la ranura abierta en la barra BD y por la corredera que desliza sobre la barra AE. Sabiendo que en el instante considerado las barras giran en sentido horario con velocidades angulares constantes ω_{AE} = 4 rad/seg y ω_{BD} = 1.5 rad/seg, hallar la velocidad del pasador P usando coordenadas polares.



P1-40

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios que definen las coordenadas polares e identificación de los parámetros, que definen el movimiento para cada caso:



P1-40a

a).- Tomando como punto de referencia A en $\Im$ (ver figura P1-40a):

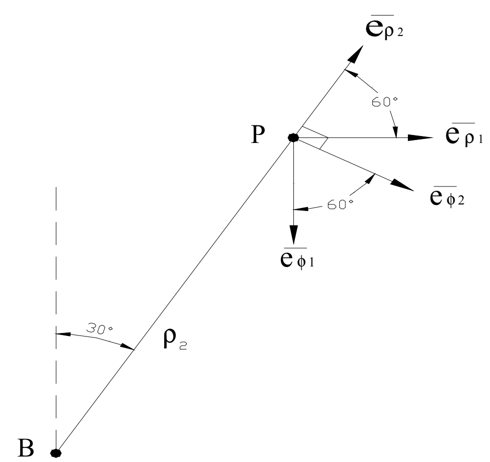
$$\rho_1 = 0.5tg30^o = 0.2887\ m \qquad \dot{\phi}_1 = 4\ \ rad/seg$$
$$\dot{\rho}_1 = ?$$

b).- Tomando como punto de referencia B en $\Im$ (ver figura P1-40b):

$$\bar{e}_{\rho 2} = \cos 60^o\ \bar{e}_{\rho 1} - sen60^o\ \bar{e}_{\phi 1}$$

$$\bar{e}_{\theta 2} = sen60^o\ \bar{e}_{\rho 1} + \cos 60^o\ \bar{e}_{\phi 1}$$

$$\rho_2 = \frac{0.5}{\cos 30^o} = 0.577\ m \qquad \dot{\phi}_2 = 1.5\ m/seg$$
$$\dot{\rho}_2 = ?$$



P1-40b

2).- Cálculo de la velocidad de P.-

a).- Tomando como punto de referencia A:

$$\bar{V}_P = \dot{\rho}_1\ \bar{e}_{\rho 1} + \rho_1 \dot{\phi}_1\ \bar{e}_{\phi 1} = \dot{\rho}_1\ \bar{e}_{\rho 1} + 0.2887 * 4\ \bar{e}_{\phi 1} = \dot{\rho}_1\ \bar{e}_{\rho 1} + 1.155\ \bar{e}_{\phi 1} \qquad (1)$$

b).- Tomando como punto de referencia B:

$$\bar{V}_P = \dot{\rho}_2\ \bar{e}_{\rho 2} + \rho_2 \dot{\phi}_2\ \bar{e}_{\phi 2} = \dot{\rho}_2 \left(\cos 60^o \bar{e}_{\rho 1} - sen60^o \bar{e}_{\phi 1}\right) + 0.577 * 1.5 \left(sen60^o \bar{e}_{\rho 1} + \cos 60^o \bar{e}_{\phi 1}\right)$$

$$\bar{V}_P = \left(\dot{\rho}_2 \cos 60^o + 0.75\right) \bar{e}_{\rho 1} + \left(-\dot{\rho}_2 sen60^o + 0.433\right) \bar{e}_{\phi 1} \qquad (2)$$

(1) = (2):

$$1.155 = -\dot{\rho}_2 sen60^o + 0.433 \quad \rightarrow \quad \dot{\rho}_2 = -0.8337\ \ \text{m/seg}$$

Luego:

$$\overline{V}_P = (-0.8337 * 0.5 + 0.75)\,\overline{e}_{\rho 1} + (0.8337 sen60º + 0.433)\,\overline{e}_{\phi 1}$$

$$\overline{V}_P = 0.333\,\overline{e}_{\rho 1} + 1.155\,\overline{e}_{\phi 1} \quad \rightarrow \quad \left|\overline{V}_P\right| = 1.2 \text{ m/seg}$$

También:

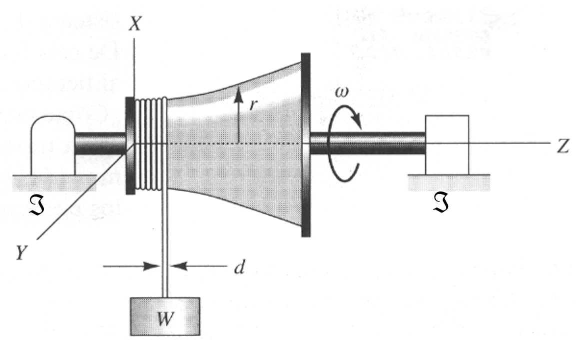
$$\overline{V}_P = -0.8337\,\overline{e}_{\rho 2} + 0.577 * 1.5\,\overline{e}_{\phi 2}$$

$$\overline{V}_P = -0.8337\,\overline{e}_{\rho 2} + 0.8655\,\overline{e}_{\phi 2} \text{ (m/seg)} \quad \rightarrow \quad \left|\overline{V}_P\right| = 1.2 \text{ m/seg}$$

1-41.- Un tambor de diámetro variable gira impulsado por un motor a una velocidad angular constante ω de 10 RPM. Una cuerda de diámetro "d" igual a 12 mm está enrollada al tambor y sostiene un peso W. Se desea que la velocidad del movimiento hacia arriba del peso esté dado por:

$$\dot{X} = 0.12 + \frac{t^2}{26x10^3} \quad \text{(m/seg)}$$

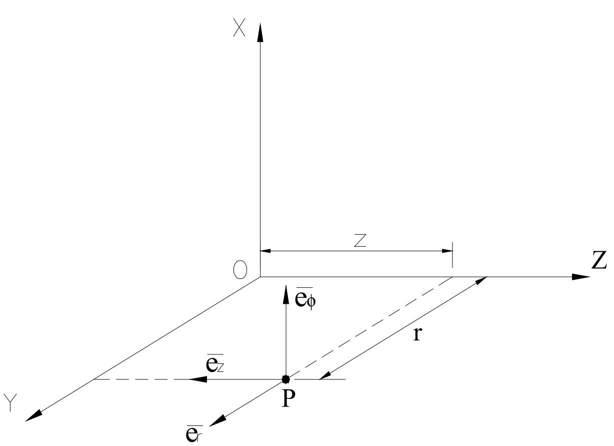
En donde, para t = 0 la cuerda está justo comenzando a enrollarse sobre el tambor en Z = 0 ¿Cuáles son las componentes radial y axial de la velocidad, para el peso W cuando t = 100 seg?



P1-41

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios que definen las coordenadas cilíndricas en un punto inmediato de contacto de la cuerda que une el peso W con el tambor (ver figura P1-41a) e identificación de los parámetros que definen el movimiento:



P1-41a

$$\left| \begin{array}{l} r = ? \\ \dot{r} = ? \end{array} \right| \dot{\phi} = 10 * \frac{\pi}{30} = 1.0472\ rad / seg \Big|$$

$$\left| \begin{array}{l} Z = ? \\ \dot{Z} = 0.012 * \dfrac{\dot{\phi}}{2\pi} = 2x10^{-3} \quad m/seg \end{array} \right|$$

2).- De la velocidad de P:

$$\overline{V}_P = \dot{r}\,\overline{e}_r + r\dot{\phi}\,\overline{e}_\phi + \dot{Z}\,\overline{e}_Z$$

En donde:

$$r\dot{\phi} = \dot{X} = 0.12 + \frac{t^2}{26x10^3}$$

$$r = 0.1146 + \frac{t^2}{27227.2} \quad \text{(m/seg)} \qquad (1)$$

También, la velocidad axial es:

$$\dot{Z} = \frac{dZ}{dt} = 2x10^{-3} \ \text{m/seg}$$

Separando variables e integrando:

$$\int_0^Z dZ = \int_0^t 2x10^{-3}\,dt \ \rightarrow \ Z = 2x10^{-3}\,t \quad \rightarrow \quad t = \frac{Z}{2x10^{-3}} \qquad (2)$$

(2) en (1):

$$Y = r = 0.1146 + \frac{Z^2}{\left(2x10^{-3}\right)^2} * \frac{1}{27227.2} \quad \rightarrow \quad r = 0.1146 + 9.182\,Z^2 \ \text{(m)}$$

3).- Cálculo de la componente radial de la velocidad del peso:

Para: $\dot{Z} = 2x10^{-3}$ m/seg = 2 mm/seg y $Z = 2x10^{-3} * 100 = 0.2$ m

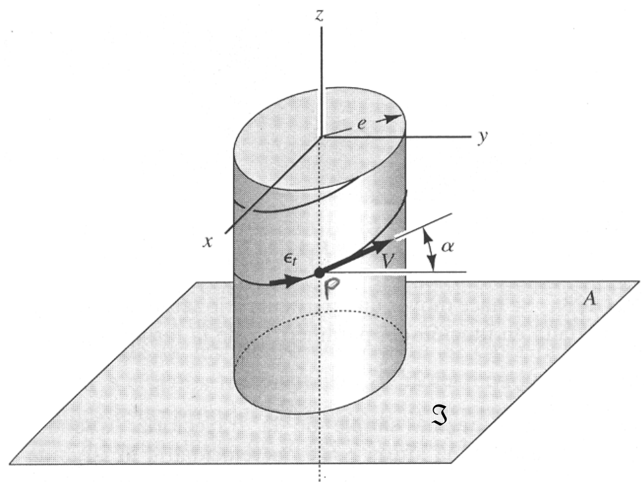
Si:

$$\dot{Y} = \dot{r} = 9.182 * 2Z\dot{Z}$$

Luego:

$$\dot{Y} = \dot{r} = 9.182 * 2 * 0.2 * 2x10^{-3} = 7.3456x10^{-3} \ \text{m/seg} \ \rightarrow \ \dot{Y} = 7.346 \ \text{mm/seg}$$

1-42.- Una partícula P tiene una velocidad variable $V_{(t)}$ a lo largo de una hélice enrollada alrededor de un cilindro de radio “e”. La hélice forma un ángulo constante α con un plano A perpendicular al eje Z. Expresar la aceleración de P, utilizando coordenadas cilíndricas. A continuación expresar $\bar{e}_t$ utilizando los vectores unitarios cilíndricos, teniendo en cuenta que la suma de las componentes transversal y axial de la aceleración de P (que se acaba de calcular) pueden darse simplemente con $\dot{V}\,\bar{e}_t$, de tal manera se expresa la aceleración de P en coordenadas naturales. Finalmente, teniendo en cuenta que de la velocidad $\bar{e}_n = -\bar{e}_\rho$, demostrar que el radio de curvatura está dado por $\rho_c = \dfrac{e}{\cos^2\alpha}$.



P1-42

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios indicados (ver figura P1-42a) y cálculo de la aceleración de P en coordenadas cilíndricas.-

Si:

$$\rho = e$$

$$\bar{V}_P = V\cos\alpha\,\bar{e}_\phi + V sen\alpha\,\bar{e}_Z$$

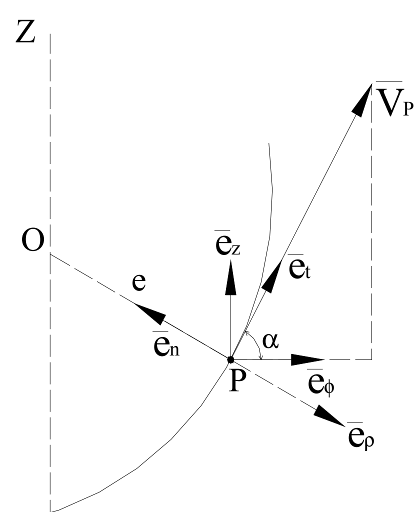
Derivando el vector velocidad de P respecto al marco inercial:

$$\bar{a}_P = \dot{V}\cos\alpha\,\bar{e}_\phi + V\cos\alpha\,{}^{\Im}\dot{\bar{e}}_\phi + \dot{V}sen\alpha\,\bar{e}_Z$$

$$\bar{a}_P = -V\dot{\phi}\cos\alpha\,\bar{e}_\rho + \dot{V}\left(\cos\alpha\,\bar{e}_\phi + sen\alpha\,\bar{e}_Z\right)$$

Además:

$$V\cos\alpha = \rho\,\dot{\phi} \quad\rightarrow\quad \dot{\phi} = \frac{V\cos\alpha}{e}$$



P1-42a

$$\therefore\ \bar{a}_P = -\frac{V^2\cos^2\alpha}{e}\,\bar{e}_\rho + \dot{V}\cos\alpha\,\bar{e}_\phi + \dot{V}sen\alpha\,\bar{e}_Z \quad \text{(Unid. de aceleración)}$$

2).- Determinación de la orientación del vector unitario tangencial y de la aceleración de P en coordenadas naturales:

$$\bar{e}_t = \cos\alpha\,\bar{e}_\phi + sen\alpha\,\bar{e}_Z$$

Si:

$$\bar{a}_P = -\frac{V^2\cos^2\alpha}{e}\,\bar{e}_\rho + \dot{V}\overbrace{\left(\cos\alpha\,\bar{e}_\phi + sen\alpha\,\bar{e}_Z\right)}^{\bar{e}_t} \quad \text{y} \quad \bar{e}_\rho = -\bar{e}_n$$

$$\therefore\ \bar{a}_P = \dot{V}\,\bar{e}_t + \frac{V^2\cos^2\alpha}{e}\,\bar{e}_n \quad \text{(Unid. de Aceleración)}$$

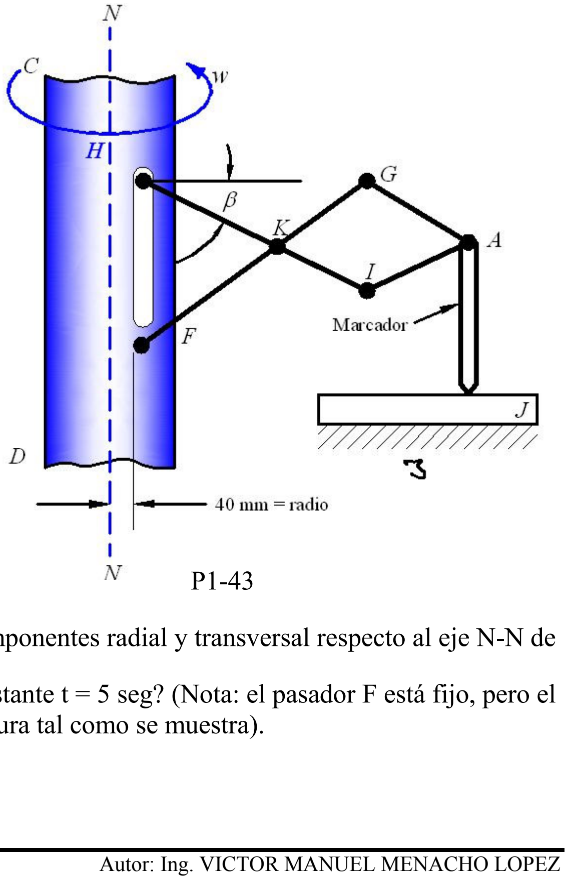
3).- Determinación del radio de curvatura:

Si:

$$\frac{V^2}{\rho_c} = \frac{V^2\cos^2\alpha}{e}$$

$$\rho_c = \frac{e}{\cos^2\alpha} \quad \text{(Unid. de longitud)}$$

1-43.-Una barra vertical gira de acuerdo con: $\omega = 3\,sen(0.1\,t)$ rad/seg, con t en seg. Fijado a la barra CD tenemos un sistema de bielas HI y FG de 200 mm de longitud cada una articulada entre sí en sus puntos medios K. Además GA e IA de 100 mm de longitud están articuladas entre sí tal como se muestra. En el extremo A se encuentra un marcador que marca una curva sobre la placa J. El ángulo β del sistema, viene dado por:

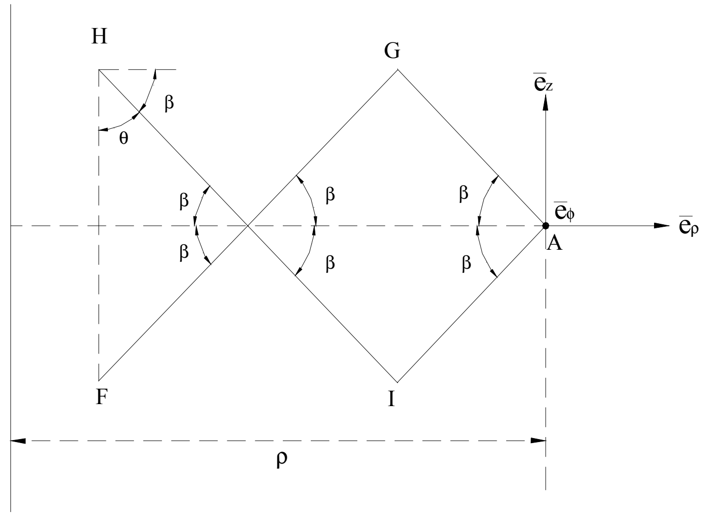


P1-43

$\beta = 1.3 - \dfrac{t}{10}$ (rad), con t en seg. ¿Cuáles son las componentes radial y transversal respecto al eje N-N de la velocidad y de la aceleración del marcador para el instante t = 5 seg? (Nota: el pasador F está fijo, pero el pasador H se mueve verticalmente a lo largo de una ranura tal como se muestra).

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios de las coordenadas cilíndricas (ver figura P1-43a) e identificación de los parámetros que definen el movimiento (marcador en traslación):



P1-43a

$$\rho = 40 + 200\cos\beta + 100\cos\beta$$

$$\rho = 40 + 300\cos\beta \quad \text{(mm)}$$

$$\dot{\rho} = -300 sen\beta\ \dot{\beta} \quad \text{(mm/seg)}$$

$$\ddot{\rho} = -300\cos\beta\ \dot{\beta}^2 - 300 sen\beta\ \ddot{\beta} \quad \text{(mm/seg}^2\text{)}$$

$$\dot{\phi} = \omega = 3sen(0.1\,t) \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\ddot{\phi} = \dot{\omega} = 0.3\cos(0.1\,t) \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

Para el caso específico de t = 5 seg:

$$\beta = 1.3 - \frac{5}{10} = 0.8 \quad \text{(rad)} \ \text{ó} \ \beta = 45.84^{o}$$

$$\dot{\beta} = -\frac{1}{10} \quad \text{(rad/seg)} \quad \text{y} \quad \ddot{\beta} = 0$$

$$\rho = 40 + 300\cos 45.84^{o} = 249 \quad \text{(mm)}$$

$$\dot{\rho} = -300 sen 45.84^{o} * (-0.1) = 21.52 \ \text{(mm/seg)}$$

$$\ddot{\rho} = -300\cos 45.84^{o} * (-0.1)^2 = -2.09 \ \text{(mm/seg}^2\text{)}$$

$$\dot{\phi} = 3sen 0.5 = 1.438 \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\ddot{\phi} = 0.3\cos 0.5 = 0.263 \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de A:

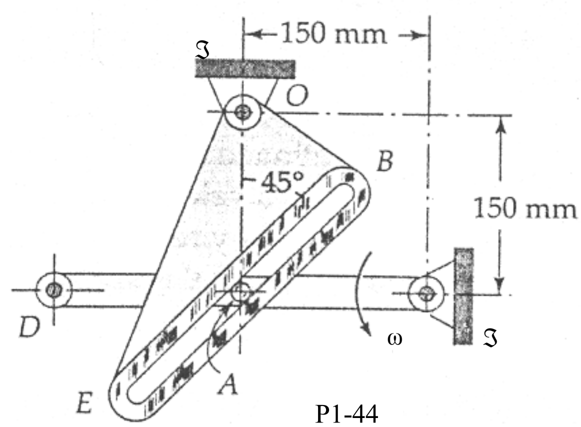
$$\overline{V}_A = \dot{\rho}\,\overline{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\overline{e}_\phi$$

$$\overline{V}_A = 21.52\,\overline{e}_\rho + 249*1.438\,\overline{e}_\phi = 21.52\,\overline{e}_\rho + 358.062\,\overline{e}_\phi \quad \text{(mm/seg)}$$

$$\overline{a}_A = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\overline{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\overline{e}_\phi = \left(-2.09 - 249*1.438^2\right)\overline{e}_\rho + \begin{pmatrix} 2*21.52*1.438+ \\ 249*0.263 \end{pmatrix}\overline{e}_\phi$$

$$\overline{a}_A = -516.98\,\overline{e}_\rho + 127.38\,\overline{e}_\phi \quad \text{(mm/seg}^2\text{)}$$

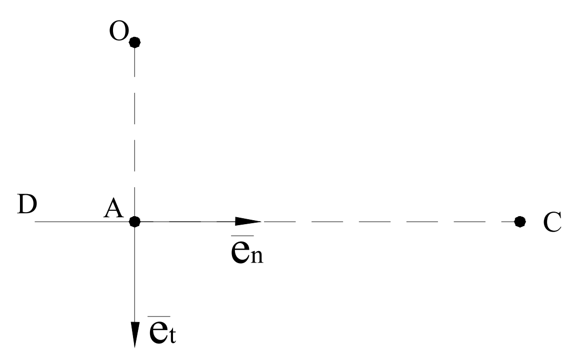
1-44.- En la posición que se muestra la varilla DC gira en sentido antihorario a la velocidad constante ω = 2 rad/seg. Usando coordenadas naturales para A (perteneciente a CD), hallar la velocidad angular y aceleración angular de EBO en el instante mostrado.



P1-44

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios, que definen las coordenadas natural (ver figura P1-44a):



P1-44a

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de A, tomando como punto de referencia “C”:

$$\overline{V}_A = \omega\, r_{CA}\overline{e}_t = 2*0.15 = 0.3\,\overline{e}_t \text{ (m/seg)} \qquad (1)$$

$$\overline{a}_A = \omega^2 r_{CA}\overline{e}_n = 4*0.15\,\overline{e}_n = 0.6\,\overline{e}_n \text{ (m/seg}^2\text{)} \qquad (2)$$

3).- Cálculo de la velocidad y aceleración de A, tomando como punto de referencia “O”; escogiendo A’ como punto perteneciente a OBE, pero coincidente con A.-

a).- Si:

$$\overline{V}_A = \overline{V}_{A/OBE} + \overline{V}_{A'/\Im}$$

$$\bar{V}_A = V_{A/OBE}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_t - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_n\right) + \omega_{OBE}\bar{e}_b x 0.15\,\bar{e}_t$$

$$\bar{V}_A = \frac{\sqrt{2}}{2}V_{A/OBE}\,\bar{e}_t + \left(0.15\omega_{OBE} - \frac{\sqrt{2}}{2}V_{A/OBE}\right)\bar{e}_n \qquad (3)$$

(1) = (3):

$$0.3 = \frac{\sqrt{2}}{2}V_{A/OBE} \quad \rightarrow \quad V_{A/OBE} = 0.3\sqrt{2} \ \text{ m/seg}$$

$$0 = 0.15\omega_{OBE} - 0.3\sqrt{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad \omega_{OBE} = 2 \ \text{rad/seg} \quad \text{(antihorario)}$$

b).- Si:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{A/OBE} + \bar{a}_{A'/\Im} + 2\bar{\omega}_{OBE} x \bar{V}_{A/OBE}$$

Donde:

$$\bar{a}_{A/OBE} = a_{A/OBE}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_t - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_n\right)$$

$$\bar{a}_{A'/\Im} = \alpha_{OBE}\bar{e}_b \ x\ \bar{r}_{0A'} - \omega^2_{OBE}\bar{r}_{OA'} = \alpha_{OBE}\bar{e}_b \ x\ 0.15\bar{e}_t - 4\left(0.15\bar{e}_t\right) = -0.6\bar{e}_t + 0.15\alpha_{OBE}\bar{e}_n$$

$$2\bar{\omega}_{OBE} x\ \bar{V}_{A/OBE} = 4\bar{e}_b \ x\ 0.3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_t - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_n\right) = 1.2\,\bar{e}_t + 1.2\,\bar{e}_n$$

Luego:

$$\bar{a}_A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a_{A/OBE} - 0.6 + 1.2\right)\bar{e}_t + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a_{A/OBE} + 0.15\alpha_{OBE} + 1.2\right)\bar{e}_n \qquad (4)$$

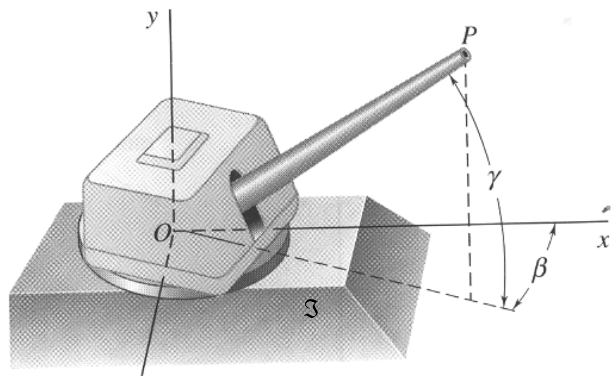
(2) = (4):

$$\frac{\sqrt{2}}{2} a_{A/OBE} + 0.6 = 0 \quad \rightarrow \quad a_{A/OBE} = -0.6\sqrt{2} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-0.6\sqrt{2}\right) + 0.15\alpha_{OBE} + 1.2 \right] = 0.6 \quad \rightarrow \quad 0.15\alpha_{OBE} = -1.2$$

$$\alpha_{OBE} = -8 \ \text{rad/seg}^2 \ \text{(horario)}$$

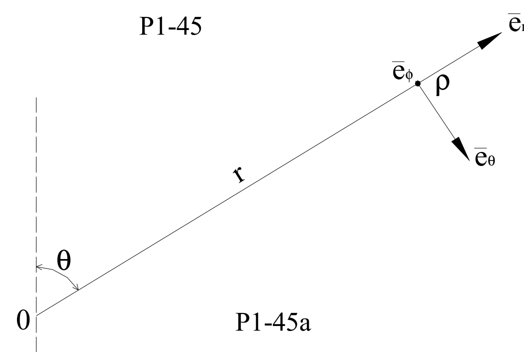
1-45.- Un tubo de cañón de longitud OP = 4 m está montado en una torreta como se muestra. Para mantener el arma apuntando a un blanco móvil el ángulo azimutal β se hace aumentar al ritmo dβ/dt = 30 °/seg y el ángulo de elevación γ se hace aumentar al ritmo dγ/dt =10 °/seg. Para la posición β = 90° y γ =30°.Usando coordenadas esféricas halle la velocidad y aceleración del punto P.



P1-45

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios que definen las coordenadas esféricas (ver figura P1-45a) e identificación de los parámetros que definen el movimiento:



P1-45a

$$r = 4\ m \qquad \dot{r} = 0 \qquad \ddot{r} = 0$$

$$\theta = 60° \qquad \dot{\theta} = -10\frac{°}{seg} * \frac{\pi}{180°} = -0.1745\ \frac{rad}{seg} \qquad \ddot{\theta} = 0$$

$$\dot{\phi} = -30\frac{°}{seg} * \frac{\pi}{180°} = -0.524\ \frac{rad}{seg} \qquad \ddot{\phi} = 0$$

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de P:

$$\overline{V}_P = r\dot{\theta}\,\overline{e}_\theta + r\dot{\phi}\ sen\theta\ \overline{e}_\phi = -4 * 0.1745\ \overline{e}_\theta - 4 * 0.524\ sen60°\ \overline{e}_\phi$$

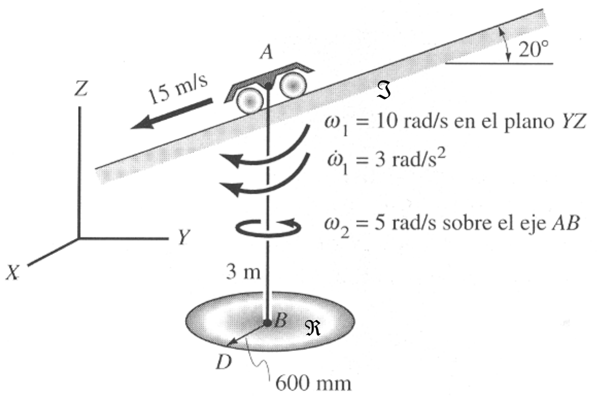
$$\overline{V}_P = -0.698\ \overline{e}_\theta - 1.815\ \overline{e}_\phi \quad \rightarrow \quad \left|\overline{V}_P\right| = 1.945 \ \text{m/seg}$$

$$\bar{a}_P = \left(-r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 sen^2\theta\right)\bar{e}_r + r\dot{\phi}^2 sen\theta\cos\theta\,\bar{e}_\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\,\bar{e}_\phi$$

$$\bar{a}_P = -4\begin{pmatrix}0.1745^2 + \\ 0.524^2 sen^2 60°\end{pmatrix}\bar{e}_r + 4*0.524^2 sen60°\cos 60°\bar{e}_\theta + 2*4*0.1745*0.524\cos 60°\bar{e}_\phi$$

$$\bar{a}_P = -0.946\,\bar{e}_r + 0.4756\,\bar{e}_\theta + 0.366\,\bar{e}_\phi \ \ (\text{m/seg}^2) \rightarrow \left|\bar{a}_P\right| = 1.12 \ \ \text{m/seg}^2$$

1-46.- Un elemento transportador baja por un plano inclinado con una velocidad de 15 m/seg. Un disco cuelga del elemento transportador y en el instante de interés que se muestra en el diagrama, está girando alrededor de AB con una velocidad angular de 5 rad/seg. Además, en el instante de interés el eje AB gira en el plano YZ con una velocidad angular ω_1 de 10 rad/seg y una aceleración angular $\dot{\omega}_1$ de 3 rad/seg². En ese instante DB está paralelo al eje X. Hallar la velocidad y la aceleración del punto D en el instante mostrado.



P1-46

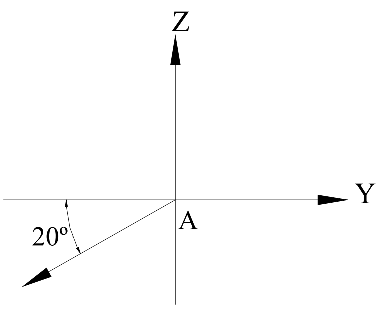
Solución

1).- Movimiento del marco móvil eje AB, y velocidad y aceleración del punto base B en $\Im$.-

a).- Cálculo del movimiento del marco móvil:

$$\bar{\omega}_{AB/\Im} = -\omega_1\bar{i} = -10\,\bar{i} \text{ (rad/seg)}$$

y $$\dot{\bar{\omega}}_{AB/\Im} = -\dot{\omega}_1\bar{i} = -3\,\bar{i} \ \ (\text{rad/seg}^2)$$



P1-46a

b).-Cálculo de la velocidad y aceleración de B en $\Im$:

$$\bar{V}_{B/\Im} = \bar{V}_{A/\Im} + \bar{\omega}_{AB/\Im}\,x\,\bar{r}_{AB} + \overbrace{\bar{V}_{B/AB}}^{0} = 15\left(-\cos 20°\,\bar{j} - sen20°\bar{k}\right) - 10\,\bar{i}\ x\left(-3\,\bar{k}\right)$$

$$\bar{V}_{B/\Im} = -44.09\,\bar{j} - 5.13\,\bar{k} \ \ (\text{m/seg})$$

$$\bar{a}_{B/\Im} = \overbrace{\bar{a}_{A/\Im}}^{0} + \overbrace{\bar{a}_{B/AB}}^{0} + \dot{\bar{\omega}}_{AB/\Im}\,x\,\bar{r}_{AB} - \omega^2_{AB/\Im}\bar{r}_{AB} = -3\,\bar{i}\ x\left(-3\,\bar{k}\right) - 100\left(-3\,\bar{k}\right)$$

$$\bar{a}_{B/\Im} = -9\ \bar{j} + 300\ \bar{k} \quad (\text{m/seg}^2)$$

2).- Movimiento de D en el marco móvil eje AB:

$$\bar{r}_{BD} = 0.6\ \bar{i} \quad (\text{m})$$

$$\bar{V}_{D/AB} = \bar{\omega}_{\Re/\Im}\ x\ \bar{r}_{BD} = 5\ \bar{k}\ x\ 0.6\ \bar{i} = 3\ \bar{j} \quad (\text{m/seg})$$

$$\bar{a}_{D/AB} = -\omega^2_{\Re/\Im}\bar{r}_{BD} = -25\left(0.6\ \bar{i}\right) = -15\ \bar{i} \quad (\text{m/seg}^2)$$

3).- Cálculo de la velocidad y aceleración de D en $\Im$:

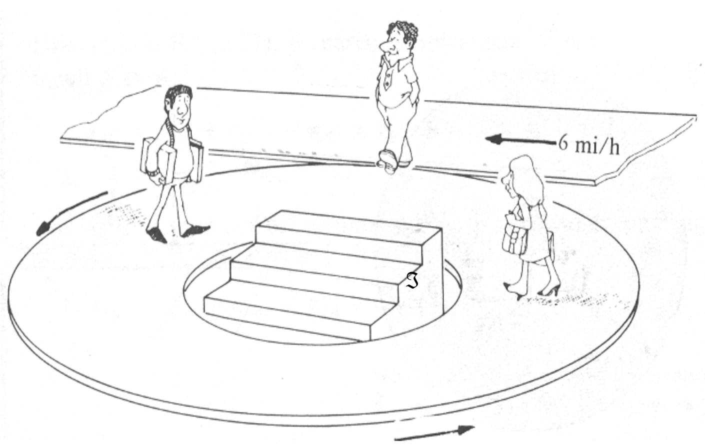
$$\bar{V}_{D/\Im} = \bar{V}_{B/\Im} + \bar{V}_{D/AB} + \bar{\omega}_{AB/\Im}\ x\ \bar{r}_{BD} = -44.09\ \bar{j} - 5.13\ \bar{k} + 3\ \bar{j} - 10\ \bar{i} x 0.6\ \bar{i}$$

$$\bar{V}_{D/\Im} = -41.09\ \bar{j} - 5.13\ \bar{k} \quad (\text{m/seg}) \quad \rightarrow \quad \left|\bar{V}_{D/\Im}\right| = 41.41 \text{ m/seg}$$

$$\bar{a}_{D/\Im} = \bar{a}_{B/\Im} + \bar{a}_{B/AB} + \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{AB/\Im} x \bar{r}_{BD}}^{0} + \bar{\omega}_{AB/\Im} x \overbrace{\left(\bar{\omega}_{AB/\Im} x \bar{r}_{AB}\right)}^{0} + 2\bar{\omega}_{AB/\Im} x \bar{V}_{D/AB}$$

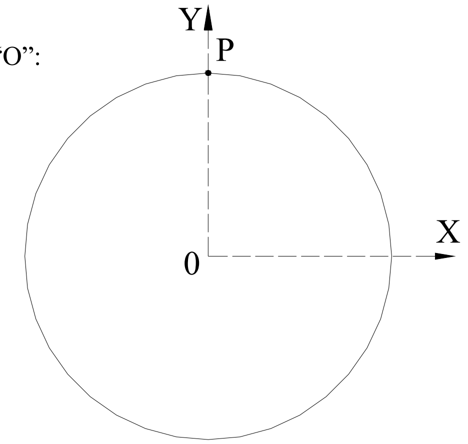
$$\bar{a}_{D/\Im} = -9\bar{j} + 300\ \bar{k} - 15\ \bar{i} - 20\ \bar{i} x 3 \bar{j} = -15\ \bar{i} - 9\ \bar{j} + 240\ \bar{k} \quad (\text{m/seg}^2) \rightarrow \left|\bar{a}_{D/\Im}\right| = 240.63 \quad \text{m/seg}^2$$

1-47.- Un anden se desplaza frente a una plataforma circular giratoria de 6 mi/hr (1 milla = 1609 m) (ver figura). La gente se pasa a la plataforma y se dirige en línea recta hacia el centro para salir por la escalera. Entre el anden y la plataforma giratoria hay contacto de rodamiento (las velocidades de los puntos de contacto son las mismas). Suponga que la gente camina con rapidez constante de 3 mi/hr respecto a la plataforma. Si se desea que la gente no experimente una aceleración lateral (en el plano horizontal) de más de 3 pie/seg^2, calcular el radio requerido de la plataforma.



P1-47

Solución



P1-47a

1).- Movimiento del marco móvil plataforma y del punto base "O":

a).-Movimiento del marco móvil:

$$\overline{\omega} = \frac{V_P}{r}\,\overline{k}$$

Si:

$$V_P = 6\,\frac{mi}{hr} * \frac{1609\ m}{1\ mi} * \frac{1\ hr}{3600} * \frac{1\ pie}{0.3048\ m} = 8.8\,\frac{pie}{seg}$$

Luego:

$$\overline{\omega} = \frac{8.8}{r}\,\overline{k}\ \ \text{(rad/seg)}\ \ \text{y}\ \ \dot{\overline{\omega}} = \overline{0}$$

b).- Velocidad y aceleración del punto base o conveniente "O":

$$\overline{V}_{O/\Im} = \overline{a}_{O/\Im} = \overline{0}$$

2).- Cálculo del movimiento de P respecto al marco móvil $\Re$:

$$\overline{r}_{OP} = r\ \overline{j}$$

$$\overline{V}_{P/\Re} = -3 * \frac{1609}{3600} * \frac{1}{0.3048}\,\overline{j} = -4.4\ \overline{j}\ \text{(pie/seg)}$$

$$\overline{a}_{P/\Re} = \overline{0}$$

3).- Cálculo del radio, obteniendo la aceleración del hombre "P" en el marco inercial tierra:

$$\overline{a}_{P/\Im} = \overbrace{\overline{a}_{O/\Im}}^{0} + \overbrace{\overline{a}_{P/\Re}}^{0} + \overbrace{\dot{\overline{\omega}}}^{0} x\overline{r}_{OP} - \omega^2\overline{r}_{OP} + 2\overline{\omega}x\overline{V}_{P/\Re}$$

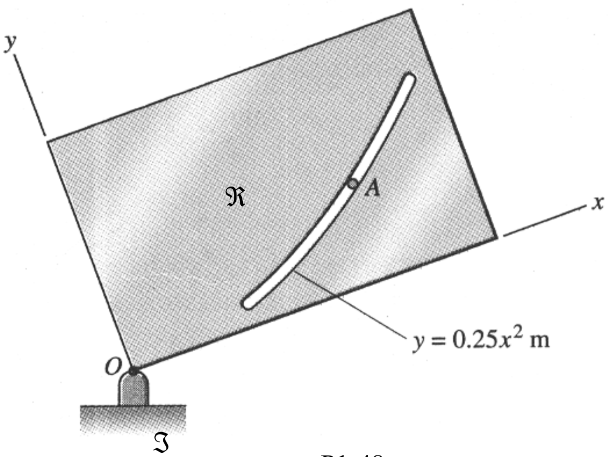
$$\overline{a}_{P/\Im} = -\frac{8.8^2}{r^2}\,r\ \overline{j} + 2*\frac{8.8}{r}\,\overline{k}\ x\left(-4.4\ \overline{j}\right) = \frac{8.8^2}{r}\,\overline{i} - \frac{8.8^2}{r}\,\overline{j}\ \ \text{(pie/seg}^2\text{)}$$

Si:

$$\left|\bar{a}_{P/\Im}\right| = 3 = \sqrt{2\frac{\left(8.8^2\right)^2}{r^2}} \quad \rightarrow \quad 9 = \frac{11\,993.9072}{r^2}$$

$$r^2 = 1332.656 \quad \Rightarrow \quad r = 36.5 \ \text{pies}$$

1-48.- La placa metálica del figura está unida a una junta esférica de soporte en O. El pasador A se desliza en una ranura de la placa. En el instante mostrado X_A =1m, dX_A/dt = - 3 m/seg, d^2X_A/dt^2 = 4 m/seg^2 y que la velocidad y aceleración angulares de la placa son $\bar{\omega} = -4\bar{j} + 2\,\bar{k}$ (rad/seg) y $\bar{\alpha} = 3\,\bar{i} - 6\bar{j}$ (rad/seg^2). ¿Cuáles son las componentes x,y,z de la velocidad y aceleración de A respecto a un marco de referencia sin rotación que está en reposo respecto a O?



P1-48

Solución

1).- Movimiento del marco móvil placa y del punto base O:

$$\bar{\omega} = -4\bar{j} + 2\,\bar{k} \ \text{(rad/seg)} \ \text{y} \ \bar{\alpha} = 3\,\bar{i} - 6\bar{j} \ \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{V}_O = \bar{a}_O = \bar{0}$$

2).- Movimiento de A respecto al marco móvil:

$$\bar{r}_{OA} = x_A\bar{i} + y_A\bar{j} = \bar{i} + 0.25\,\bar{j} \quad \text{(m)}$$

$$\bar{V}_{A/\Re} = \dot{x}_A\bar{i} + \dot{y}_A\bar{j} = -3\,\bar{i} + 0.5*1*(-3)\,\bar{j} = -3\,\bar{i} - 1.5\,\bar{j} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{a}_{A/\Re} = \ddot{x}_A\bar{i} + \ddot{y}_A\bar{j} = 4\,\bar{i} + 0.5\,(9+4)\,\bar{j} = 4\,\bar{i} + 6.5\,\bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

3).- Cálculo de la velocidad y aceleración de P en el marco inercial:

$$\bar{V}_A = \overbrace{\bar{V}_O}^{0} + \bar{\omega}x\,\bar{r}_{OA} + \bar{V}_{A/\Re} = \left(-4\bar{j} + 2\,\bar{k}\right)x\left(\bar{i} + 0.25\bar{j}\right) + \bar{V}_{A/\Re} = 4\,\bar{k} + 2\,\bar{j} - 0.5\,\bar{i} - 3\,\bar{i} - 1.5\,\bar{j}$$

$$\bar{V}_A = -3.5\,\bar{i} + 0.5\,\bar{j} + 4\,\bar{k} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{a}_A = \overbrace{\bar{a}_O}^{0} + \dot{\bar{\omega}}\ x\ \bar{r}_{OA} + \bar{\omega}\ x\ (\bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{OA}) + 2\bar{\omega}\ x\ \bar{V}_{A/\Re} + \bar{a}_{A/\Re}$$

$$\dot{\bar{\omega}} x\ \bar{r}_{OA} = (3\,\bar{i} - 6\,\bar{j}) x (\bar{i} + 0.25\,\bar{j}) = 0.75\,\bar{k} + 6\,\bar{k} = 6.75\,\bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{\omega} x (\bar{\omega} x\ \bar{r}_{OA}) = (-4\,\bar{j} + 2\bar{k}) x (-0.5\bar{i} + 2\,\bar{j} + 4\bar{k}) = -16\bar{i} - 2\bar{k} - 4\bar{i} - \bar{j} = -20\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

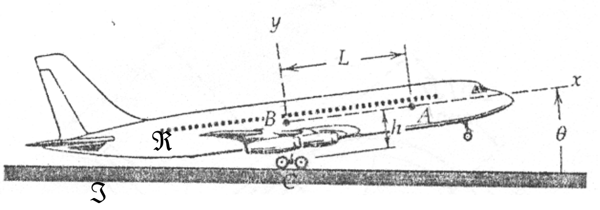
$$2\bar{\omega} x\ \bar{V}_{A/\Re} = (-8\,\bar{j} + 4\bar{k}) x (-3\bar{i} - 1.5\,\bar{j}) = -24\bar{k} + 6\bar{i} - 12\,\bar{j} = 6\bar{i} - 12\,\bar{j} - 24\bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

Luego:

$$\bar{a}_A = (-20 + 6 + 4)\,\bar{i} + (-1 - 12 + 6.5)\,\bar{j} + (6.75 - 2 - 24)\,\bar{k}$$

$$\bar{a}_A = -10\,\bar{i} - 6.5\,\bar{j} - 19.25\,\bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

1-49.- Cerca del final de su carrera de despegue, el avión está "basculante" (con el morro hacia arriba) inmediatamente antes de entrar en sustentación. Su velocidad y aceleración, expresadas en función del tren de ruedas C, son V_C y a_C, ambos dirigidas horizontalmente hacia delante. El ángulo de cabeceo es θ y su variación por unidad de tiempo $\omega = \dot{\theta}$ aumentando a razón $\alpha = \ddot{\theta}$. Si una persona A camina hacia delante por el pasillo central con una velocidad y aceleración V_{rel} y a_{rel}, ambos medidas hacia delante con relación a la cabina, deducir las expresiones de la velocidad y aceleración de A que observaría alguien inmóvil en la tierra.



P1-49

Solución

1).- Movimiento del marco móvil avión y del punto base o conveniente "C":

$$\bar{\omega}_{\Re/\Im} = \omega\,\bar{k} \quad \text{y} \quad \dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im} = \alpha\,\bar{k}$$

$$\bar{V}_C = V_C(\cos\theta\,\bar{i} - sen\theta\,\bar{j}) \quad \text{y} \quad \bar{a}_C = a_C(\cos\theta\,\bar{i} - sen\theta\,\bar{j})$$

2).- Movimiento de A respecto al marco móvil:

$$\bar{r}_{CA} = L\,\bar{i} + h\,\bar{j} \quad , \quad \bar{V}_{rel} = \bar{V}_{A/\Re} = \dot{L}\,\bar{i} \quad \text{y} \quad \bar{a}_{rel} = \bar{a}_{A/\Re} = \ddot{L}\,\bar{i}$$

3).- Cálculo de la velocidad y aceleración de A respecto al marco inercial tierra $\Im$:

$$\bar{V}_{A/\Im} = \bar{V}_C + \bar{V}_{rel} + \bar{\omega}_{\Re/\Im}\, x\, \bar{r}_{CA} = V_C\left(\cos\theta\,\bar{i} - sen\theta\,\bar{j}\right) + \dot{L}\,\bar{i} + \omega\,\bar{k}\; x\left(L\,\bar{i} + h\,\bar{j}\right)$$

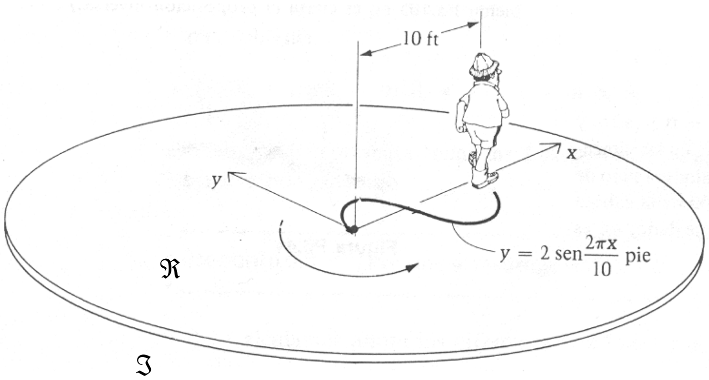
$$\bar{V}_{A/\Im} = \left(V_C\cos\theta - \omega\,h + \dot{L}\right)\bar{i} + \left(\omega\,L - V_C\;sen\theta\right)\bar{j} \quad \text{(Unid. de velocidad)}$$

$$\bar{a}_{A/\Im} = \bar{a}_C + \bar{a}_{rel} + \dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im}\, x\, \bar{r}_{OA} - \omega^2_{\Re/\Im}\,\bar{r}_{CA} + 2\bar{\omega}_{\Re/\Im}\, x\, \bar{V}_{rel}$$

$$\bar{a}_{A/\Im} = a_C\left(\cos\theta\,\bar{i} - sen\theta\,\bar{j}\right) + \ddot{L}\,\bar{i} + \alpha\,\bar{k}\; x\left(L\,\bar{i} + h\,\bar{j}\right) - \omega^2\left(L\,\bar{i} + h\,\bar{j}\right) + 2\omega\,\bar{k}\; x\;\dot{L}\,\bar{i}$$

$$\bar{a}_{A/\Im} = \left(a_C\cos\theta + \ddot{L} - h\,\alpha - L\omega^2\right)\bar{i} + \left(a_C sen\theta + L\,\alpha - \omega^2 h + 2\dot{L}\omega\right)\bar{j} \quad \text{(Unid. de aceleración)}$$

1-50.- Un hombre camina hacia el exterior de una plataforma giratoria a lo largo de una trayectoria sinusoidal fijo a la plataforma; ésta tiene 40 pies de diámetro y gira a 10 RPM (ver figura). Si la rapidez del hombre relativa a la plataforma es constante e igual a 2 pie/seg. ¿Cuál es la magnitud de su aceleración cuando el se encuentra a 10 pies del centro?



P1-50

Solución

1).- Movimiento del marco móvil disco $\Re$ y del punto base o conveniente "O":

$$\bar{\omega} = \omega\,\bar{k} = 10 * \frac{\pi}{30}\,\bar{k} = \frac{\pi}{3}\,\bar{k} \;\text{(rad/seg)} \quad \text{y} \quad \dot{\bar{\omega}} = \bar{0}$$

$$\bar{V}_O = \bar{a}_O = \bar{0}$$

2).- Movimiento del hombre respecto al marco móvil $\Re$:

$\bar{r}_{OH} = 10\ \bar{i}$ (pies)

$$\left|\bar{V}_{h/\Re}\right|^2 = 2^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2 + \left(\frac{4\pi}{10} * \dot{x} * \cos\frac{2\pi\ x}{10}\right)^2$$

$$4 = \dot{x}^2 + \frac{4\pi^2}{25} * \dot{x}^2 * \cos^2\frac{2\pi * x}{10}$$

Para, x = 10 pies:

$$4 = \dot{x}^2 + \frac{4\pi^2}{25} * \dot{x}^2 * \cos^2\frac{2\pi * 10}{10} = 2.58\ \dot{x}^2$$

$\dot{x}^2 = 1.55 \quad \rightarrow \quad \dot{x} = 1.245$ pies/seg

Luego:

$$\bar{V}_{h/\Re} = 1.245\ \bar{i} + \frac{2\pi}{5} * 1.245\ \bar{j} = 1.245\ \bar{i} + 1.565\ \bar{j} \quad \text{(pie/seg)}$$

$$\bar{a}_{h/\Re} = ?$$

Cálculo de la curvatura para x = 10 pies:

$$\frac{1}{\rho_c} = \left|\frac{-2\left(\frac{2\pi}{10}\right)^2 sen\frac{2\pi * x}{10}}{\left[1 + \left(\frac{4\pi}{10}\cos\frac{2\pi * x}{10}\right)^2\right]^{3/2}}\right| \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho_c} = 0$$

Luego:

$$\bar{a}_{h/\Re} = \overbrace{\dot{V}_{g/\Re}}^{0}\ \bar{e}_t + \frac{\overbrace{V_{h/\Re}^2}^{0}}{\rho_c}\ \bar{e}_n = \bar{0}$$

$$0 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = \ddot{x}^2 + \left(\frac{2\pi}{5} * \ddot{x} * \cos\frac{2\pi * x}{10} + \frac{4\pi^2}{10} * \dot{x} * sen\frac{2\pi * x}{10} \right)^2$$

Para, x = 10 pies:

$$0 = \ddot{x}^2 + \frac{4\pi^2}{25}\ddot{x}^2 \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = \ddot{y} = 0$$

3).- Cálculo de la aceleración del hombre en el marco de referencia inercial tierra:

$$\bar{a}_{h/\Im} = \overbrace{\bar{a}_O}^{0} + \overbrace{\bar{a}_{h/\Re}}^{0} + \overbrace{\dot{\bar{\omega}}}^{0} x\, \bar{r}_{Oh} + \bar{\omega}\ x\,(\bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{Oh}) + 2\bar{\omega}\ x\ \bar{V}_{h/\Re}$$

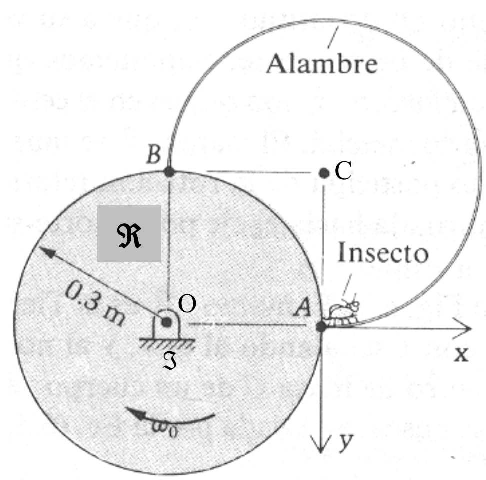
$$\bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{Oh} = \frac{\pi}{3}\bar{k}\ x\ 10\,\bar{i} = \frac{10\pi}{3}\bar{j}$$

$$\bar{\omega}\ x\,(\bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{Oh}) = \frac{\pi}{3}\bar{k}\ x\ \frac{10\pi}{3}\bar{j} = -\frac{10\pi^2}{9}\bar{i} = -10.97\,\bar{i} \quad \text{(pie/seg}^2\text{)}$$

$$2\bar{\omega}\ x\ \bar{V}_{h/\Re} = \frac{2\pi}{3}\bar{k}\ x\,(1.245\,\bar{i} + 1.565\,\bar{j}) = -3.28\,\bar{i} + 2.6\,\bar{j} \quad \text{(pie/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{a}_{h/\Im} = -(3.28 + 10.97)\,\bar{i} + 2.6\,\bar{j} = -14.25\,\bar{i} + 2.6\,\bar{j} \quad \text{(pie/seg}^2\text{)} \quad \rightarrow \quad \left|\bar{a}_{h/\Im}\right| = 14.49 \ \text{pie/seg}^2$$

1-51.- El disco $\Re$ gira alrededor de su eje con rapidez angular constante $\omega_0 = 0.1$ rad/seg. El alambre de contorno circular está unido rígidamente a $\Re$ en los puntos A y B, como se muestra en la figura. Un insecto camina sobre el alambre de A a B. Encuentre la velocidad y aceleración del insecto relativa al marco de referencia $\Im$ (en el cual gira el disco) al llegar a B, si: a) La rapidez relativa al alambre (inicialmente cero) crece a razón de 0.001 m/seg^2 y b) La velocidad relativa al alambre (inicialmente cero) crece a razón de 0.001 m/seg^2.



P1-51

Solución

Para ambos casos el marco móvil es el disco $\Re$ y el punto base o conveniente es el punto C

1).- Para el caso en que la rapidez crece a razón de 0.001 m/seg^2.-

a).- Moviendo del marco móvil y del punto base C:

$$\bar{\omega}_{\Re/\Im} = \bar{\omega}_O = 0.1\,\bar{k} \text{ (rad/seg) y } \dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im} = \bar{0}$$

$$\bar{V}_C = \bar{\omega}_O \; x \; \bar{r}_{OC} = 0.1\,\bar{k} \; x \left(0.3\,\bar{i} - 0.3\,\bar{j}\right) = 0.03\,\bar{i} + 0.03\,\bar{j} \text{ (m/seg)}$$

$$\bar{a}_C = -\omega_O^2 \; \bar{r}_{OC} = -0.01\left(0.3\,\bar{i} - 0.3\,\bar{j}\right) = -0.003\,\bar{i} + 0.003\,\bar{j} \text{ (m/seg}^2\text{)}$$

b).- Movimiento del insecto respecto al marco móvil (trayectoria circular):

Si:

$$\ddot{\theta}\,r = 0.001 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = 3.33x10^{-3} \text{ rad/seg}^2$$

También:

$$\dot{\theta}^2 = \overbrace{\dot{\theta}_0}^{0} + 2\ddot{\theta}\left(\theta - \overbrace{\theta_0}^{0}\right) = 2 * 3.33x10^{-3} * \frac{3\pi}{2} = 0.0314 \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = 0.177 \text{ rad/seg}$$

Luego:

$$\bar{r}_{CB} = -0.3\,\bar{i} \text{ (m)}$$

$$\bar{V}_{i/\Re} = \dot{\theta}\,r\,\bar{e}_t = 0.177 * 0.3\,\bar{j} = 0.0531\,\bar{j} \text{ (m/seg)}$$

$$\bar{a}_{i/\Re} = \ddot{\theta}\,r\,\bar{e}_t + \dot{\theta}^2 r\,\bar{e}_n = 0.001\,\bar{e}_t + 0.0314 * 0.3\,\bar{e}_n$$

$$\bar{a}_{i/\Re} = 0.00942\,\bar{i} + 0.001\,\bar{j} \text{ (m/seg}^2\text{)}$$

c).- Cálculo de la velocidad y aceleración del insecto en $\Im$:

$$\bar{V}_{i/\Im} = \bar{V}_C + \bar{V}_{i/\Re} + \bar{\omega}_{\Re/\Im}\,x\,\bar{r}_{CB} = \left(0.03\,\bar{i} + 0.03\,\bar{j}\right) + 0.0531\,\bar{j} + 0.1\,\bar{k}\;x\left(-0.3\,\bar{i}\right)$$

$$\bar{V}_{i/\Im} = 0.03\,\bar{i} + (0.03 + 0.0531 - 0.03)\,\bar{j} = 0.03\,\bar{i} + 0.0531\,\bar{j} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\left|\bar{V}_{i/\Im}\right| = 0.061 \;\; \text{m/seg} \quad \rightarrow \quad \left|\bar{V}_{i/\Im}\right| = 61 \;\; \text{mm/seg}$$

$$\bar{a}_{i/\Im} = \bar{a}_C + \bar{a}_{i/\Re} + \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im}}^{0} x\, \bar{r}_{CB} - \omega_0^2\; \bar{r}_{CB} + 2\bar{\omega}_{\Re/\Im}\, x\, \bar{V}_{i/\Re}$$

$$\bar{a}_{i/\Im} = \bar{a}_C + \bar{a}_{i/\Re} - 0.01(-0.3\,\bar{i}) + .2\,\bar{k}\;x\,(0.0531\bar{j})$$

$$\bar{a}_{i/\Im} = (0.003 - 0.0106 - 0.003 + 0.00942)\,\bar{i} + (0.003 + 0.001)\,\bar{j}$$

$$\bar{a}_{i/\Im} = -1.2x10^{-3}\,\bar{i} + 4x10^{-3}\,\bar{j} \quad (\text{m/seg}^2) \;\rightarrow\; \left|\bar{a}_{i/\Im}\right| = 4.176x10^{-3} \;\; \text{m/seg} \;\; \text{ó} \;\; \left|\bar{a}_{i/\Im}\right| = 4.176 \;\; \text{mm/seg}^2$$

2).- Para el caso en que la velocidad crece a razón de 0.001 m/seg^2.-
a).- Es lo mismo del acápite anterior a)

b).- Movimiento del insecto respecto al marco móvil:

Si:

$$\dot{\theta}^2 = 2\ddot{\theta}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3\pi\ddot{\theta}$$

Para la aceleración, en coordenadas naturales:

$$0.001^2 = \ddot{\theta}^2 r^2 + r^2\left(\dot{\theta}^2\right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{0.001^2}{0.3^2} = \ddot{\theta}^2 + 9\pi^2\ddot{\theta}^2$$

$$\ddot{\theta} = 3.52x10^{-4} \;\; \text{rad/seg}^2 \;\; \text{y} \;\; \dot{\theta} = 0.0576 \;\; \text{rad/seg}$$

Luego:

$$\bar{r}_{CB} = -0.3\,\bar{i} \quad \text{(m)}$$

$$\bar{V}_{i/\Re} = 0.0578 * 0.3\,\bar{e}_t = 0.01728\,\bar{j} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{a}_{i/\Re} = 3.54x10^{-4} * 0.3\,\bar{e}_t + 1x10^{-3}\,\bar{e}_n = 1x10^{-3}\bar{i} + 1.06x10^{-4}\,\bar{j} \quad (\text{m/seg}^2)$$

c).- Cálculo de la velocidad y aceleración del insecto en $\Im$:

$$\bar{V}_{i/\Im} = \left(0.03\,\bar{i} + 0.03\,\bar{j}\right) + 0.01728\,\bar{j} + 0.1\,\bar{k}\;x\left(-0.3\,\bar{i}\right) = 0.03\,\bar{i} + \left(0.03 - 0.03 + 0.01734\right)\bar{j}$$

$$\bar{V}_{i/\Im} = 0.03\,\bar{i} + 0.01728\,\bar{j}$$

$$\left|\bar{V}_{i/\Im}\right| = 0.03462 \;\text{ m/seg ó }\; \left|\bar{V}_{i/\Im}\right| = 34.62 \;\text{ mm/seg}$$

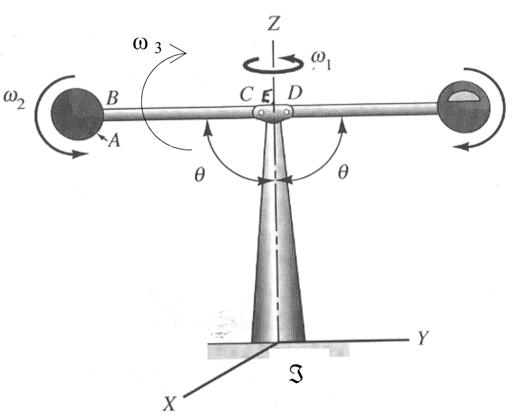
$$\bar{a}_{i/\Im} = \bar{a}_C + \bar{a}_{i/\Re} - 0.01\left(-0.3\,\bar{i}\right) + 0.2\,\bar{k}\;x\left(0.01728\,\bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_{i/\Im} = \left(-0.003 + 0.001 + 0.003 - 0.0035\right)\bar{i} + \left(0.003 + 1.06x10^{-4}\right)\bar{j}$$

$$\bar{a}_{i/\Im} = -0.0025\,\bar{i} + 0.0031\,\bar{j} \;\; (\text{m/seg}^2)$$

$$\left|\bar{a}_{i/\Im}\right| = 3.98x10^{-3} \;\text{ m/seg}^2 \text{ ó } \left|\bar{a}_{i/\Im}\right| = 3.98 \;\text{ mm/seg}^2$$

1-52.- Una atracción de un parque de atracciones consiste en una torre vertical estacionaria con brazos que pueden girar hacia fuera de la torre, al mismo tiempo, pueden girar alrededor de la misma. En los extremos de los brazos, las cabinas que contienen a los pasajeros pueden rotar respecto a los brazos. Consideremos el caso donde θ = 90°, en el que la cabina A gira con una velocidad angular ω_2 y una aceleración angular $\dot{\omega}_2$ ambos relativos al brazo BC, el cual gira con una velocidad angular ω_1 y una aceleración angular $\dot{\omega}_1$ ambos relativos a la torre y θ está creciendo uniformemente con velocidad angular ω_3 ¿Cuáles son la velocidad angular y la aceleración angular respecto al terreno? Utilizar: $\omega_1 = 0.3$ rad/seg, $\dot{\omega}_1 = 0.2$ rad/seg², $\omega_2 = 0.6$ rad/seg, $\dot{\omega}_2 = -0.1$ rad/seg² y $\omega_3 = 0.8$ rad/seg.



P1-52

Solución

1).- Cálculo de la velocidad angular de A respecto al marco inercial tierra $\Im$:

$$\bar{\omega}_{A/\Im} = \bar{\omega}_{CB/\Im} + \bar{\omega}_{A/CB} = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_3) + \bar{\omega}_2 = 0.3\,\bar{k} - 0.8\,\bar{i} + 0.6\,\bar{i}$$

$$\bar{\omega}_{A/\Im} = -0.2\,\bar{i} + 0.3\,\bar{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

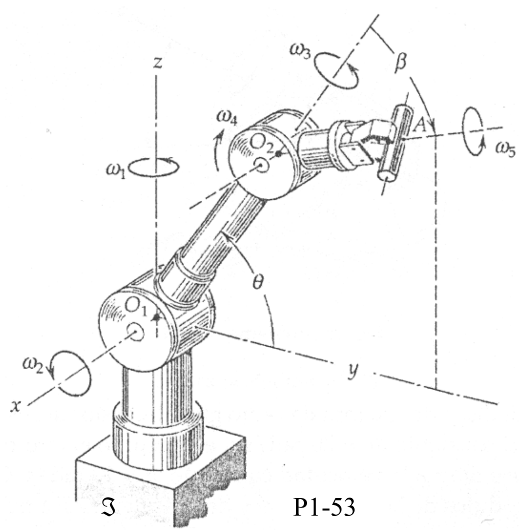
2).- Cálculo de la aceleración angular de A respecto al marco inercial tierra $\Im$:

$$\dot{\bar{\omega}}_{A/\Im} = \dot{\bar{\omega}}_1 + \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_3}^{0} + \bar{\omega}_1 x\, \bar{\omega}_3 + \dot{\bar{\omega}}_2 + (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_3) x\, \bar{\omega}_2$$

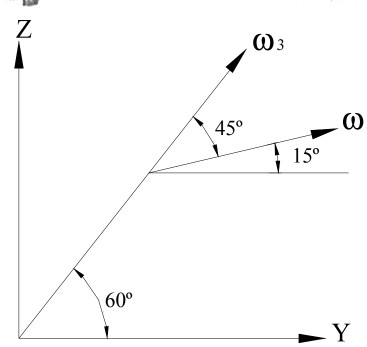
$$\dot{\bar{\omega}}_{A/\Im} = 0.2\,\bar{k} + 0.3\,\bar{k}\ x\,(-0.8\,\bar{i}) - 0.1\,\bar{i} + (0.3\,\bar{k} - 0.8\,\bar{i}) x\ 0.6\,\bar{i}$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{A/\Im} = -0.1\,\bar{i} - 0.06\,\bar{j} + 0.2\,\bar{k} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

1-53.- El robot de la figura tiene cinco grados de libertad de rotación. Los ejes xyz están fijos al anillo de la base, que gira en torno al eje z a la velocidad ω_1. El brazo O_1O_2 gira en torno al eje x a la velocidad $\omega_2 = \dot{\theta}$. El brazo O_2A gira en torno al eje O_1O_2 a la velocidad ω_3 y a la velocidad $\omega_4 = \dot{\beta}$ en torno a un eje perpendicular que pasa por O_2 y que está momentáneamente paralelo al eje x. Finalmente, la garra gira en torno al eje O_2A a la velocidad ω_5. Los módulos de estas velocidades angulares son constantes. Para la configuración representada hallar los vectores velocidad y aceleración angulares, Para $\theta = 60°$, $\beta = 45°$ y: a) $\omega_1 = 2$ rad/seg, $\omega_2 = 1.5$ rad/seg, $\omega_4 = 3$ rad/seg y $\omega_3 = \omega_5 = 0$, determinar asimismo la aceleración angular del brazo O_1O_2, b) $\omega_3 = 3$ rad/seg, $\omega_5 = 2$ rad/seg y $\omega_1 = \omega_2 = \omega_4 = 0$ y c) $\omega_1 = 2$ rad/seg, $\dot{\theta} = 2$ rad/seg y $\omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0$, así mismo encuentre el módulo de la velocidad angular.



P1-53



P1-53a

Solución

1).-Para a):

a).- Por el teorema de adición:

$$\bar{\omega}_{A/\Im} = \bar{\omega}_4 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1 = -3\,\bar{i} + 1.5\,\bar{i} + 2\,\bar{k} \qquad (1)$$

$\overline{\omega}_{A/\Im} = -1.5\,\bar{i} + 2\,\bar{k}$ (rad/seg)

b).- Cálculo de la aceleración angular, derivando (1) respecto al tiempo en $\Im$:

$$\dot{\overline{\omega}}_{A/\Im} = \overbrace{\dot{\overline{\omega}}_4}^{0} + \overline{\omega}_{O_1O_2/\Im}\, x\, \overline{\omega}_4 + \overbrace{\dot{\overline{\omega}}_2}^{0} + \overline{\omega}_{A/\Im}\, x\, \overline{\omega}_2 + \overbrace{\dot{\overline{\omega}}_1}^{0}$$

$$\dot{\overline{\omega}}_{A/\Im} = (\overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_1)\, x\, \overline{\omega}_4 + \overline{\omega}_{A/\Im}\, x\, \overline{\omega}_2$$

$$\dot{\overline{\omega}}_{A/\Im} = (1.5\,\bar{i} + 2\,\bar{k})x(-3\,\bar{i}) + (-1.5\,\bar{i} + 2\,\bar{k})\, x\, 1.5\,\bar{i} = -6\,\bar{j} + 3\bar{j} = -3\,\bar{j} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

c).- Cálculo de la aceleración angular del brazo O_1O_2.-

Derivando:

$$\overline{\omega}_{O1O2} = \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_1$$

Luego:

$$\overline{\alpha}_{O1O2} = \overline{\omega}_1 x\, \overline{\omega}_2 = 2\,\bar{k}\; x\, 1.5\,\bar{i} = 3\,\bar{j} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

2).- Para b):

$$\overline{\omega}_{A/\Im} = \overline{\omega}_3 + \overline{\omega}_5 = 3\,(\cos 60°\,\bar{j} + sen60°\,\bar{k}) + 2\,(\cos 15°\,\bar{j} + sen15°\,\bar{k})$$

$$\overline{\omega}_{A/\Im} = 3.43\,\bar{j} + 3.12\,\bar{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\dot{\overline{\omega}}_{A/\Im} = \overline{\omega}_3 x\, \overline{\omega}_5 = (1.5\,\bar{j} + 2.6\,\bar{k})x(1.93\,\bar{j} + 0.52\,\bar{k})$$

$$\dot{\overline{\omega}}_{A/\Im} = 0.78\,\bar{i} - 5.02\,\bar{i} = -4.24\,\bar{i} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

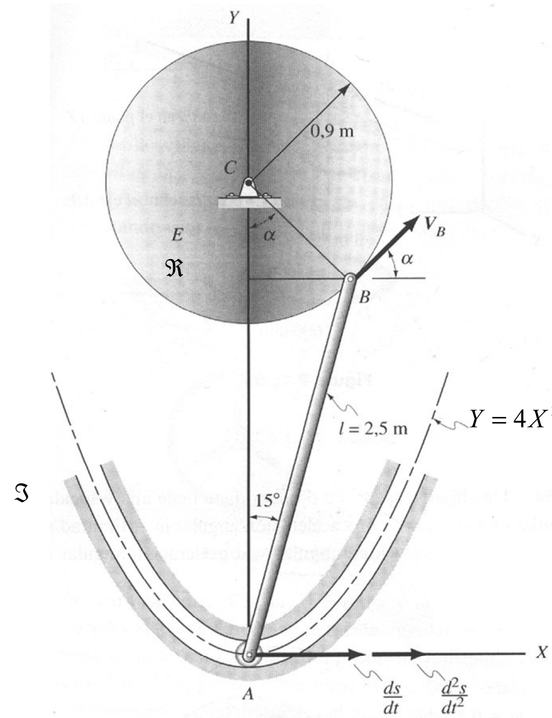
3).- Para c):

$$\overline{\omega}_{A/\Im} = \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_1 = 1.5\,\bar{i} + 2\,\bar{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\left|\overline{\omega}_{A/\Im}\right| = 2.5 \text{ rad/seg}$$

$$\dot{\overline{\omega}}_{A/\Im} = \overline{\omega}_1 x\, \overline{\omega}_2 = 2\,\overline{k}\ x\,1.5\,\overline{i} = 3\,\overline{j} \quad (\text{rad/seg}^2)$$

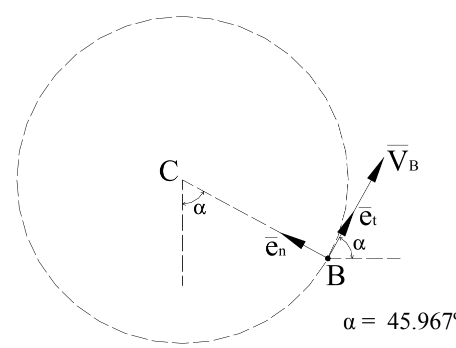
1-55. - La deslizadera A se mueve por una ranura parabólica con una velocidad $\dot{s}$ = 3 m/seg y $\ddot{s}$ = 1 m/seg^2 en el instante mostrado en el diagrama. El cilindro $\Re$ está conectado con A mediante la biela AB. Hallar: a) La velocidad y aceleración angular del cilindro para el instante mostrado y b) La aceleración angular de la biela AB.



P1-54

Solución

1).- Cálculo del movimiento de B tomando como punto de referencia C en (ver figura P1-54a):



P1-54a

$$\overline{V}_B = \omega_{\Re} r\,\overline{e}_t = 0.9\omega_{\Re}\overbrace{\left(\cos\alpha\,\overline{i} + sen\alpha\,\overline{j}\right)}^{\overline{e}_t}$$

$$\overline{V}_B = \omega_{\Re}\left(0.626\,\overline{i} + 0.647\,\overline{j}\right) \quad (\text{m/seg}) \qquad (1)$$

$$\overline{a}_B = \dot{\omega}_{\Re} r\,\overline{e}_t + \omega_{\Re}^2 r\,\overline{e}_n$$

$$\overline{a}_B = \dot{\omega}_{\Re}\left(0.626\,\overline{i} + 0.647\,\overline{j}\right) + \omega_{\Re}^2\left(-0.647\,\overline{i} + 0.626\,\overline{j}\right)$$

$$\overline{a}_B = \left(0.626\dot{\omega}_{\Re} - 0.647\omega_{\Re}^2\right)\overline{i} + \left(0.647\dot{\omega}_{\Re} + 0.626\omega_{\Re}^2\right)\overline{j} \qquad (2)$$

2).- Cálculo del movimiento de B tomando como punto base A, donde el marco móvil es la biela AB.-

a).- Movimiento del marco móvil AB y del punto base A.-

i).- Movimiento del marco móvil:

$\overline{\omega}_{AB} = \omega_{AB}\overline{k}$ y $\dot{\overline{\omega}}_{AB} = \dot{\omega}_{AB}\overline{k}$

ii).- Movimiento del punto base o conveniente A:

$\overline{V}_A = \dot{s}\,\overline{e}_t^{'} = 3\,\overline{i}$ (m/seg)

$$\overline{a}_A = \ddot{s}\,\overline{e}_t^{'} + \frac{\dot{s}^2}{\rho_c}\overline{e}_n^{'} = \overline{i} + \frac{9}{\rho_c}\,\overline{j} \qquad (3)$$

Si:

$$\frac{1}{\rho_c} = \left| \frac{d^2Y/dX^2}{\left[1+\left(dY/dX\right)^2\right]^{3/2}} \right| \rightarrow \frac{dY}{dX} = 8X \text{ y } \frac{d^2Y}{dX^2} = 8$$

Luego:

$$\frac{1}{\rho_C} = \left| \frac{8}{\left(1+64\overbrace{X^2}^{0}\right)^{3/2}} \right| = 8$$

En (3):

$\overline{a}_A = \overline{i} + 72\,\overline{j}$ (m/seg^2)

b).- Movimiento de B en AB:

$\overline{r}_{AB} = 2.5\left(\cos 75°\,\overline{i} + sen 75°\,\overline{j}\right) = 0.647\,\overline{i} + 2.415\,\overline{j}$ (m)

$\overline{V}_{B/AB} = \overline{a}_{B/AB} = \overline{0}$

c).- Movimiento de B en $\Im$:

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overbrace{\overline{V}_{B/AB}}^{0} + \omega_{AB} x\,\overline{r}_{AB} = 3\,\overline{i} + \omega_{AB}\overline{k}\ x\left(0.647\,\overline{i} + 2.415\,\overline{j}\right)$$

$$\bar{V}_B = (3 - 2.415\omega_{AB})\,\bar{i} + 0.647\omega_{AB}\,\bar{j} \qquad (4)$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \overbrace{\bar{a}_{B/AB}}^{0} + \dot{\omega}_{AB}\bar{k}\ x\ \bar{r}_{AB} - \omega_{AB}^2\bar{r}_{AB} + 2\bar{\omega}_{AB}\,x\,\overbrace{\bar{V}_{B/AB}}^{0}$$

$$\bar{a}_B = \bar{i} + 72\ \bar{j} + \dot{\omega}_{AB}\bar{k}\ x\ (0.647\ \bar{i} + 2.415\ \bar{j}) - \omega_{AB}^2(0.647\ \bar{i} + 2.415\ \bar{j})$$

$$\bar{a}_B = (1 - 2.415\dot{\omega}_{AB} - 0.647\omega_{AB}^2)\,\bar{i} + (72 + 0.647\dot{\omega}_{AB} - 2.415\omega_{AB}^2)\,\bar{j} \qquad (5)$$

3).- Ecuaciones de compatibilidad.-

a).- Si: (1) = (4), igualando componentes y operando:

$$0.647\omega_{\Re} = 0.647\omega_{AB} \quad \rightarrow \quad \omega_{\Re} = \omega_{AB}$$

$$0.626\omega_{\Re} = 3 - 2.415\omega_{AB} \quad \rightarrow \quad 3.041\omega_{\Re} = 3$$

$$\omega_{\Re} = 0.987 \quad \text{rad/seg}$$

b).- Si: (2) = (5), igualando componentes y operando:

$$0.626\dot{\omega}_{\Re} - 0.647 * 0.987^2 = 1 - 2.415\dot{\omega}_{AB} - 0.647 * 0.987^2$$

$$0.626\dot{\omega}_{\Re} = 1 - 2.415\dot{\omega}_{AB} \qquad (6)$$

$$0.647\dot{\omega}_{\Re} + 0.626 * 0.987^2 = 72 + 0.647\dot{\omega}_{AB} - 2.415 * 0.987^2$$

$$0.647\dot{\omega}_{\Re} = 69.04 + 0.647\dot{\omega}_{AB} \qquad (7)$$

(6) ÷ (7):

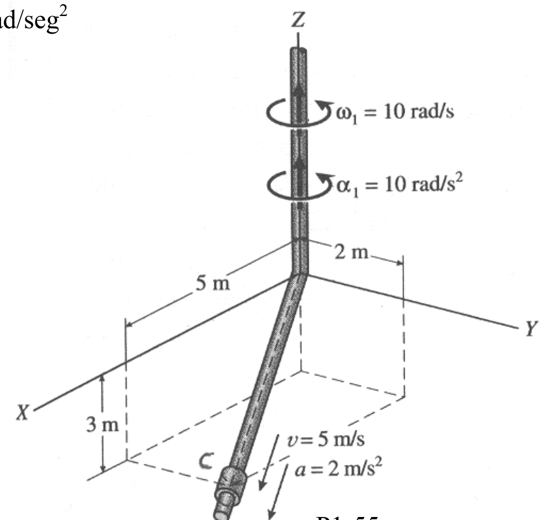
$$0.968 = \frac{1 - 2.415\dot{\omega}_{AB}}{69.04 + 0.647\dot{\omega}_{AB}}$$

$$66.83 + 0.626\omega_{AB} = 1 - 2.415\dot{\omega}_{AB} \quad \rightarrow \quad \dot{\omega}_{AB} = -21.65 \quad \text{rad/seg}^2$$

En (6):

$$0.626\dot{\omega}_{\Re} = 1 + 2.415 * 21.65 \rightarrow \dot{\omega}_{\Re} = 85.12 \text{ rad/seg}^2$$

1-55.- En el instante que se muestra, una barra gira alrededor de su eje vertical con velocidad angular ω_1 = 10 rad/seg y aceleración angular α_1 = 10 rad/seg^2, mientras el collarín que aparece en la figura se desliza hacia abajo con relación a la barra. Determine la velocidad y aceleración del collarín en el instante que se muestra. Usando coordenadas cilíndricas, esféricas y movimiento en marcos móviles.

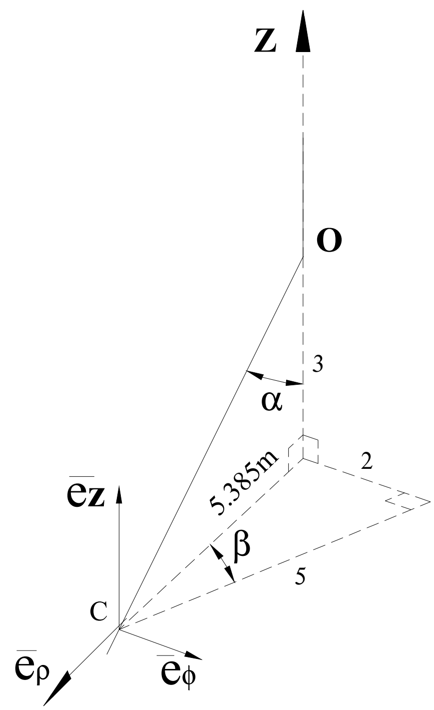


P1-55

Solución

1).- Utilizando coordenadas cilíndricas:

a).- Orientación de los vectores unitarios de las coordenadas (ver figura P1-55a) e identificación de los parámetros que definen el movimiento.



P1-55a

$$tg\alpha = \frac{5.385}{3} = 1.795 \quad \rightarrow \quad \alpha = 60.88°$$

$$\begin{vmatrix} \rho = 5.385\ m \\ \dot{\rho} = Vsen\alpha = 5sen60.88° = 4.368\ m/seg \\ \ddot{\rho} = asen\alpha = 2sen60.88° = 1.747\ m/seg^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \dot{\phi} = \omega_1 = 10\ rad/seg \\ \ddot{\phi} = \alpha_1 = 10\ rad/seg^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \dot{Z} = -5\cos 60.88° = -2.43\ m/seg \\ \ddot{Z} = -2\cos 60.88° = -0.973\ m/seg^2 \end{vmatrix}$$

b).- Cálculo de la velocidad y aceleración de C:

$$\overline{V}_C = \dot{\rho}\,\overline{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\overline{e}_\phi + \dot{Z}\,\overline{e}_Z = 4.368\,\overline{e}_\rho + 5.385*10\,\overline{e}_\phi - 2.433\,\overline{e}_Z$$

$$\overline{V}_C = 4.368\,\overline{e}_\rho + 53.85\,\overline{e}_\phi - 2.433\,\overline{e}_Z \quad \rightarrow \quad \left|\overline{V}_C\right| = 54.08 \text{ m/seg}$$

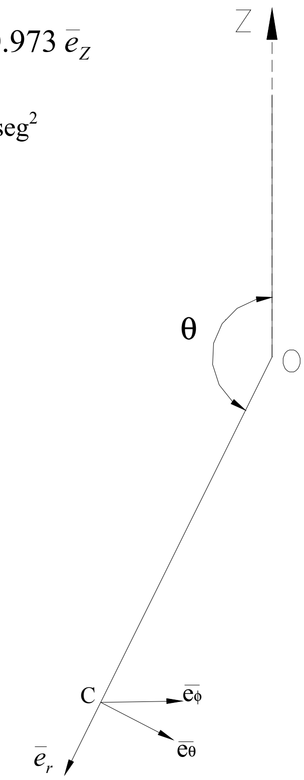
$$\bar{a}_C = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\bar{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\bar{e}_\phi + \ddot{Z}\,\bar{e}_Z$$

$$\bar{a}_C = (1.747 - 5.385*100)\,\bar{e}_\rho + (2*4.368*10 + 5.385*10)\,\bar{e}_\phi - 0.973\,\bar{e}_Z$$

$$\bar{a}_C = -536.753\,\bar{e}_\rho + 141.21\,\bar{e}_\phi - 0.973\,\bar{e}_Z \quad \rightarrow \quad \left|\bar{a}_C\right| = 555.02 \ \text{ m/seg}^2$$

2).- Utilizando coordenadas esféricas.-

a).- Orientación de los vectores unitarios de las coordenadas (ver figura P1-55b) e identificación de los parámetros que definen el movimiento.



P1-55b

$$\begin{array}{|l|l|} r = 6.164\ m & \theta = 180 - 60.88 = 119.92° \\ \dot{r} = 5\ m/seg & \dot{\theta} = 0 \\ \ddot{r} = 2\ m/seg^2 & \ddot{\theta} = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{|l|} \dot{\phi} = \omega_1 = 10\ rad/seg \\ \ddot{\phi} = \alpha_1 = 10\ rad/seg^2 \end{array}$$

b).- Cálculo de la velocidad y aceleración de C:

$$\bar{V}_C = \dot{r}\,\bar{e}_r + r\dot{\theta}\,\bar{e}_\theta + r\dot{\phi}\,sen\theta\,\bar{e}_\phi = 5\,\bar{e}_r + 6.164*10\,sen 119.12°\,\bar{e}_\phi$$

$$\bar{V}_C = 5\,\bar{e}_r + 53.85\,\bar{e}_\phi \quad \rightarrow \quad \left|\bar{V}_C\right| = 54.08 \ \text{ m/seg}$$

$$\bar{a}_C = \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 sen^2\theta\right)\bar{e}_r - r\dot{\phi}^2 sen\theta\cos\theta\,\bar{e}_\theta + \left(2\dot{r}\dot{\phi}\,sen\theta + r\ddot{\phi}\,sen\theta\right)\bar{e}_\phi$$

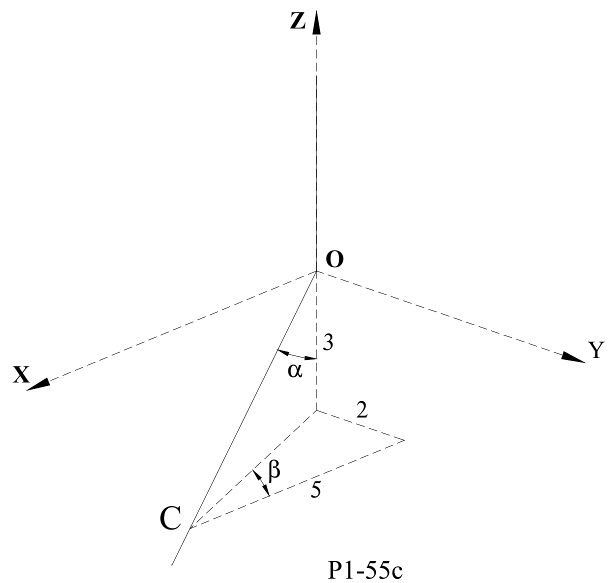
$$\bar{a}_C = (2 - 6.164*100\,sen\,119.12°)\,\bar{e}_r - 6.164*100\,sen\,119.12°\cos 119.12°\bar{e}_\theta$$
$$+ (2*5*10 + 6.164*10)\,sen\,119.12°\bar{e}_\phi$$

$$\bar{a}_C = -468.425\,\bar{e}_r + 262.05\,\bar{e}_\theta + 141.21\,\bar{e}_\phi \quad \rightarrow \quad \left|\bar{a}_C\right| = 555.01 \ \text{ m/seg}^2$$

3).- Utilizando movimiento en marcos móviles.- El marco móvil es la barra doblada (ver figura P1-55c):

$\beta = 21.8°$

$\alpha = 60.88°$



P1-55c

a).- Movimiento de la coordenada móvil y del punto base o conveniente O:

$$\bar{\omega} = \omega_1 \bar{k} = 10\ \bar{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \alpha_1\ \bar{k} = 10\ \bar{k} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{V}_{O/\Im} = \bar{a}_{O/\Im} = \bar{0}$$

b).- Movimiento de C en el marco móvil:

$$\bar{r}_{OC} = 5\ \bar{i} + 2\ \bar{j} - 3\ \bar{k} \quad \rightarrow \quad \bar{e}_{OC} = 0.811\ \bar{i} + 0.324\ \bar{j} - 0.487\ \bar{k}$$

$$\bar{V}_{C/\Re} = V_{XY} \cos\beta\ \bar{i} + V_{XY} sen\beta\ \bar{j} - V_Z \cos\alpha\ \bar{k}$$

$$\bar{V}_{C/\Re} = 5\ sen\ 60.88° \cos 21.8°\ \bar{i} + 5\ sen\ 60.88° sen\ 21.8° \bar{j} - 5 \cos 60.88°\ \bar{k}$$

$$\bar{V}_{C/\Re} = 4.055\ \bar{i} + 1.62\ \bar{j} - 2.435\ \bar{k}$$

$$\bar{a}_{C/\Re} = 2\ sen\ 60.88° \cos 21.8°\ \bar{i} + 2\ sen\ 60.88° sen\ 21.8° \bar{j} - 2 \cos 60.88°\ \bar{k}$$

$$\bar{a}_{C/\Re} = 1.622\ \bar{i} + 0.648\ \bar{j} - 0.974\ \bar{k}$$

c).- Movimiento de C en el marco inercial:

$$\bar{V}_C = \bar{V}_{C/\Re} + \bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{OC} = 4.055\ \bar{i} + 1.62\ \bar{j} - 2.435\ \bar{k} + 10\ \bar{k}\ x\ \left(5\ \bar{i} + 2\ \bar{j} - 3\ \bar{k}\right)$$

$$\bar{V}_C = -15.945\ \bar{i} + 51.62\ \bar{j} - 2.435\ \bar{k} \quad \text{(m/seg)} \quad \rightarrow \quad \left|\bar{V}_C\right| = 54.08 \quad \text{m/seg}$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{C/\Re} + \dot{\bar{\omega}} \; x \; \bar{r}_{OC} + \bar{\omega} \; x \; (\bar{\omega} \; x \; \bar{r}_{OC}) + 2\bar{\omega} \; x \; \bar{V}_{C/\Re}$$

$$\dot{\bar{\omega}} \; x \; \bar{r}_{OC} = 10 \; \bar{k} \; x \; \left(5 \; \bar{i} + 2 \; \bar{j} - 3 \; \bar{k}\right) = -20 \; \bar{i} + 50 \; \bar{j} \quad (\text{m/seg}^2)$$

$$\bar{\omega} \; x \; (\bar{\omega} \; x \; \bar{r}_{OC}) = 10 \; \bar{k} \; x \; \left(-20 \; \bar{i} + 50 \; \bar{j}\right) = -500 \; \bar{i} - 200 \; \bar{j} \quad (\text{m/seg}^2)$$

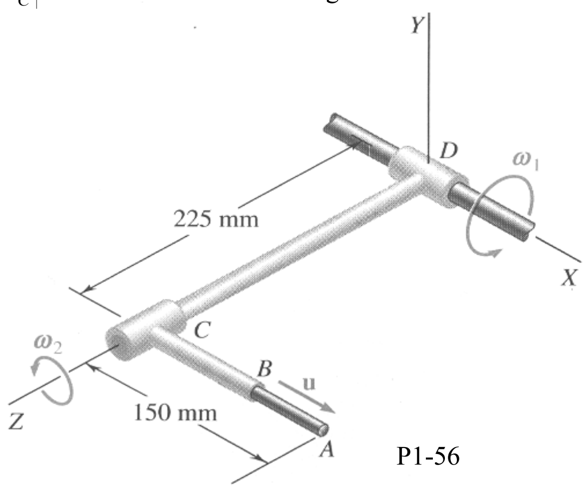
$$2\bar{\omega} \; x \; \bar{V}_{C/\Re} = 20 \; \bar{k} \; x \; \left(4.055 \; \bar{i} + 1.62 \; \bar{j} - 2.435 \; \bar{k}\right) = -32.4 \; \bar{i} + 81.1 \; \bar{j} \quad (\text{m/seg}^2)$$

Luego:

$$\bar{a}_C = (1.622 - 20 - 500 - 32.4) \; \bar{i} + (0.648 + 50 - 200 + 81.1) \; \bar{j} - 0.974 \; \bar{k}$$

$$\bar{a}_C = 550.778 \; \bar{i} + 68.252 \; \bar{j} - 0.974 \; \bar{k} \quad \rightarrow \quad |\bar{a}_C| = 554.995 \cong 555 \quad \text{m/seg}^2$$

1-56.- En la posición representada la varilla delgada se mueve con una velocidad constante u = 75 mm/seg hacia el extremo del tubo BC. Al mismo tiempo el tubo BC gira a la velocidad angular constante ω_2 = 1.5 rad/seg respecto al brazo CD. Sabiendo que todo el conjunto gira alrededor del eje X a la velocidad constante ω_1 = 1.2 rad/seg, hallar la velocidad y aceleración del extremo A de la varilla. Usando coordenadas cilíndricas en DC y movimiento en marcos móviles.

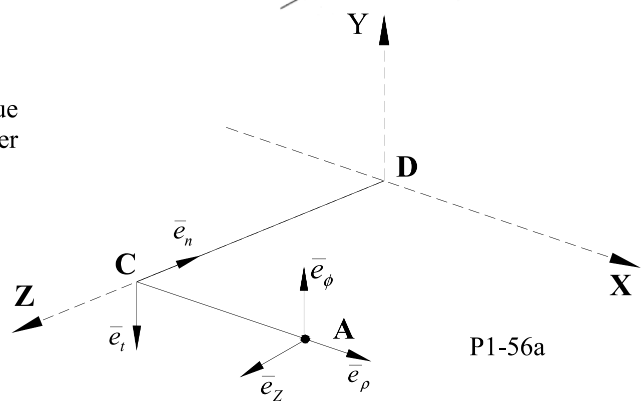


P1-56

Solución

1).- Usando coordenadas cilíndricas en DC.-

a).- Orientación de los vectores unitarios, que definen las coordenadas cilíndricas en DC (ver figura P1-56a):



P1-56a

$$\bar{e}_t = -\bar{e}_\phi$$
$$\bar{e}_n = -\bar{e}_Z$$

b).- Movimiento del marco móvil y del punto base C en el marco inercial Tierra.-

i).- Movimiento del marco móvil:

$$\bar{\omega}_{CD} = \omega_1 \bar{e}_\rho = 1.2\ \bar{e}_\rho \quad \text{(rad/seg)} \ \text{y} \quad \dot{\bar{\omega}}_{CD} = \bar{0}$$

ii).- Cálculo de la velocidad y aceleración del punto base C:

$$\bar{V}_C = \omega_1 r_{DC} \bar{e}_t = 1.2 * 225 \left(-\bar{e}_\phi\right) = -270\ \bar{e}_\phi \quad \text{(mm/seg)}$$

$$\bar{a}_C = \omega_1^2\ r_{DC} \bar{e}_n = 1.2^2 * 225\left(-\bar{e}_Z\right) = -324\ \bar{e}_Z \quad \text{(mm/seg)}$$

c).- Movimiento de A respecto al marco móvil DC:

$$\bar{r}_{CA} = 150\ \bar{e}_\rho \quad \text{(mm)}$$

$$\bar{V}_{A/CD} = \dot{\rho}\ \bar{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\ \bar{e}_\phi = 75\ \bar{e}_\rho + 150 * 1.5\ \bar{e}_\phi = 75\ \bar{e}_\rho + 225\ \bar{e}_\phi \quad \text{(mm/seg)}$$

$$\bar{a}_{A/CD} = -\rho\dot{\phi}^2 \bar{e}_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\ \bar{e}_\phi = -150 * 1.5^2 \bar{e}_\rho + 2 * 75 * 1.5\ \bar{e}_\phi = 337.5\ \bar{e}_\rho + 225\ \bar{e}_\phi \quad \text{(mm/seg}^2\text{)}$$

d).- Movimiento de A en el marco inercial tierra:

$$\bar{V}_A = \bar{V}_C + \bar{V}_{A/CD} + \bar{\omega}_{CD} x\ \bar{r}_{CA} = -270\ \bar{e}_\phi + 75\ \bar{e}_\rho + 225\ \bar{e}_\phi + 1.2\ \bar{e}_\rho x\ 150\ \bar{e}_\rho$$

$$\bar{V}_A = 75\ \bar{e}_\rho - 45\ \bar{e}_\phi \quad \text{(mm/seg)} \ \rightarrow \ \left|\bar{V}_A\right| = 87.46 \ \text{mm/seg}$$

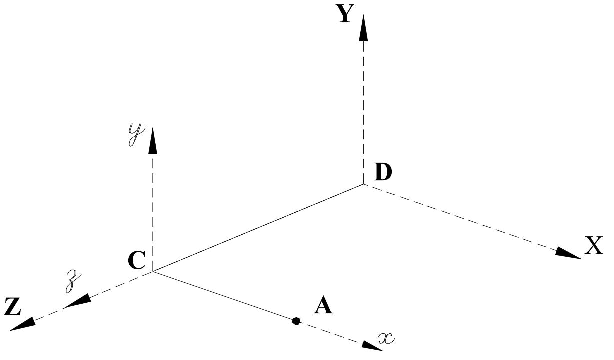
$$\bar{a}_A = \bar{a}_C + \bar{a}_{A/CD} + \bar{\omega}_{CD} x \overbrace{\left(\bar{\omega}_{CD} x\ \bar{r}_{CA}\right)}^{0} + 2\bar{\omega}_{CD} x\ \bar{V}_{A/CD} = \bar{a}_C + \bar{a}_{A/CD} - 2.4\ \bar{e}_\rho x\left(75\ \bar{e}_\rho + 225\ \bar{e}_\phi\right)$$

$$\bar{a}_A = 337.5\ \bar{e}_\rho + 225\ \bar{e}_\phi - \left(324 + 540\right)\bar{e}_Z = 337.5\ \bar{e}_\rho + 225\ \bar{e}_\phi - 864\ \bar{e}_Z$$

$$\left|\bar{a}_A\right| = 954.48 \quad \text{(mm/seg}^2\text{)}$$

2).- Usando, movimiento en marcos móviles.-

a).- Movimiento del marco móvil BC y del punto base C en el marco tierra (ver figura P1-56b):



P1-56b

i).- Movimiento del marco móvil:

$$\overline{\omega}_{CB} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 = 1.2\,\overline{i} + 1.5\,\overline{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\dot{\overline{\omega}}_{CB} = \overline{\omega}_1 x\, \overline{\omega}_2 = 1.2\,\overline{i}\ x\, 1.5\,\overline{k} = -1.8\,\overline{j} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

ii).- Cálculo de la velocidad y aceleración el punto base o conveniente C:

$$\overline{V}_C = \overline{\omega}_1 x\, \overline{r}_{DC} = 1.2\,\overline{i}\ x\, 225\,\overline{k} = -270\,\overline{j} \quad \text{(mm/seg)}$$

$$\overline{a}_C = -\omega_1^2 \overline{r}_{DC} = -1.2^2\left(225\,\overline{k}\right) = -324\,\overline{k} \quad \text{(mm/seg}^2\text{)}$$

b).- Movimiento de A en el marco móvil CB:

$$\overline{r}_{CA} = 150\,\overline{i} \quad \text{(mm)}$$

$$\overline{V}_{A/CB} = 75\,\overline{i} \quad \text{(mm/seg)}$$

$$\overline{a}_{C/CB} = \overline{0}$$

c).- Movimiento de A en el marco inercial tierra:

$$\overline{V}_A = \overline{V}_C + \overline{V}_{A/CB} + \overline{\omega}_{CB} x\, \overline{r}_{CA} = -270\,\overline{j} + 75\,\overline{i} + \left(1.2\,\overline{i} + 1.5\,\overline{k}\right) x\, 150\,\overline{i}$$

$$\overline{V}_A = 75\,\overline{i} - 45\,\overline{j} \quad \text{(mm/seg)} \quad \rightarrow \quad \left|\overline{V}_A\right| = 87.46 \quad \text{mm/seg}$$

$$\overline{a}_A = \overline{a}_C + \dot{\overline{\omega}}_{CB} x\, \overline{r}_{CA} + \overline{\omega}_{CB} x\left(\overline{\omega}_{CB} x\, \overline{r}_{CA}\right) + 2\overline{\omega}_{CB} x\, \overline{V}_{A/CB}$$

$$\dot{\overline{\omega}}_{CB} x\, \overline{r}_{CA} = -1.8\,\overline{j} x\, 150\,\overline{i} = 270\,\overline{k} \quad \text{(mm/seg}^2\text{)}$$

$$\overline{\omega}_{CB} x\left(\overline{\omega}_{CB} x\, \overline{r}_{CA}\right) = \left(1.2\,\overline{i} + 1.5\,\overline{k}\right) x \left(225\,\overline{j}\right) = -337.5\,\overline{i} + 270\,\overline{k} \quad \text{(mm/seg}^2\text{)}$$

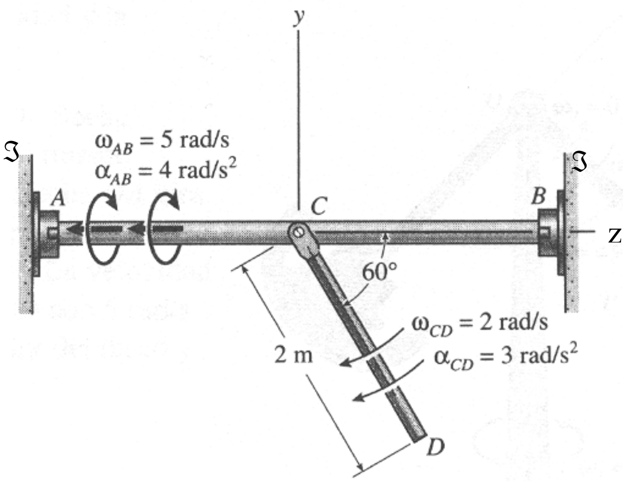
$$2\overline{\omega}_{CB} x\, \overline{V}_{A/Cb} = \left(2.4\,\overline{i} + 3\,\overline{k}\right) x\, 75\,\overline{i} = 225\,\overline{j} \quad \text{(mm/seg}^2\text{)}$$

Luego:

$$\bar{a}_A = 324\,\bar{k} + 270\,\bar{k} - 337.5\,\bar{i} + 270\,\bar{k} + 225\,\bar{j}$$

$$\bar{a}_A = -337.5\,\bar{i} + 225\,\bar{j} + 864\,\bar{k} \quad (\text{mm/seg}^2) \;\rightarrow\; \left|\bar{a}_A\right| = 954.48 \;\text{ mm/seg}^2$$

1-57.- En un instante dado, la flecha AB está girando, como se muestra alrededor del eje X a una velocidad angular ω_{AB} = 5 rad/seg y una aceleración angular α_{AB} = 4 rad/seg^2. En el mismo instante, el eslabón CD que está sujeto por un perno en C a AB, está girando en el sentido de las manecillas del reloj, como se muestra, con una velocidad angular ω_{CD} = 2 rad/seg y una aceleración angular α_{CD} = 3 rad/seg^2. Determine la velocidad y aceleración de la punta D del eslabón en el instante que se muestra. Usando coordenadas cilíndricas, esféricas y movimiento en marcos móviles.

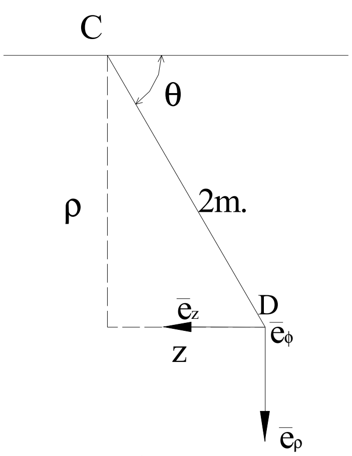


P1-57

Solución

1).- Usando coordenadas cilíndricas:

a).- Orientación de los vectores unitarios de las coordenadas (ver figura P1-57a) e identificación de los parámetros que definen el movimiento:



P1-57a

$$\rho = \ell\; sen\theta = 2\; sen 60° = 1.73 \;\text{ m}$$

$$\dot{\rho} = \omega_{CD}\ell\cos\theta = 2*2*\cos 60° = 2 \;\text{ m/seg}$$

$$\ddot{\rho} = \alpha_{CD}\ell\cos\theta - \omega_{CD}^2\ell\; sen\theta$$

$$\ddot{\rho} = 3*2\cos 60° - 4*2*sen 60° = -3.93 \;\text{ m/seg}^2$$

$$\dot{\phi} = 5 \;\text{ rad/seg}$$

$$\ddot{\phi} = 4 \;\text{ rad/seg}^2$$

$$Z = -\ell\cos\theta$$

$$\dot{Z} = \omega_{CD}\ell\; sen\theta = 2*2\; sen 60° = 3.464 \;\text{ m/seg}$$

$$\ddot{Z} = \alpha_{CD}\ell\ sen\theta + \omega_{CD}^2\ell\cos\theta$$

$$\ddot{Z} = 3*2\ sen60° + 4*2\cos 60° = 9.196\ \ \text{m/seg}^2$$

b).- Cálculo de la velocidad y aceleración de D en el marco inercial tierra:

$$\overline{V}_D = \dot{\rho}\ \overline{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\ \overline{e}_\phi + \dot{Z}\ \overline{e}_Z = 2\ \overline{e}_\rho + 1.73*5\ \overline{e}_\phi + 3.464\ \overline{e}_Z$$

$$\overline{V}_D = 2\ \overline{e}_\rho + 8.65\ \overline{e}_\phi + 3.464\ \overline{e}_Z \quad \rightarrow \quad \left|\overline{V}_D\right| = 9.53\ \ \text{m/seg}$$

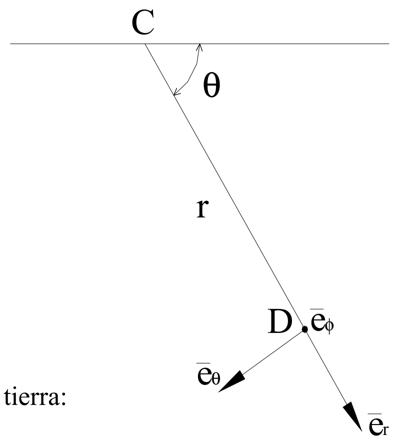
$$\overline{a}_D = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\overline{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\overline{e}_\phi + \ddot{Z}\ \overline{e}_Z$$

$$\overline{a}_D = \left(-3.93 - 1.73*25\right)\overline{e}_\rho + \left(2*2*5 + 1.73*4\right)\overline{e}_\phi + 9.196\ \overline{e}_Z$$

$$\overline{a}_D = -47.18\ \overline{e}_\rho + 26.92\ \overline{e}_\phi + 9.196\ \overline{e}_Z\ \ (\text{m/seg}^2) \quad \rightarrow \quad \left|\overline{a}_D\right| = 55.09\ \ \text{m/seg}^2$$

2).- Usando coordenadas esféricas.-

a).- Orientación de los vectores unitarios de las coordenadas (ver figura P1-57b) e identificación de los parámetros que definen el movimiento:



P1-57b

$$\left|\begin{array}{l} r = 2\ m \\ \dot{r} = 0 \\ \ddot{r} = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \theta = 60° \\ \dot{\theta} = 2\ rad/seg \\ \ddot{\theta} = 3\ rad/seg^2 \end{array} \left|\begin{array}{l} \dot{\phi} = -5\ rad/seg \\ \\ \ddot{\phi} = -4\ rad/seg^2 \end{array}\right|$$

b).- Cálculo de la velocidad y aceleración de D en el marco inercial tierra:

$$\overline{V}_D = r\dot{\theta}\ \overline{e}_\theta + r\dot{\phi}\ sen\theta\ \overline{e}_\phi = 2*2\ \overline{e}_\theta - 2*5\ sen60° = 4\ \overline{e}_\theta - 8{,}66\ \overline{e}_\phi$$

$$\left|\overline{V}_D\right| = 9.539\ \ \text{m/seg}$$

$$\overline{a}_D = \left(-r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 sen^2\theta\right)\overline{e}_r + \left(r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 sen\theta\cos\theta\right)\overline{e}_\theta + \left(2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\ddot{\phi}\ sen\theta\right)\overline{e}_\phi$$

$$\bar{a}_D = \left(-2*4-2*25\ sen^2 60°\right)\bar{e}_r + \left(2*3-2*25\ sen\ 60° \cos 60°\right)\bar{e}_\theta + \left(-2*2*2*25 \cos 60° - 2*4\ sen\ 60°\right)\bar{e}_\phi$$

$$\bar{a}_D = -45.5\ \bar{e}_r - 15.65\ \bar{e}_\theta - 26.93\ \bar{e}_\phi \ \ \text{(m/seg}^2\text{)} \quad \rightarrow \quad \left|\bar{a}_D\right| = 55.14 \ \ \text{m/seg}^2$$

3).- Usando movimiento en marcos móviles.- El marco móvil es la barra AB y el punto base C.-

a).- Movimiento del marco móvil y del punto base:

$$\bar{\omega} = -\omega_{AB}\bar{i} = -5\ i \ \ \text{(rad/seg)}$$

$$\dot{\bar{\omega}} = -\alpha_{AB}\bar{i} = -4\ \bar{i} \ \ \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{V}_C = \bar{a}_C = \bar{0}$$

b).- Cálculo del movimiento de D respecto al marco móvil AB:

$$\bar{r}_{CD} = 2\left(\cos 60°\ \bar{i} - sen 60°\ \bar{j}\right) = \bar{i} - 1.73\ \bar{j} \ \ \text{(m)}$$

$$\bar{V}_{D/AB} = \bar{\omega}_{CD} x\ \bar{r}_{CD} = -2\ \bar{k}\ x\left(\bar{i} - 1.73\ \bar{j}\right) = -3.46\ \bar{i} - 2\ \bar{j} \ \ \text{(m/seg)}$$

$$\bar{a}_{D/AB} = \dot{\bar{\omega}}_{CD} x\ \bar{r}_{CD} - \omega_{CD}^2 \bar{r}_{CD} = -3\bar{k}\ x\left(\bar{i} - 1.73\ \vec{j}\right) - 4\left(\bar{i} - 1.73\ \bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_{D/AB} = -9.19\ \bar{i} + 3.92\ \bar{j}$$

c).- Movimiento de D en el marco inercial tierra:

$$\bar{V}_D = \bar{V}_{D/AB} + \bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{CD} = 3.46\ \bar{i} + 2\ \bar{j} - 5\ \bar{i}\ x\left(\bar{i} - 1.73\ \bar{j}\right)$$

$$\bar{V}_D = -3.46\ \bar{i} - 2\ \bar{j} + 8.65\ \bar{k} \quad \rightarrow \quad \left|\bar{V}_D\right| = 9.529 \ \ \text{m/seg}$$

$$\bar{a}_D = \bar{a}_{D/AB} + \dot{\bar{\omega}}\ x\ \bar{r}_{CD} + \bar{\omega}\ x\left(\bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{CD}\right) + 2\bar{\omega}\ x\ \bar{V}_{D/AB}$$

$$\dot{\bar{\omega}}\ x\ \bar{r}_{CD} = -4\ \bar{i}\ x\left(\bar{i} - 1.73\ \bar{j}\right) = 6.92\ \bar{k} \ \ \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{\omega}\ x\left(\bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{CD}\right)=-5\ \bar{i}\ \ x\ 8.65\ \bar{k}\ =43.25\ \bar{j}\quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$2\bar{\omega}\ x\ \bar{V}_{D/AB}\ =-10\ \bar{i}\ \ x\left(-3.46\ \bar{i}-2\ \bar{j}\right)=20\ \bar{k}\quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

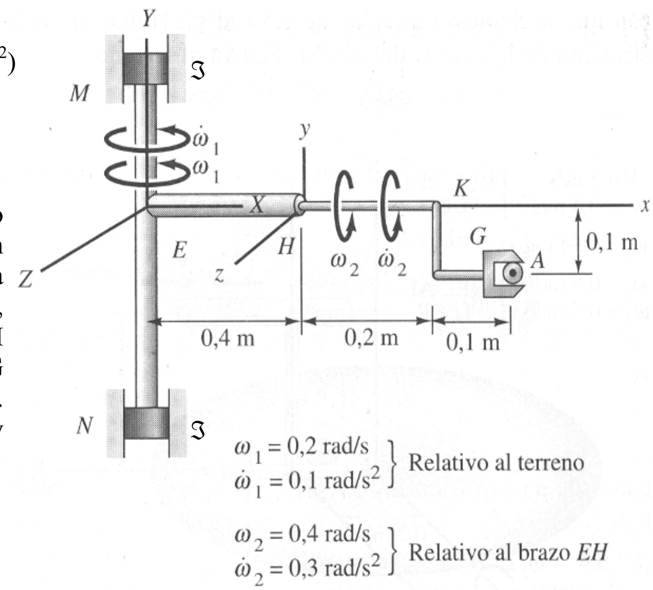
Luego:

$$\bar{a}_D=9.19\ \bar{i}+\left(3.92+43.25\right)\bar{j}+\left(6.92+20\right)\bar{k}$$

$$\bar{a}_D=9.19\ \bar{i}+47.17\ \bar{j}+26.92\ \bar{k}\quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\left|\bar{a}_D\right|=55.083\quad \text{m/seg}^2$$

1-58.- Un robot mueve un cuerpo sujetado mediante sus mordazas G como se muestra en el diagrama. ¿Cuáles serán la velocidad y la aceleración relativas al terreno, del punto A, en el instante que se muestra? El brazo EH está soldado al eje vertical MN. El brazo HKG es una barra rígida que gira alrededor de EH. Usando coordenadas cilíndricas en EH y movimiento en marcos móviles.



P1-58

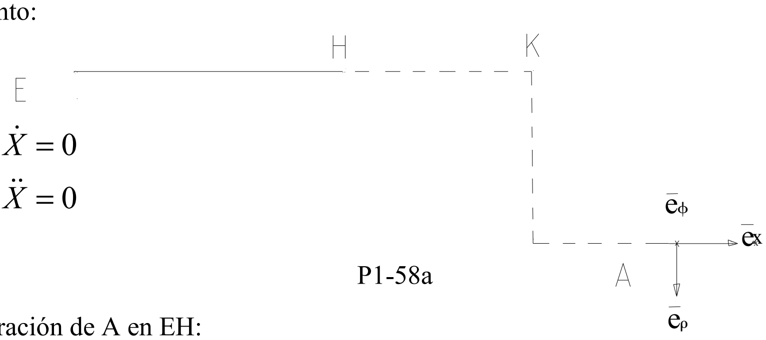
Solución

1).- Usando coordenadas cilíndricas:

a).- Cálculo del movimiento de A respecto al marco móvil EH:

i).- Orientación de los vectores unitarios de las coordenadas (ver figura P1-58a) e identificación de los parámetros que definen el movimiento:

$$\begin{array}{l|l|l} \rho=0.1\ m & \dot{\phi}=0.4\ rad/seg & \dot{X}=0 \\ \dot{\rho}=0 & & \ddot{X}=0 \\ \ddot{\rho}=0 & \ddot{\phi}=0.3\ rad/seg^2 & \end{array}$$



P1-58a

ii).- Cálculo de la velocidad y aceleración de A en EH:

$\bar{r}_{HA} = 0.1\,\bar{e}_\rho + 0.3\,\bar{e}_X$ (m)

$\bar{V}_{A/EH} = \rho\dot{\phi}\,\bar{e}_\phi = 0.1*0.4\,\bar{e}_\phi = 0.04\,\bar{e}_\phi$ (m/seg)

$\bar{a}_{A/EH} = -\rho\dot{\phi}^2\,\bar{e}_\rho + \rho\ddot{\phi}\,\bar{e}_\phi$

$\bar{a}_{A/EH} = -0.1*0.4^2\,\bar{e}_\rho + 0.1*0.3\,\bar{e}_\phi = -0.016\,\bar{e}_\rho + 0.03\,\dot{e}_\phi$ (m/seg^2)

b).- Movimiento del marco móvil EH y del punto base H:

$\bar{\omega} = 0.2\,\bar{e}_\rho$ (rad/seg) y $\dot{\bar{\omega}} = -0.1\,\bar{e}_\rho$ (rad/seg^2)

$\bar{V}_H = \bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{EH} = -0.2\,\bar{e}_\rho x\ 0.4\,\bar{e}_X = 0.08\,\bar{e}_\phi$ (m/seg)

$\bar{a}_H = \dot{\bar{\omega}}\ x\ \bar{r}_{EH} - \omega^2\bar{r}_{EH} = -0.1\,\bar{e}_\rho x\ 0.4\,\bar{e}_X - 0.04(0.4\,\bar{e}_X) = 0.04\,\bar{e}_\phi - 0.016\,\bar{e}_X$ (m/seg^2)

c).- Cálculo de la velocidad y aceleración de A en el marco inercial terreno:

$\bar{V}_A = \bar{V}_H + \bar{V}_{A/EH} + \bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{HA} = 0.08\,\bar{e}_\phi + 0.04\,\bar{e}_\phi - 0.2\,\bar{e}_\rho x\left(0.1\,\bar{e}_\rho + 0.3\,\bar{e}_X\right)$

$\bar{V}_A = (0.12 + 0.06)\,\bar{e}_\phi = 0.18\,\bar{e}_\phi$ (m/seg) $\rightarrow$ $\left|\bar{V}_A\right| = 0.18$ m/seg

$\bar{a}_A = \bar{a}_H + \bar{a}_{A/EH} + \dot{\bar{\omega}}\ x\ \bar{r}_{HA} + \bar{\omega}\ x\ (\bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{HA}) + 2\bar{\omega}\ x\ \bar{V}_{A/EH}$

$\dot{\bar{\omega}}\ x\ \bar{r}_{HA} = -0.1\,\bar{e}_\rho x\left(0.1\,\bar{e}_\rho + 0.3\,\bar{e}_X\right) = 0.03\,\bar{e}_\phi$ (m/seg^2)

$\bar{\omega}\ x\ (\bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{HA}) = 0.2\,\bar{e}_\rho x\ 0.06\,\bar{e}_\phi = -0.012\,\bar{e}_X$ (m/seg^2)

$2\bar{\omega}\ x\ \bar{V}_{A/EH} = -0.4\,\bar{e}_\rho x\ 0.04\,\bar{e}_\phi = -0.016\,\bar{e}_X$ (m/seg^2)

Luego:

$\bar{a}_A = -0.016\,\bar{e}_\rho + (0.03 + 0.04 + 0.03)\,\bar{e}_\phi + (-0.016 - 0.012 - 0.016)\,\bar{e}_X$

$\bar{a}_A = -0.016\,\bar{e}_\rho + 0.1\,\bar{e}_\phi - 0.044\,\bar{e}_X$ (m/seg^2) $\rightarrow$ $\left|\bar{a}_A\right| = 0.11$ m/seg^2

2).- Usando movimiento en marcos móviles.-

a).- Movimiento del marco móvil EH y del punto base H:

$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 = 0.2\ \overline{j}$ (rad/seg) y $\dot{\overline{\omega}} = \dot{\overline{\omega}}_1 = 0.1\ \overline{j}$ (rad/seg^2)

$$\overline{V}_H = \overline{\omega}\ x\ \overline{r}_{EH} = 0.2\ \overline{j}\ x\ 0.4\ \overline{i} = -0.08\ \overline{k} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\overline{a}_H = \dot{\overline{\omega}}\ x\ \overline{r}_{EH} - \omega^2 \overline{r}_{EH} = 0.1\ \overline{j}\ x\ 0.4\ \overline{i} - 0.2^2\left(0.4\ \overline{i}\right)$$

$$\overline{a}_H = -0.016\ \overline{i} - 0.04\ \overline{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

b).- Movimiento de A en el marco móvil:

$$\overline{r}_{HA} = 0.3\ \overline{i} - 0.1\ \overline{j} \quad \text{(m)}$$

$$\overline{V}_{A/EH} = \overline{\omega}_2 x\ \overline{r}_{HA} = 0.4\ \overline{i}\ x\ \left(0.3\ \overline{i} - 0.1\ \overline{j}\right) = -0.04\ \overline{k} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\overline{a}_{A/EH} = \dot{\overline{\omega}}_2 x\ \overline{r}_{HA} + \overline{\omega}_2 x\ \left(\overline{\omega}_2 x\ \overline{r}_{HA}\right) = 0.3\ \overline{i}\ x\ \left(0.3\ \overline{i} - 0.1\ \overline{j}\right) + 0.4\ \overline{i}\ x\ \left(-0.04\ \overline{k}\right)$$

$$\overline{a}_{A/EH} = 0.016\ \overline{j} - 0.03\ \overline{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

c).- Cálculo de la velocidad y aceleración de A respecto al marco inercial terreno:

$$\overline{V}_A = \overline{V}_H + \overline{V}_{A/EH} + \overline{\omega}\ x\ \overline{r}_{HA} = 0.08\ \overline{k} - 0.04\ \overline{k} - 0.06\ \overline{k}$$

$$\overline{V}_A = -0.18\ \overline{k} \quad \text{(m/seg)} \quad \rightarrow \quad \left|\overline{V}_A\right| = 0.18 \text{ m/seg}$$

$$\overline{a}_A = \overline{a}_H + \overline{a}_{A/EH} + \dot{\overline{\omega}}\ x\ \overline{r}_{HA} + \overline{\omega}\ x\ \left(\overline{\omega}\ x\ \overline{r}_{HA}\right) + 2\overline{\omega}\ x\ \overline{V}_{A/EH}$$

$$\dot{\overline{\omega}}\ x\ \overline{r}_{HA} = 0.1\ \overline{j}\ x\ \left(0.3\ \overline{i} - 0.1\ \overline{j}\right) = -0.03\ \overline{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\overline{\omega}\ x\ \left(\overline{\omega}\ x\ \overline{r}_{HA}\right) = 0.2\ \overline{j}\ x\ \left(-0.06\ \overline{k}\right) = -0.012\ \overline{i} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$2\overline{\omega}\ x\ \overline{V}_{A/EH} = 0.4\ \overline{j}\ x\ \left(-0.04\ \overline{k}\right) = -0.016\ \overline{i} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

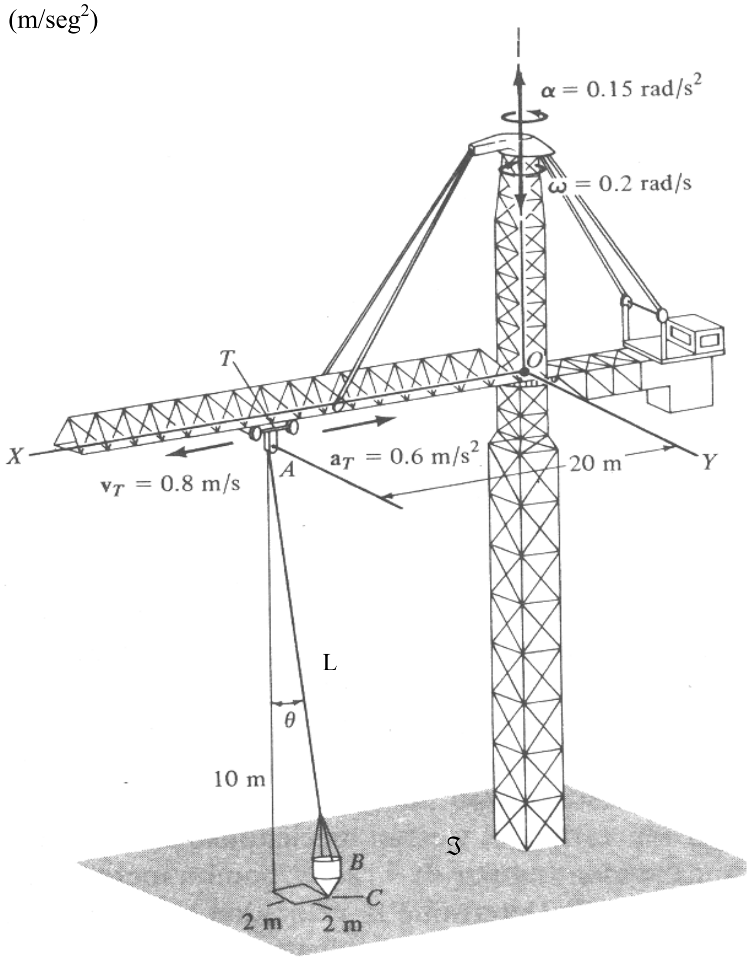
Luego:

$$\bar{a}_A = (-0.016 - 0.012 - 0.016)\,\bar{i} + 0.016\,\bar{j} + (-0.04 - 0.03 - 0.03)\,\bar{k}$$

$$\bar{a}_A = -0.044\,\bar{i} + 0.016\,\bar{j} - 0.1\,\bar{k} \quad (\text{m/seg}^2)$$

$$|\bar{a}_A| = 0.11 \quad \text{m/seg}^2$$

1-59.- En un instante dado, la grúa de torre está girando, mientras que el trole T se está moviendo hacia fuera a lo largo de la pluma con el movimiento indicado. En ese mismo instante, el cubo de concreto B, se está meciendo hacia a la vertical, de manera que $\dot{\theta}$ = - 6 rad/seg y $\ddot{\theta}$ = - 2 rad/seg^2, ambas, medidas con respecto al trole. Si el cable AB se está acortando a una rapidez constante de 0.5 m/seg. Usando movimientos en marcos móviles, calcule la velocidad y aceleración de la punta C del cubo en ese instante.



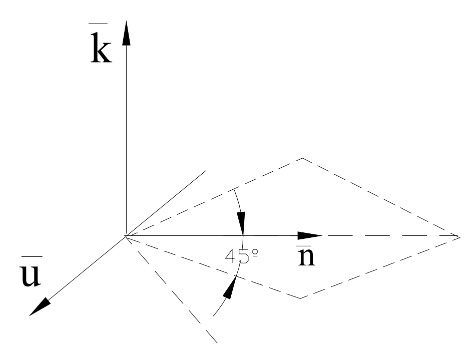
P1-59

Solución

Marco móvil es el marco intermedio línea que coincide con el cable.

1).- Movimiento del marco móvil y del punto base A.-

a).- Movimiento del marco móvil:



P1-59a

Si:

$$\bar{\dot{\theta}} = \dot{\theta}\,\bar{u} \quad \text{y} \quad \bar{\ddot{\theta}} = \ddot{\theta}\,\bar{u}$$

$$\bar{u} = \bar{n}\ x\ \bar{k} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{j}\right) x\ \bar{k}$$

$$\bar{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\bar{i} + \bar{j}\right)$$

Luego:

$$\dot{\theta} = -6 * \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{i} + \bar{j}) = -3\sqrt{2}(\bar{i} + \bar{j}) \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\ddot{\theta} = -2 * \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{i} + \bar{j}) = -\sqrt{2}(\bar{i} + \bar{j}) \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

Luego:

$$\bar{\omega}_{L/\Im} = \dot{\bar{\theta}} + \bar{\omega} = -3\sqrt{2}(\bar{i} + \bar{j}) - 0.2\,\bar{k} = -4.243\,\bar{i} - 4.243\,\bar{j} - 0.2\,\bar{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{L/\Im} = \ddot{\bar{\theta}} + \bar{\omega}\ x\ \dot{\bar{\theta}} + \dot{\bar{\omega}} = -\sqrt{2}(\bar{i} + \bar{j}) - 0.2\,\bar{k}\ x\ 3\sqrt{2}(\bar{i} + \bar{j}) + 0.15\,\bar{k}$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{L/\Im} = \left(-\sqrt{2} - 0.6\sqrt{2}\right)\bar{i} + \left(-\sqrt{2} + 0.6\sqrt{2}\right)\bar{j} + 0.15\,\bar{k}$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{L/\Im} = -2.263\,\bar{i} - 0.566\,\bar{j} + 0.15\,\bar{k} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

b).- Cálculo de la velocidad y aceleración del punto base A:

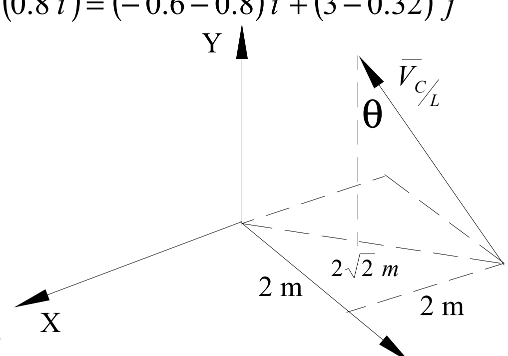
$$\bar{V}_A = \bar{V}_{A/PL} + \bar{\omega}\ x\ \bar{r}_{OA} = 0.8\,\bar{i} - 0.2\,\bar{k}\ x\ 20\,\bar{i} = 0.8\,\bar{i} - 4\,\bar{j} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{A/PL} + \dot{\bar{\omega}}\ x\ \bar{r}_{OA} - \omega^2\bar{r}_{OA} + 2\bar{\omega}\ x\ \bar{V}_{A/PL}$$

$$\bar{a}_A = -0.6\,\bar{i} + 0.15\,\bar{k}\ x\ 20\,\bar{i} - 0.04\,(20\,\bar{i}) - 0.4\,\bar{k}\ x\ (0.8\,\bar{i}) = (-0.6 - 0.8)\,\bar{i} + (3 - 0.32)\,\bar{j}$$

$$\bar{a}_A = -1.4\,\bar{i} + 2.68\,\bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

2).- Movimiento de C respecto al marco móvil:



P1-59b

$$\bar{r}_{AC} = -2\,\bar{i} + 2\,\bar{j} - 10\,\bar{k}$$

$$\bar{V}_{C/L} = 0.5\,sen15.793°\,\frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{i} - \bar{j}) + 0.5\cos 15.793°\,\bar{k}$$

$$\bar{V}_{C/L} = 0.096\,\bar{i} - 0.096\,\bar{j} + 0.481\,\bar{k} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{a}_{C/L} = \bar{0}$$

3).- Cálculo de la velocidad y aceleración de C en el marco inercial tierra:

$$\bar{V}_C = \bar{V}_A + \bar{V}_{C/L} + \bar{\omega}_{L/\Im}\, x\, \bar{r}_{AC}$$

$$\bar{\omega}_{L/\Im}\, x\, \bar{r}_{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -4.243 & -4.243 & -0.2 \\ -2 & 2 & -10 \end{vmatrix} = 42.83\,\bar{i} - 42.03\,\bar{j} - 16.972\,\bar{k} \quad \text{(m/seg)}$$

Luego:

$$\bar{V}_C = (0.8 + 0.096 + 42.83)\,\bar{i} + (-4 - 0.096 - 42.03)\,\bar{j} + (0.481 - 16.972)\,\bar{k}$$

$$\bar{V}_C = 43.726\,\bar{i} - 46.126\,\bar{j} - 16.491\,\bar{k} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \dot{\bar{\omega}}_{L/\Im}\, x\, \bar{r}_{AC} + \bar{\omega}_{L/\Im}\, x \left(\bar{\omega}_{L/\Im}\, x\, \bar{r}_{AC} \right) + 2\bar{\omega}_{L/\Im}\, x\, \bar{V}_{C/L}$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{L/\Im}\, x\, \bar{r}_{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2.263 & -0.566 & 0.15 \\ -2 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 5.36\,\bar{i} - 22.93\,\bar{j} - 5.658\,\bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

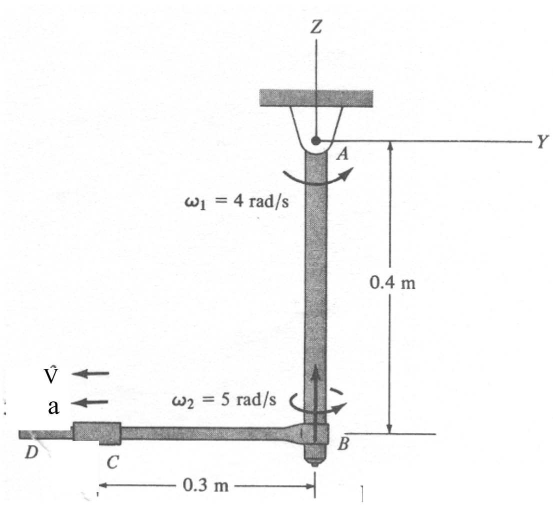
$$\bar{\omega}_{L/\Im}\, x \left(\bar{\omega}_{L/\Im}\, x \bar{r}_{AC} \right) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -4.243 & -4.243 & -0.2 \\ 42.83 & -42.03 & -16.972 \end{vmatrix} = 63.606\bar{i} - 80.578\bar{j} + 360.061\bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$2\bar{\omega}_{L/\Im}\, x\, \bar{V}_{C/L} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -8.486 & -8.486 & -0.4 \\ 0.096 & -0.096 & 0.481 \end{vmatrix} = -4.12\,\bar{i} + 4.043\,\bar{j} + 1.629\,\bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

Luego:

$$\bar{a}_C = (-1.4 + 5.36 + 63.606 - 4.12)\,\bar{i} + (2.68 - 22.93 - 80.578 + 4.043)\,\bar{j} + (-5.658 + 360.061 + 1.629)\,\bar{k}$$

$$\bar{a}_C = 63.446\,\bar{i} - 96.785\,\bar{j} + 356.032\,\bar{k} \quad (\text{m/seg}^2)$$



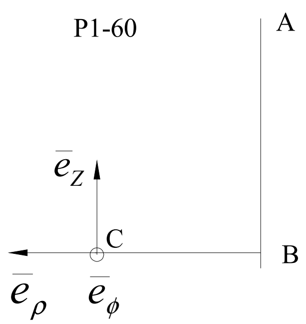
P1-60

1-60.- El brazo AB está girando alrededor del pasador fijo A con una rapidez constante de $\omega_1 = 4$ rad/seg, mientras que labarra BD está girando alrededor del eje Z con una rapidez constante de $\omega_2 = 5$ rad/seg. En el instante en que el mecanismo está en la posición indicada, el collarín C se está moviendo a lo largo de la barra con una velocidad de 3 m/seg y una aceleración de 2 m/seg^2, medidas ambas, con respecto a la barra. Usando coordenadas cilíndricas en AB y coordenadas cartesianas, determine la velocidad y la aceleración respecto a la tierra del collarín en el instante mostrado.

Solución

1).- Usando coordenadas cilíndricas en AB.-

a).- Orientación de los vectores unitarios de las coordenadas cilíndricas en AB (ver figura P1-60a):



P1-60a

b).- Movimiento del marco móvil AB y del punto base B:

$$\bar{\omega}_{AB} = \omega_1 \bar{e}_\phi = 4\,\bar{e}_\phi \ (\text{rad/seg}) \ \text{ y } \ \dot{\bar{\omega}}_{AB} = \bar{0}$$

$$\bar{V}_B = \omega_1 r_{AB}\,\bar{e}_t = 4 * 0.4\,(-\bar{e}_\rho) = -1.6\,\bar{e}_\rho \ (\text{m/seg})$$

$$\bar{a}_B = \omega_1^2 r_{AB}\,\bar{e}_n = 4^2 * 0.4\,\bar{e}_Z = 6.4\,\bar{e}_Z \ (\text{m/seg}^2)$$

c).- Cálculo del movimiento de C respecto al marco móvil AB.-

i).- Identificación de los parámetros que definen el movimiento:

$\rho = 0.3m$	$\dot{\phi} = 5\ rad/seg$	$\dot{Z} = 0$
$\dot{\rho} = 3\ m/seg$		
$\ddot{\rho} = 2\ m/seg^2$	$\ddot{\phi} = 0$	$\ddot{Z} = 0$

ii).- Movimiento de C:

$\bar{r}_{BC} = 0.3\ \bar{e}_\rho$ (m)

$\bar{V}_{C/AB} = \dot{\rho}\ \bar{e}_\rho + \rho\ \dot{\phi}\ \bar{e}_\phi = 3\ \bar{e}_\rho + 0.3*5\ \bar{e}_\phi = 3\ \bar{e}_\rho + 1.5\ \bar{e}_\phi$ (m/seg)

$\bar{a}_{C/AB} = \left(\ddot{\rho} - \rho\ \dot{\phi}^2\right)\bar{e}_\rho + 2\dot{\rho}\ \dot{\phi}\ \bar{e}_\phi = \left(2 - 0.3*25\right)\bar{e}_\phi + 2*3*5\ \bar{e}_\phi = -5.5\ \bar{e}_\phi + 30\ \bar{e}_\phi$ (m/seg^2)

d).- Cálculo de la velocidad y aceleración de C respecto al marco inercial terreno:

$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{C/AB} + \bar{\omega}_{AB} x\ \bar{r}_{BC} = -1.6\ \bar{e}_\rho + 3\ \bar{e}_\rho + 1.5\ \bar{e}_\phi + 4\ \bar{e}_\phi x\ 0.3\ \bar{e}_\rho$

$\bar{V}_C = 1.4\ \bar{e}_\rho + 1.5\ \bar{e}_\phi - 1.2\ \bar{e}_Z$ (m/seg) $\rightarrow$ $\left|\bar{V}_C\right| = 2.377$ m/seg

$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{C/AB} + \bar{\omega}_{AB} x \left(\bar{\omega}_{AB} x\ \bar{r}_{BC}\right) + 2\ \bar{\omega}_{AB} x\ \bar{V}_{C/AB}$

Donde:

$\bar{\omega}_{AB} x \left(\bar{\omega}_{AB} x\ \bar{r}_{BC}\right) = 4\ \bar{e}_\phi x \left(-1.2\ \bar{e}_Z\right) = -4.8\ \bar{e}_\rho$ (m/seg^2)

$2\ \bar{\omega}_{AB} x\ \bar{V}_{C/AB} = 8\ \bar{e}_\phi x \left(3\ \bar{e}_\rho + 1.5\ \bar{e}_\phi\right) = -2.4\ \bar{e}_Z$ (m/seg^2)

Luego:

$\bar{a}_C = 6.4\ \bar{e}_Z - 5.5\ \bar{e}_\rho + 30\ \bar{e}_\phi - 4.8\ \bar{e}_\rho - 24\ \bar{e}_Z = -10.3\ \bar{e}_\rho + 30\ \bar{e}_\phi - 17.6\ \bar{e}_Z$ (m/seg^2)

$\left|\bar{a}_C\right| = 36.275$ m/seg^2

2).- Usando coordenadas cartesianas (indicados en la figura P1-60).-

a).- Movimiento del marco móvil BD y del punto conveniente B:

$$\bar{\omega}_{BD} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = 4\,\bar{i} + 5\,\bar{k} \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{BD} = \bar{\omega}_1 x\, \bar{\omega}_2 = 4\,\bar{i}\; x\; 5\,\bar{k} = -20\,\bar{j} \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{V}_B = \bar{\omega}_1 x\, \bar{r}_{AB} = 4\,\bar{i}\; x\left(-0.4\,\bar{k}\right) = 1.6\,\bar{j} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{a}_B = -\omega_1^2 \bar{r}_{AB} = -16\left(-0.4\,\bar{k}\right) = 6.4\,\bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

b).- Movimiento de C respecto al marco móvil BD:

$$\bar{r}_{BC} = -0.3\,\bar{j} \text{ (m)}, \quad \bar{V}_{C/BD} = -3\,\bar{j} \text{ (m/seg) y } \bar{a}_{C/BD} = -2\,\bar{j} \text{ (m/seg}^2\text{)}$$

c).- Cálculo de la velocidad y aceleración de C, respecto al marco inercial terreno:

$$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{\omega}_{BD} x\, \bar{r}_{BC} + \bar{V}_{C/BD} = 1.6\,\bar{j} + \left(4\,\bar{i} + 5\,\bar{k}\right) x \left(-0.3\,\bar{j}\right) - 3\,\bar{j}$$

$$\bar{V}_C = 1.5\,\bar{i} - 1.4\,\bar{j} - 1.2\,\bar{k} \quad \rightarrow \quad \left|\bar{V}_C\right| = 2.377 \text{ m/seg}$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \dot{\bar{\omega}}_{BD} x\, \bar{r}_{BC} + \bar{\omega}_{BD} x \left(\bar{\omega}_{BD} x\, \bar{r}_{BC}\right) + 2\,\bar{\omega}_{BD} x\, \bar{V}_{C/BD} + \bar{a}_{C/BD}$$

Donde:

$$\dot{\bar{\omega}}_{BD} x\, \bar{r}_{BC} = -20\,\bar{j}\; x\left(-0.3\,\bar{j}\right) = \bar{0}$$

$$\bar{\omega}_{BD} x\left(\bar{\omega}_{BD} x\, \bar{r}_{BC}\right) = \left(4\,\bar{i} + 5\,\bar{k}\right) x \left(1.5\,\bar{i} - 1.2\,\bar{k}\right) = 12.3\,\bar{j} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

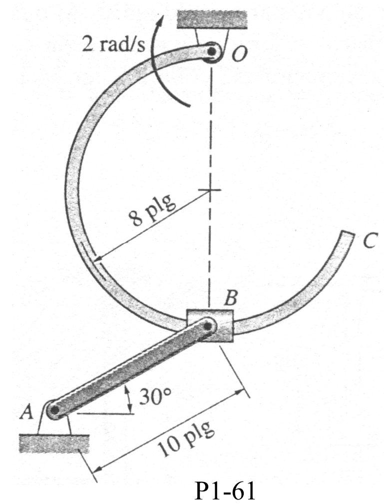
$$2\,\bar{\omega}_{BD} x\, \bar{V}_{C/BD} = 2\left(4\,\bar{i} + 5\,\bar{k}\right) x \left(-3\,\bar{j}\right) = 30\,\bar{i} - 24\,\bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

Luego:

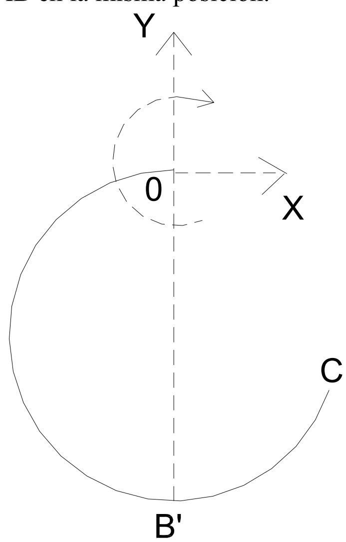
$$\bar{a}_C = 6.4\,\bar{k} + 12.3\,\bar{j} + 30\,\bar{i} - 24\,\bar{k} - 2\,\bar{j} = 30\,\bar{i} + 10.3\,\bar{j} - 17.6\,\bar{k} \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\left|\bar{a}_C\right| = 36.275 \text{ m/seg}^2$$

1-61.- La barra delgada y curva OC gira alrededor de O. En el instante que se muestra, la velocidad angular OC es 2 rad/seg y su aceleración angular es cero. Encuentre la aceleración angular de la barra AB en la misma posición.



P1-61



P1-61a

Solución

1).- Cálculo de la velocidad y aceleración de B tomando como punto de referencia a O en $\Im$.–

a).- Cálculo de la velocidad y aceleración de B' (B' ∈ a OC coincidente con B), ver figura P1-61a:

$$\bar{V}_{B'} = \bar{\omega}_{OC} x\, \bar{r}_{OB'} = -2\bar{k}x\left(-16\,\bar{j}\right) = -32\,\bar{i} \text{ (plg/seg)}$$

$$\bar{a}_{B'} = -\omega_{OC}^2 \bar{r}_{OB'} = -4*\left(-16\,\bar{j}\right) = 64\,\bar{j} \text{ (plg/seg}^2\text{)}$$

b).- Cálculo de la velocidad y aceleración de B respecto a OC:

Si: $\bar{V}_{B/OC} = -V_{B/OC}\,\bar{i}$, $\bar{a}_{B/OC} = -a_{B/OC}\, t\,\bar{i} + \dfrac{V_{B/OC}^2}{8}\, n\,\bar{j}$, $\bar{V}_B = \bar{V}_{B'} + \bar{V}_{B/OC}$ y

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{B/OC} + \bar{a}_{B'} + 2\,\bar{\omega}_{OC} x\,\bar{V}_{B/OC}$$

Luego:

$$\bar{V}_B = -32\,\bar{i} - V_{B/OC}\,\bar{i} = -\left(32 + V_{B/OC}\right)\bar{i} \qquad (1)$$

$$\bar{a}_B = -a_{B/OC}\, t\, \bar{i} + \frac{V_{B/OC}^2}{8}\, n\, \bar{j} + 64\, \bar{j} + 2\left(-2\bar{k}\right) x \left(-V_{B/OC}\, \bar{i}\right)$$

$$\bar{a}_B = -a_{B/OC}\, t\, \bar{i} + \left(\frac{V_{B/OC}^2}{8} + 4\, V_{B/OC} + 64)\ \bar{j}\right) \qquad (2)$$

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de B, tomando como punto de referencia a A en $\Im$:−

a).− $\bar{V}_B = \omega_{AB}\bar{k}\ x\, 10\left(\cos 30^{o}\ \bar{i} + sen 30^{o}\ \bar{j}\right) = -5\ \omega_{AB}\bar{i} + 8.66\ \omega_{AB}\bar{j}$ (3)

(1) = (3) e igualando componentes:

$$8.66\ \omega_{AB} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_{AB} = 0$$

$$-\left(32 + V_{B/OC}\right) = -5 * \overbrace{\omega_{AB}}^{0} \quad \rightarrow \quad V_{B/OC} = -32 \ \text{ plg/seg}$$

b).- $\bar{a}_B = \alpha_{AB}\bar{k}\ x\, 10\left(\cos 30^{o}\ \bar{i} + sen 30^{o}\ \bar{j}\right) - \overbrace{\omega_{AB}^2}^{0}\bar{r}_{AB}$

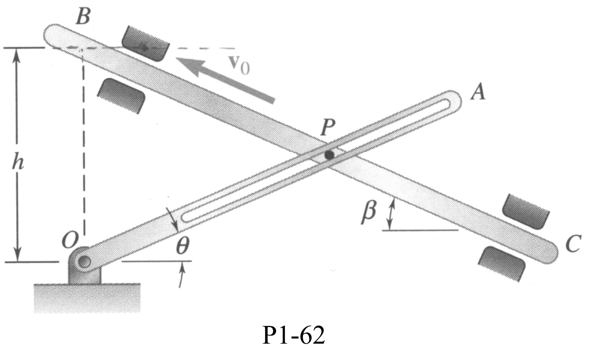
$$\bar{a}_B = -5\ \alpha_{AB}\bar{i} + 8.66\ \alpha_{AB}\ \bar{j} \qquad (4)$$

(2) = (4) e Igualando componentes:

$$\frac{32^2}{8} + 4*(-32) + 64 = 8.66\ \alpha_{AB} \quad \rightarrow \quad 64 = 8.66\ \alpha_{AB}$$

$\alpha_{AB} = 7.39$ rad/seg^2 (antihorario)

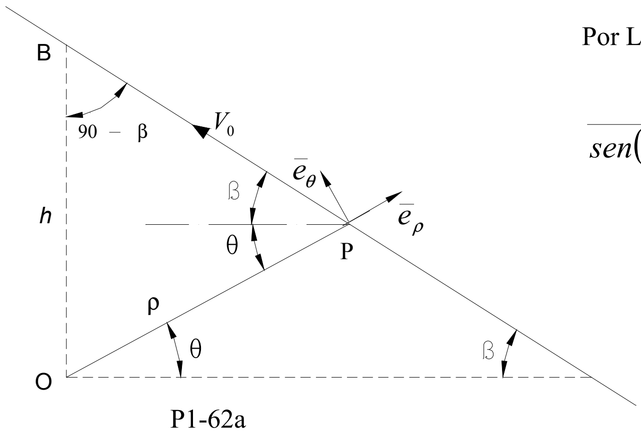
1-62.- El pasador P es solidario de BC y desliza libremente por la ranura de OA. Usando coordenadas polares, hallar la variación del ángulo θ por unidad de tiempo ($\dot{\theta}$), sabiendo que BC se mueve con una celeridad constante V_0. Exprese la solución en función de V_0, h, β y θ.



P1-62

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios e identificación del parámetro radial:



P1-62a

Por Ley de Senos:

$$\frac{h}{sen(\beta+\theta)} = \frac{\rho}{\cos\beta} \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{h\cos\beta}{sen(\beta+\theta)}$$

2).- Cálculo de la velocidad angular de OA:

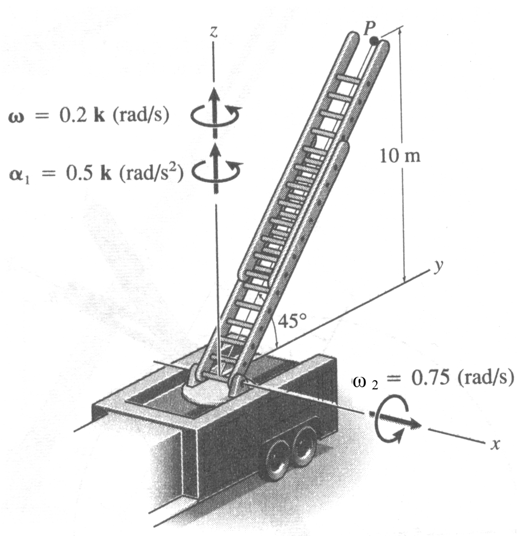
Si: $\bar{V}_P = \dot{\rho}\,\bar{e}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\bar{e}_\theta$ y $\bar{V}_P = V_0\left[-\cos(\beta+\theta)\,\bar{e}_\rho + sen(\beta+\theta)\,\bar{e}_\theta\right]$

Igualando la componente transversal:

$$\rho\,\dot{\theta} = V_0\ sen(\beta+\theta) \quad \rightarrow \quad \frac{h\cos\beta}{sen(\beta+\theta)}\dot{\theta} = V_0 sen(\beta+\theta)$$

$$\dot{\theta} = \frac{V_0 sen^2(\beta+\theta)}{h\cos\beta}$$ (Unid. De Velocidad angular)

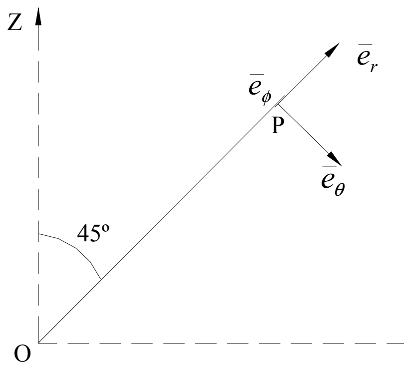
1-63.- En el instante dado, la escalera de un camión de bomberos gira alrededor del eje vertical *z* con una velocidad angular de $\omega_1 = 0.20$ rad/seg y una aceleración angular $\alpha_1 = 0.5$ rad/seg^2, mientras se está elevando a una velocidad angular constante $\omega_2 = 0.75$ rad/seg, como se indica y la escalera superior se está subiendo con respecto a la inferior con una velocidad de 0.5 m/seg y desacelerándose a 0.1 m/seg^2. Usando las coordenadas esféricas, determine la velocidad y aceleración del punto P del extremo de la escalera en el instante que se muestra.



P1-63

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios e identificación de los parámetros que definen el movimiento en coordenadas esféricas (ver figura P1-63a):



P1-63a

$$r = \frac{10}{sen\ 45^o} = 14.142\ m \qquad \theta = 45^o$$

$$\dot{r} = 0.5 m/seg \qquad \dot{\theta} = -0.75\ rad/seg$$

$$\ddot{r} = -0.1 m/seg^2 \qquad \ddot{\theta} = 0$$

$$\dot{\phi} = 0.2\ rad/seg$$

$$\ddot{\phi} = 0.5\ rad/seg^2$$

a).- Cálculo de la velocidad y aceleración de P:

$$\bar{V}_P = \dot{r}\ \bar{e}_r + r\ \dot{\theta}\ \bar{e}_\theta + r\ \dot{\phi}\ sen\theta\ \bar{e}_\phi = 05\ \bar{e}_r + 14.142*(-0.75)\ \bar{e}_\theta + 14.142*0.2*sen\ 45^o\ \bar{e}_\phi$$

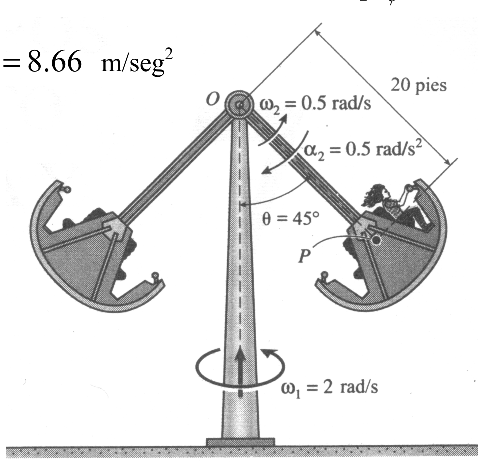
$$\bar{V}_P = 0.5\ \bar{e}_r - 10.61\ \bar{e}_\theta + 2\ \bar{e}_\phi \quad \rightarrow \quad \left|\bar{V}_P\right| = 10.808 \ \text{ m/seg}$$

$$\bar{a}_P = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 sen^2\theta\right)\bar{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 sen\theta\cos\theta\right)\bar{e}_\theta + \left(2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}sen\theta + r\ddot{\phi}sen\theta\right)\bar{e}_\phi$$

$$\bar{a}_P = \begin{pmatrix} -0.1 - 14.142*0.75^2 - \\ 14,142*0.2^2 sen45^o \end{pmatrix}\bar{e}_r + \begin{bmatrix} 2*0.5*(-0.75) - \\ 14.142*0.2^2 sen^2 45^o \end{bmatrix}\bar{e}_\theta +$$
$$\left[2*14.142*(-0.75)*0.2s\cos 45^o + 2*0.5*0.2\ sen\ 45^o + 14.142*0.5\ sen\ 45^o\right]\bar{e}_\phi$$

$$\bar{a}_P = 8.338\ \bar{e}_r - 1.033\ \bar{e}_\theta + 2.14\ \bar{e}_\phi \ \text{ (m/seg}^2) \quad \rightarrow \quad \left|\bar{a}_P\right| = 8.66 \ \text{ m/seg}^2$$

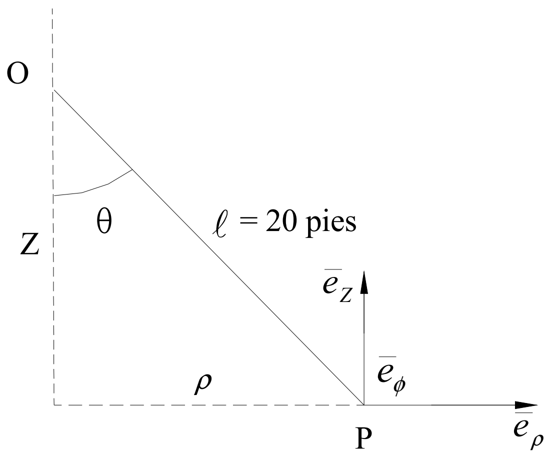
1-64.- Un aparato de un parque de diversiones tiene dos canastillas sujetas rígidamente a brazos de soporte, los cuales tienen libertad para girar verticalmente alrededor del pivote en O. El pivote está soportado por un poste vertical que en el instante dado gira a la velocidad angular constante ω_1 = 2 rad/seg. Un pasajero está en sentado en una de las canastillas en el lugar indicado por P. Usando coordenadas cilíndricas, determine la aceleración del pasajero P, si los brazos de soporte está en la posición que se muestra (θ = 45º) y está girando alrededor del pivote O a la velocidad y aceleración angulares de ω_2 = 0.5 rad/seg y α_2 = 0.5 rad/seg^2 respectivamente.



P1-64

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios e identificación de los parámetros que definen el movimiento en coordenadas cilíndricas (ver figura P1-64a):



P1-64a

$$\rho = \ell sen\, \theta$$

$$\dot{\rho} = \ell \cos\theta\, \dot{\theta} = \ell \cos\theta\, \omega_2$$

$$\ddot{\rho} = \ell \cos\theta\, \ddot{\theta} - \ell\, sen\theta\, \dot{\theta}^2$$

$$\ddot{\rho} = \ell \cos\theta\, \alpha_2 - \ell\, sen\theta\, \omega_2^2$$

$$Z = -\ell \cos\theta$$

$$\dot{Z} = \ell\, sen\theta\, \dot{\theta} = \ell\, sen\theta\, \omega_2$$

$$\ddot{Z} = \ell\, sen\theta\, \ddot{\theta} + \ell \cos\theta\, \dot{\theta}^2 = \ell\, sen\theta\, \alpha_2 + \ell \cos\theta\, \omega_2^2$$

Para el caso específico de:

$\theta = 45^o$, $\omega_2 = 0.5$ rad/seg y $\alpha_2 = -0.5$ rad/seg^2

$$\left| \begin{array}{l} \rho = 20 * sen45^o = 14.142\ pies \\ \dot{\rho} = 20 * c0s45^o * 0.5 = 7.071\ pie/seg \\ \ddot{\rho} = 20 * \cos 45^o * (-0.5) - 20 * sen45^o * 0.5^2 = -10.607\ pie/seg^2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \dot{\phi} = 2\ rad/seg \\ \\ \ddot{\phi} = 0 \end{array} \Bigg|$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{Z} = 20 * sen45^o * 0.5 = 7.071\ \ pie/seg \\ \ddot{Z} = 20 * sen45^o * (-0.5) + 20 * \cos 45^o * 0.5^2 = -3.535\ pie/seg^2 \end{array} \right|$$

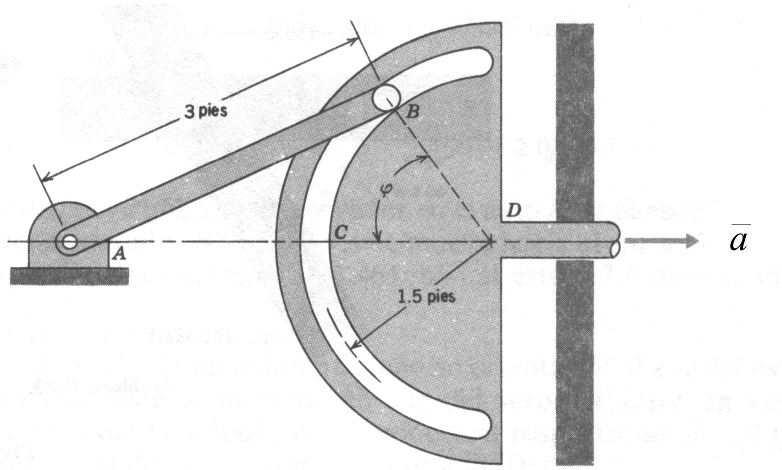
2).- Cálculo de la aceleración de P:

$$\bar{a}_P = \left(\ddot{\rho} - \rho\, \dot{\phi}^2\right) \bar{e}_\rho + \left(2 \dot{\rho}\, \dot{\phi}\right) \bar{e}_\phi + \ddot{Z}\, \bar{e}_Z$$

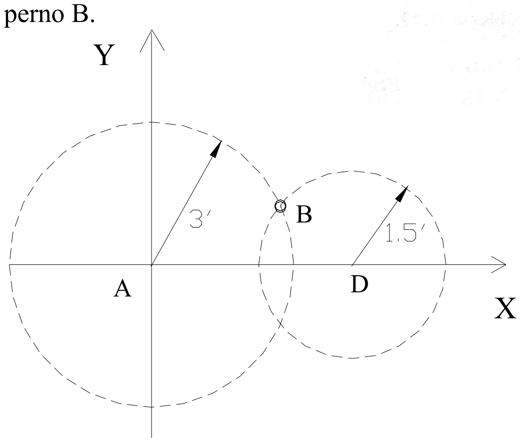
$$\bar{a}_P = (-10.607 - 14.142 * 4)\, \bar{e}_\rho + 2 * 7.071 * 2\, \bar{e}_\phi - 3.535\, \bar{e}_Z$$

$$\bar{a}_P = -67.175\, \bar{e}_\rho + 28.284\, \bar{e}_\phi - 3.535\, \bar{e}_Z \ \ (\text{pie/seg}^2) \quad \rightarrow \quad |\bar{a}_P| = 72.972 \ \ \text{pie/seg}^2$$

1-65.- Un Perno en el extremo del brazo A de 3 pies de largo, sigue la trayectoria de la ranura circular del elemento CD, el cual se mueve hacia la derecha con una aceleración constante de 1 pie/seg^2 partiendo del reposo cuando φ = 90º, Para el instante en que φ = 45º, usando coordenadas cartesianas calcule la velocidad y aceleración del perno B.



P1-65



P1-65a

Solución

1).- Por intersección de trayectorias (ver figura P1-65a).-

a).- Cálculo de la posición de D, para un instante cualquiera:- Todo los puntos del elemento tienen el mismo movimiento por encontrarse en movimiento de traslación rectilíneo, luego:

$$X_D = X_{Do} + \overbrace{\dot{X}_{Do}}^{o} t + \frac{1}{2}\overbrace{\ddot{X}_D}^{a} t^2 = 2.6 + 0.5\, t^2$$

b).- Determinación de las ecuaciones de las trayectorias, para un instante cualquiera de B:

$$X^2 + Y^2 = 9 \qquad (1)$$

$$(X - X_D)^2 + Y^2 = 1.5^2 \quad \rightarrow \quad \left(X - 2.6 - \frac{1}{2} a\, t^2\right)^2 + Y^2 = 2.25 \qquad (2)$$

2).- Derivando (1) y (2) dos veces respecto al tiempo:

$$2X\dot{X} + 2Y\dot{Y} = 0 \quad \rightarrow \quad X\dot{X} + Y\dot{Y} = 0 \qquad (3)$$

$$2\left(X - 2.6 - 0.5\, t^2\right) * \left(\dot{X} - t\right) + 2Y\dot{Y} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{X}\left(2.6 + 0.5\, t^2\right) + t\, X - \left(2.6\, t + 0.5\, t^3\right) = 0$$

$$\dot{X} = \frac{2.6\,t + 0.5\,t^3 - X\,t}{2.6 + 0.5\,t^2} \qquad (4)$$

$$\dot{X}^2 + X\ddot{X} + \dot{Y}^2 + Y\ddot{Y} = 0 \qquad (5)$$

$$\ddot{X}\left(2.6 + 0.5\,t^2\right) + t\,\dot{X} + X + t\,\dot{X} - 2.6 - 1.5\,t^2 = 0$$

$$\ddot{X} = \frac{2.6 + 1.5\,t^2 - X - 2\,t\,\dot{X}}{2.6 + 0.5\,t^2} \qquad (6)$$

3).- Para el caso específico de:

$Y = 1.5 sen 45^{o} = 1.06$ pies y $X = \sqrt{9 - 1.06^2} = 2.806$ pies

En (2):

$$\left(2.806 - 2.6 - 0.5\,t^2\right)^2 + 1.06^2 = 2.25 \quad \rightarrow \quad 0.042 + 0.25\,t^4 - 0.206\,t^2 - 1.126 = 0$$

$$Z^2 - 0.824\,Z - 4.338 = 0$$

$$Z = \frac{0.824 \pm \sqrt{0.824^2 + 4 * 4.338}}{2} = 0.412 \pm 2.123$$

$Z = 2.535 \quad \rightarrow \quad t = 1.6$ seg

En (4):

$$\dot{X} = \frac{2.6 * 1.6 + 0.5 * 1.6^3 - 2.806 * 1.6}{2.6 + 0.5 * 1.6^2} = 0.443 \text{ pie/se}$$

En (3):

$$\dot{Y} = -\frac{X\dot{X}}{Y} = -\frac{2.806 * 0.443}{1.06} = -1.17 \text{ pie/seg}$$

$\therefore \quad \overline{V}_B = 0.443\,\bar{i} - 1.17\,\bar{j}$ (pie/seg)

En (6), $\left(\ddot{X}_B \neq \ddot{X}_D = a\right)$:

$$\ddot{X} = \frac{2.6 + 1.5*1.6^2 - 2.806 - 2*1.6*0.443}{2.6 + 0.5*1.6^2} = 0.57 \ \text{pie/seg}^2$$

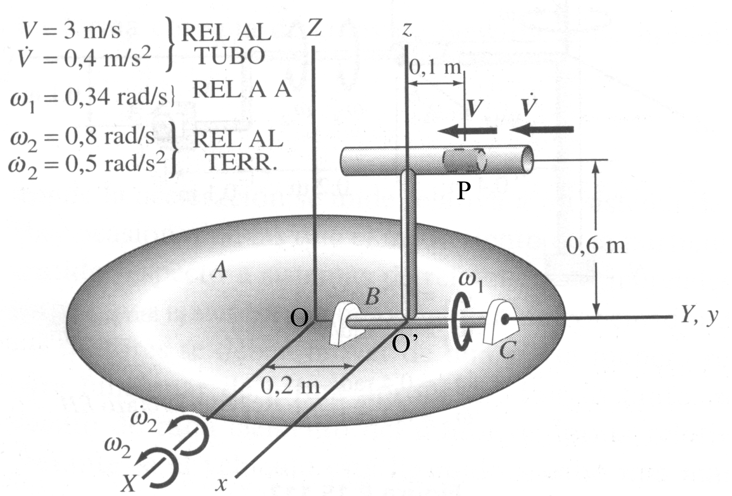
En (5):

$$0.443^2 + 2.806*0.57 + 1.17^2 + 1.06\,\ddot{Y}_B = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{Y}_B = -2.985 \ \text{pie/seg}^2$$

Luego:

$$\bar{a}_B = 0.57\,\bar{i} - 2.985\,\bar{j} \ \ (\text{pie/seg}^2)$$

1-66.- Un eje BC gira respecto a la plataforma A con una velocidad angular ω = 0.34 rad/seg. Una barra está soldada a BC y en el instante de interés está vertical. Un tubo está fijado a la barra vertical y dentro del mismo la cabeza de un pistón se está moviendo respecto al tubo con una velocidad V de 3 m/seg y con una aceleración de $\dot{V}$ de 0.4 m/seg^2. La plataforma A tiene una velocidad angular relativas al terreno dada como ω_2 = 0.8 rad/seg y con una aceleración angular de 0.5 rad/seg^2. Hallar el vector aceleración de la cabeza del pistón relativa al terreno.



P1-66

Solución

1).- Cálculo del movimiento del marco móvil eje BC y barra soldada y del punto base O':

a).- Movimiento del Marco móvil:

$$\bar{\omega}_T = \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1 = 0.8\,\bar{i} + 0.34\,\bar{j} \ \ (\text{rad/seg})$$

$$\dot{\bar{\omega}}_T = \dot{\bar{\omega}}_2 + \overbrace{\dot{\bar{\omega}}_1}^{0} + \bar{\omega}_2 x \bar{\omega}_1 = 0.5\,\bar{i} + 0.8\,\bar{i}\ x\ 0.34\,\bar{j} = 0.5\,\bar{i} + 0.272\,\bar{k} \ \ (\text{rad/seg}^2)$$

b).- Cálculo de la velocidad y aceleración de O', como parte de A, en movimiento circular vertical:

$$\bar{V}_{O'} = \bar{\omega}_2 x\, \bar{r}_{OO'} = 0.8\,\bar{i}\;\; x\; 0.2\;\bar{j} = 0.16\;\bar{k} \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{a}_{O'} = \dot{\bar{\omega}}_2 x\, \bar{r}_{OO'} - \omega_2^2\;\bar{r}_{OO'} = 0.5\;\bar{i}\;\; x\; 0.2\bar{j} - 0.8^2\left(0.2\;\bar{j}\right) = -0.128\;\bar{j} + 0.1\;\bar{k} \quad (\text{m/seg}^2)$$

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de P:

$$\bar{V}_P = \bar{V}_{P/T} + \bar{V}_{O'} + \bar{\omega}_T x\, \bar{r}_{O'P} = -3\bar{j} + 0.16\;\bar{k} + \left(0.8\;\bar{i} + 0.34\bar{j}\right)x\left(0.1\bar{j} + 0.6\;\bar{k}\right)$$

$$\bar{V}_P = 0.204\;\bar{i} - 3.48\;\bar{j} + 0.24\;\bar{k} \quad \text{(m/seg)} \quad \rightarrow \quad \left|\ddot{V}_P\right| = 3.494 \text{ m/seg}$$

$$\bar{a}_P = \bar{a}_{P/T} + \bar{a}_{O'} + \dot{\bar{\omega}}_T x\, \bar{r}_{O'P} + \bar{\omega}_T x\left(\bar{\omega}_T x\, \bar{r}_{O'P}\right) + 2\;\bar{\omega}_T x\, \bar{V}_{P/T}$$

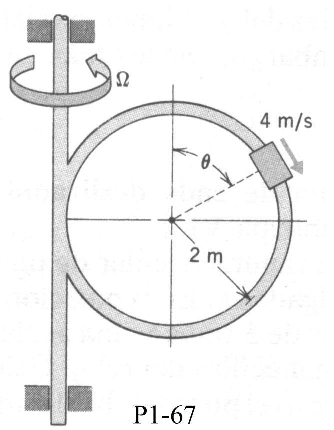
$$\bar{a}_P = -0.4\bar{j} + \left(-0.128\bar{j} + 0.1\;\bar{k}\right) + \left(0.5\;\bar{i} + 0.272\;\bar{k}\right)x\left(0.1\bar{j} + 0.6\;\bar{k}\right) +$$

$$\left(0.8\;\bar{i} + 0.34\bar{j}\right)x\left[\left(0.8\;\bar{i}\,`0.34\bar{j}\right)x\left(0.1\bar{j}\,`0.6\;\bar{k}\right)\right] + 2\;\left(0.8\;\bar{i} + 0.34\bar{j}\right)x\left(-3\bar{j}\right)$$

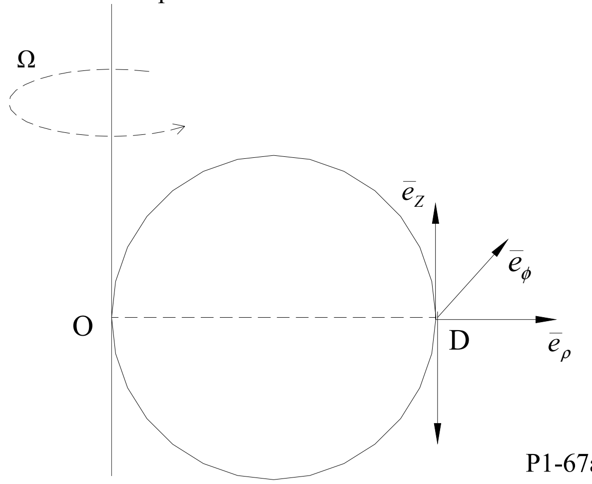
$$\bar{a}_P = -0.27\;\bar{i} - 0.828\bar{j} - 4.65\;\bar{k} - 0.384\;\bar{k} - 0.064\bar{j} - 0.069\;\bar{k} + 0.027\;\bar{i}$$

$$\bar{a}_P = -0.892\;\bar{j} = 5.103\;\bar{k} \quad \rightarrow \quad \left|\bar{a}_P\right| = 5.18 \;\; \text{m/seg}^2$$

1-67.- Para el instante mostrado, el aro circular gira alrededor del eje vertical a Ω = 20 rad/seg y $\dot{\Omega}$ = 5 rad/seg^2. El bloque se mueve con rapidez constante de 4 m/seg con respecto al aro. Usando coordenadas cilíndricas encuentre la aceleración del deslizador para el instante cuando θ = 90º.



P1-67



P1-67a

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios e identificación de los parámetros que definen al movimiento en coordenadas cilíndricas, el instante pedido (ver figura P1-67a):

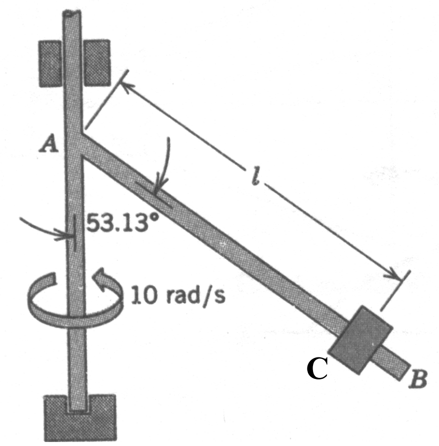
$\rho = 4\ m$	$\dot{\phi} = 20\ rad/seg$	$\dot{Z} = -4a\ m/seg$
$\dot{\rho} = 0$		
$\ddot{\rho} = -\dfrac{4^2}{2} = -8\ m^2$	$\ddot{\phi} = 5\ rad/seg^2$	$\ddot{Z} = 0$

2).- Cálculo de la aceleración del deslizador D:

$$\bar{a}_D = \left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\phi}^2\right)\dot{e}_\rho + \rho\,\ddot{\phi}\,\bar{e}_\phi = \left(-8 - 4*20^2\right)\bar{e}_\rho + 4*5\,\bar{e}_\phi$$

$$\bar{a}_D = -1608\,\bar{e}_\rho + 20\,\bar{e}_\phi\ \ (\text{m/seg}^2) \quad \rightarrow \quad \left|\bar{a}_D\right| = 1608.12\ \ \text{m/seg}^2$$

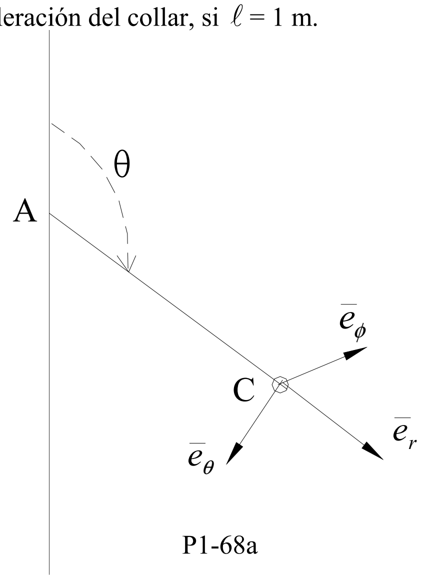
1-68.- Un collar desliza sobre la barra AB con una velocidad de 2 m/seg y una aceleración de 1 m/seg^2 y la barra gira con respecto a su eje vertical a razón constante de 10 rad/seg. Usando coordenadas esféricas encuentre la velocidad y aceleración del collar, si $\ell = 1$ m.



P1-68

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios e identificación de los parámetros que definen el movimiento en coordenadas esféricas en el instante dado (ver figura P1-68a):



P1-68a

$r = l = 1\ m$	$\theta = 126.87^{\circ}$	$\dot{\phi} = 10\ rad/seg$
$\dot{r} = 2\ m!seg$	$\dot{\theta} = 0$	
$\ddot{r}\ \ 1\ m!seg^2$	$\dot{\theta} = 0$	$\ddot{\phi} = 0$

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración del collar C:

$$\overline{V}_C = \dot{r}\,\overline{e}_r + r\dot{\phi}\,sen\theta\,\overline{e}_\phi = 2\,\overline{e}_r + 10\,sen126.87^o\,\overline{e}_\phi$$

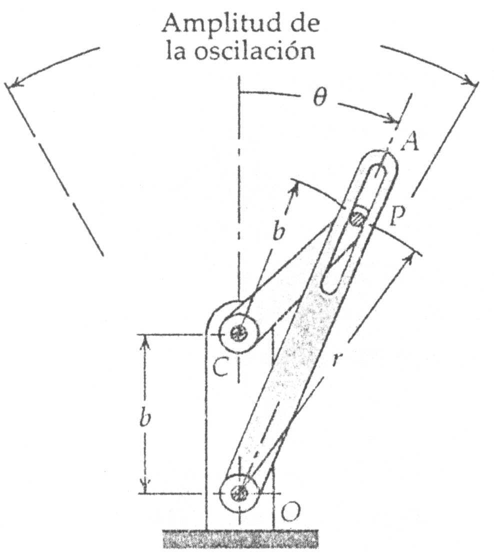
$$\overline{V}_C = 2\,\overline{e}_r + 8\,\overline{e}_\phi \quad \text{/m/seg)} \quad \rightarrow \quad \left|\overline{V}_C\right| = 8.246 \quad \text{m/seg}$$

$$\overline{a}_C = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\phi}^2 sen^2\theta\right)\overline{e}_r - r\,\dot{\phi}^2 sen\theta\cos\theta\,\overline{e}_\theta + 2\,\dot{r}\,\dot{\phi}\,sen\theta\,\overline{e}_\phi$$

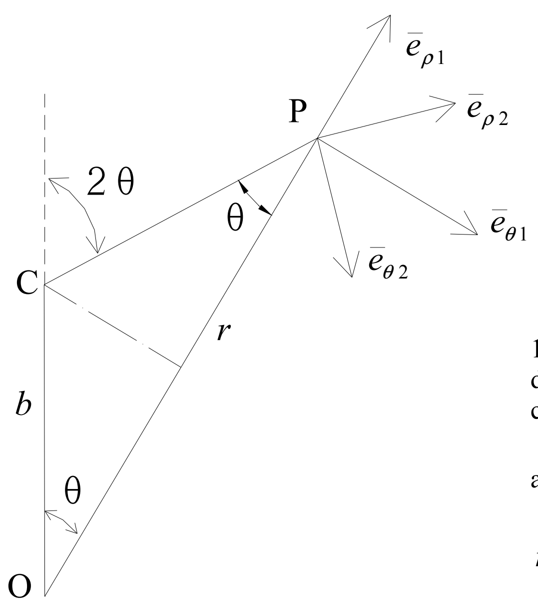
$$\overline{a}_C = \left(1 - 100\,sen^2 126.87^o\right)\overline{e}_r - 100\,sen126.87^o\,\cos126.87^o\,\overline{e}_\theta + 40\,sen126.87^o\,\overline{e}_\phi$$

$$\overline{a}_C = -63\,\overline{e}_r + 48\,\overline{e}_\theta + 32\,\overline{e}_\phi \quad (\text{m/seg}^2) \quad \rightarrow \quad \left|\overline{a}_C\right| = 85.42 \quad \text{m/seg}^2$$

1-69.- El brazo rasurado OA oscila en torno de O dentro de los límites indicados y arrastra a la manivela CP a través del pasador P. Durante un intervalo del movimiento, $\dot{\theta}$= k, constante. Hallar el valor de la correspondiente aceleración total de P para todo valor de θ comprendido entre los límites en que $\dot{\theta}$= k. Emplear las coordenadas polares r y θ. Demostrar que permanecen constantes los módulos de la velocidad y la aceleración de P en su trayectoria circular.



P1-69



P1-69a

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios e identificación de los parámetros que definen el movimiento en coordenadas polares (ver figura P1-69a):

a).- Para las coordenadas polares $\left(\overline{e}_{\rho 1}\,,\,\overline{e}_{\theta 1}\right)$ en OA:

$$r = 2\,b\cos\theta$$

$$\dot{r} \quad = 2\,b\,\dot{\theta}\,sen\theta$$

$\ddot{r} = -2\,b\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - 2\,b\,sen\theta\,\ddot{\theta}$

Para: $\dot{\theta} = k \quad y \quad \ddot{\theta} = 0$:

$r = 2\,b\,\cos\theta$

$\dot{r} = -2b\,k\,sen\theta$

$\ddot{r} \quad = 2b\cos\theta\,k^2$

b).- Para las coordenadas polares $\left(\bar{e}_{\rho 2}\,,\,\bar{e}_{\theta 2}\right)$ en OP(trayectoria circular):

$$\left|\begin{array}{l|l} \rho = b & \theta_2 = 2\dot{\theta} \\ \dot{\rho} = 0 & \\ \ddot{\rho} = 0 & \ddot{\theta}_2 = 0 \end{array}\right|$$

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de P, tomando como punto de referencia a O en $\Im$:

$\bar{V}_P = \dot{r}\,\bar{e}_{\rho 1} + r\,\dot{\theta}\,\bar{e}_{\theta 1} = -2b\,k\,sen\theta\,\bar{e}_{\rho 1} + 2b\,\cos\theta\,k\,\bar{e}_{\theta 1}$ (Unid. de velocidad)

$\left|\bar{V}_P\right| = 2b\,k$ Unidades de velocidad

$\bar{a}_P = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\bar{e}_{\rho 1} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,\bar{e}_{\theta 1}$

$\bar{a}_P = \left(-2b\,\cos\theta\,k^2 - 2b\,\cos\theta\,k^2\right)\bar{e}_{\rho 1} + \left(-4b\,sen\theta\,k^2\right)\bar{e}_{\theta 1}$

$\bar{a}_P = -4b\,\cos\theta\,k^2\bar{e}_{\rho 1} - 4b\,sen\theta\,k^2\;\bar{e}_{\theta 1}$ (Unid. de aceleración) $\rightarrow$ $\left|\bar{a}_P\right| = 4b\,k^2$ Unid. de acelerac.

2).- Cálculo de la aceleración de P tomando como punto de referencia a C en $\Im$ (trayectoria circular):

$\bar{V}_P = \rho\,\dot{\theta}_2\;\bar{e}_{\theta 2} = b * 2\,k\;\bar{e}_{\theta 2} = 2b\,k\;\bar{e}_{\theta 2}$ (unidades de velocidad)

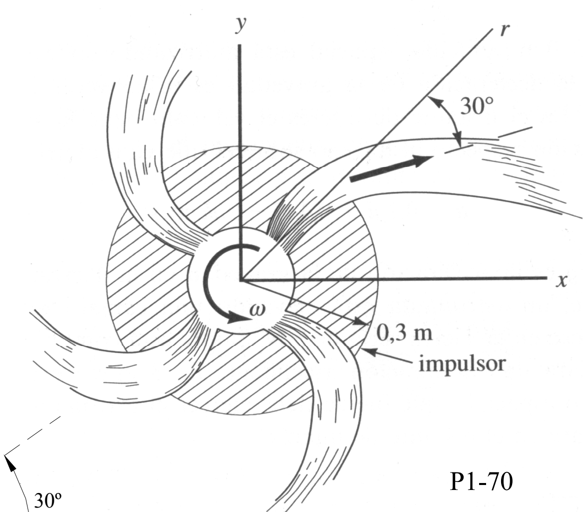
$\left|\bar{V}_P\right| = 2b\,k$ (unidades de velocidad)

$\bar{a}_P = -\rho\,\dot{\theta}_2^2\;\bar{e}_{\rho 2} = -b * 4\,k^2\;\bar{e}_{\rho 2} = -4b\,k^2\;\bar{e}_{\rho 2}$ (Unid. de aceleración)

$\left|\bar{a}_P\right| = 4b\,k^2$ Unid. de aceleración

Los módulos de la velocidad y aceleración permanecerán constantes por depender de parámetros constantes.

1-70- Se muestra una sección superior de un aspersor. El agua entra en el centro desde abajo y luego pasa por los pasajes del impulsor. El impulsor está girando con una velocidad angular ω constante e igual a 8 RPM. El agua abandona el impulsor con una velocidad relativa de 3 m/seg y formando un ángulo de 30º respecto a r ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración del agua respecto al terreno cuando ésta, abandona el impulsor? Si el radio de curvatura de la trayectoria de la partícula en el momento de interés con respecto al impulsor es ρ_c= 0.3 m.



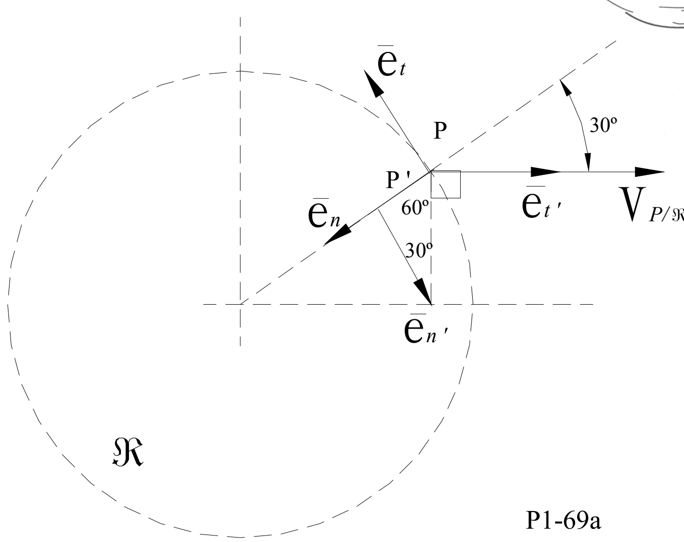
P1-70

Solución

Sea P la partícula y P’ un punto coincidente con P, perteneciente al impulsor:

1).- Cálculo de la velocidad y aceleración de P’ en $\Im$ (utilizando coordenadas naturales en el aspersor):

a).- Orientación de los vectores unitarios que definen las coordenadas naturales (ver figura P1-69a):



P1-69a

b).- Cálculo de la velocidad y aceleración de P’:

$$\bar{V}_{P'} = \omega\, r\, \bar{e}_t = 18 * \frac{\pi}{30} * 0.3\, \bar{e}_t = 0.565\, \bar{e}_t \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{a}_{P'} = \omega^2 r\, \bar{e}_n = 1.066\, \bar{e}_n \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

2).- Cálculo del movimiento de P respecto al aspersor $\Re$:

$$\bar{r}_{PP'} = \bar{0}$$

$$\bar{V}_{P/\Re} = 3\left(-sen30^{\circ}\,\bar{e}_t - \cos 30^{\circ}\,\bar{e}_n\right) = -1.5\,\bar{e}_t - 2.6\,\bar{e}_n \quad \text{(m/seg)}$$

$$\bar{a}_{P/\Im} = \frac{V_{P/\Re}^2}{\rho_c}\,\bar{e}_{n'} = \frac{3^2}{0.3}\left(-\cos 30^{\circ}\,\bar{e}_t + sen30^{\circ}\,\bar{e}_n\right) = -25.98\,\bar{e}_t + 15\,\bar{e}_n \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

3).- Cálculo de la velocidad y aceleración de la partícula P respecto al terreno $\Im$:

$$\bar{V}_P = \bar{V}_{P'} + \bar{V}_{P/\Re} = 0.565\,\bar{e}_t - 1.5\,\bar{e}_t - 2.6\,\bar{e}_n = -0.935\,\bar{e}_t - 2.6\,\bar{e}_n \quad \text{(m/seg)}$$

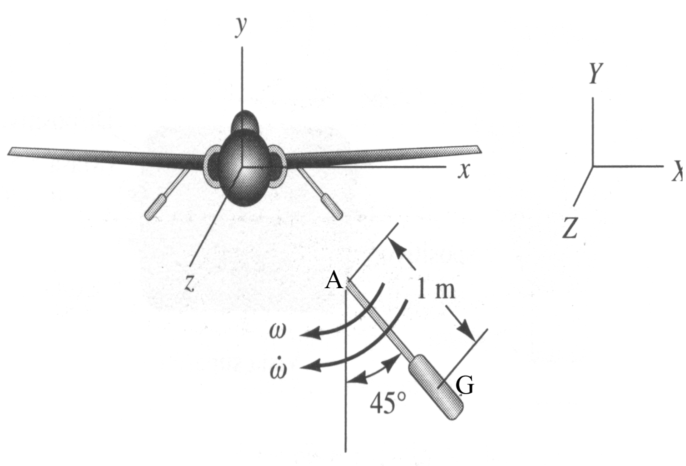
$$\left|\bar{V}_P\right| = 2.763 \quad \text{m/seg}$$

$$\bar{a}_P = \bar{a}_{P'} + \bar{a}_{P/\Re} + 2\,\bar{\omega}\;x\;\bar{V}_{P/\Re} = \bar{a}_{P'} + \bar{a}_{P/\Re} + 3.77\,\bar{e}_b\;x\left(-1.5\,\bar{e}_t - 2.6\,\bar{e}_n\right)$$

$$\bar{a}_P = \left(-25.98 + 9.802\right)\bar{e}_t + \left(1.066 + 15 - 5.65\right)\bar{e}_n = -16.178\,\bar{e}_t + 10.411\,\bar{e}_n \quad \text{(m/seg}^2\text{)}$$

$$\left|\bar{a}_P\right| = 19.24 \quad \text{m/seg}^2$$

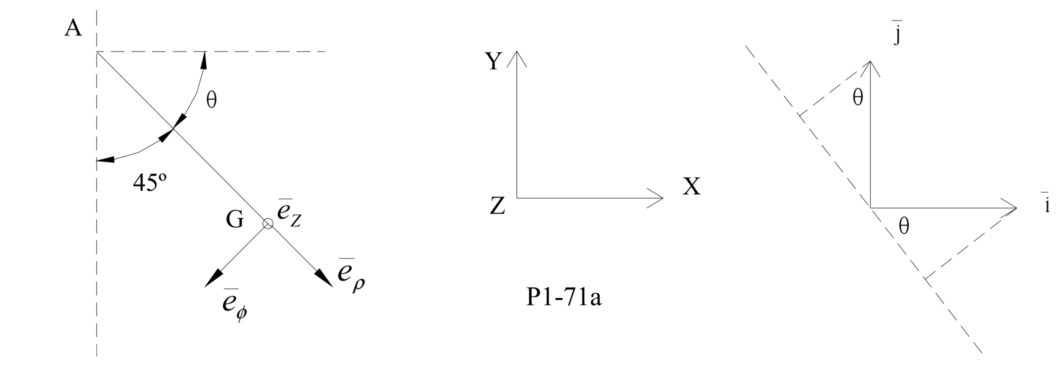
1-71.- Un avión de combate está aterrizando siguiendo un movimiento de traslación y tiene la siguiente aceleración respecto al terreno: $\bar{a} = 0.2\,g\,\bar{k} - 0.1\,g\,\bar{j}$ (m/seg^2).
Las ruedas se están extendiendo tal como se muestra. Usando coordenadas cilíndricas en el avión, encuentre la aceleración del centro de cada rueda respecto al terreno, en el instante que se muestra. Utilizar los datos siguientes: $\omega = 0.3\;rad/seg$ y $\dot{\omega} = 0.4 rad/seg^2$



P1-71

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios e identificación de los parámetros que definen el movimiento respecto al avión:



$$\bar{i} = \cos\theta\,\bar{e}_\rho - sen\theta\,\bar{e}_\theta \;\;,\;\; \bar{j} = -sen\theta\,\bar{e} - \cos\theta\,\bar{e}_\theta$$

$$\bar{k} = -\bar{e}_Z$$

$$\left| \begin{array}{l|l} \rho = 1\,m & \dot{\theta} = \omega = 0.3\;rad/seg \\ \dot{\rho} = 0 & \\ \ddot{\rho} = 0 & \ddot{\theta} = \dot{\omega} = 0.4\;rad/seg^2 \end{array} \right|$$

2).- Cálculo de la aceleración de G respecto al avión $\Re$:

$$\bar{a}_{G/\Re} = -\rho\,\dot{\theta}^2\,\bar{e}_\rho + \rho\,\ddot{\theta}\,\bar{e}_\theta = -1*0.3^2\,\bar{e}_\rho + 1*0.4\,\bar{e}_\theta$$

$$\bar{a}_{G/\Re} = -0.09\,\bar{e}_\rho + 0.4\,\bar{e}_\theta \;\;\text{(m/seg)}$$

3).- Movimiento del marco móvil avión $\Re$ y del punto base A:

$$\bar{\omega}_{\Re/\Im} = \dot{\bar{\omega}}_{\Re/\Im} = \bar{0}$$

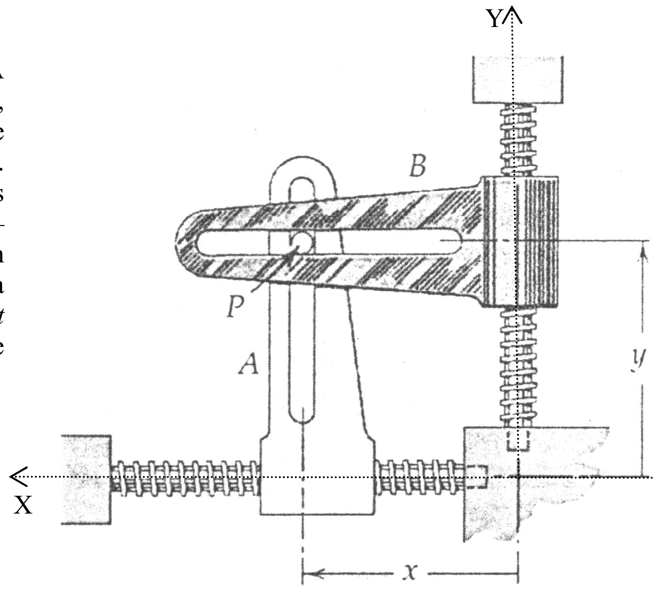
$$\bar{a}_A = 0.2\,g\,(-\bar{e}_Z) - 0.1\,g\,(-sen\theta\,\bar{e}_\rho - \cos\theta\,\bar{e}_\theta) = 0.694\,\bar{e}_\rho + 0.694\,\bar{e}_\theta - 1.962\,\bar{e}_Z \;\;\text{(m/seg}^2\text{)}$$

4).- Cálculo de la aceleración del centro G de la rueda respecto al terreno:

$$\bar{a}_G = \bar{a}_A + \bar{a}_{G/\Re} = (0.694 - 0.09)\,\bar{e}_\rho + (0.694 + 0.4)\,\bar{e}_\theta - 1.962\,\bar{e}_Z$$

$$\bar{a}_G = 0.604\,\bar{e}_\rho + 1.094\,\bar{e}_\theta - 1.962\,\bar{e}_Z \;\;\text{(m/seg}^2\text{)} \;\rightarrow\; |\bar{a}_P| = 2.326 \;\;\text{m/seg}^2$$

1-72.- Los movimientos *x* e *y* de las guías A y B, cuyas ranuras forman ángulo recto, controlan el movimiento del pasador de enlace P, que resbala por ambas ranuras. Durante un corto intervalo esos movimientos están regidos por $x = 20 + ¼\ t^2$ e $y = 15 – 1/6\ t^3$, donde *x e y* son milímetros y *t* en segundos. Calcular los nódulos de la velocidad y la aceleración del pasador para $t = 2$ seg y calcular su curvatura en ese instante.



P1-72

Solución

Las barras tienen movimiento de traslación.

1).- Ecuaciones del movimiento.- Utilizando las ecuaciones paramétricas:

$$X = 20 + \frac{1}{4}t^2 \ \text{(mm)} \quad \text{y} \quad Y = 15 - \frac{1}{6}t^3 \ \text{(mm)}$$

$$\dot{X} = \frac{1}{2}t \ \text{(mm/seg)} \quad \text{y} \quad \dot{Y} = -\frac{1}{2}t^2 \ \text{(mm!seg)}$$

$$\ddot{X} = \frac{1}{2} \ \text{(mm/seg}^2\text{)} \quad \text{y} \quad \ddot{Y} = -t \ \text{(mm!seg}^2\text{)}$$

Luego:

$$\overline{V}_P = \frac{1}{2}t\,\bar{i} - \frac{1}{2}t^2\,\bar{j} \ \text{(m!seg)} \quad \text{y} \quad \bar{a}_P = \frac{1}{2}\bar{i} - t\,\bar{j} \ \text{(mm!seg}^2\text{)}$$

2).- Para el caso especifico de t = 2 seg:

$$\overline{V}_P = \bar{i} - 2\,\bar{j} \ \text{(mm/seg)} \quad \text{y} \quad \bar{a}_P = 0.5\,\bar{i} - 2\,\bar{j} \ \text{(mm/seg}^2\text{)}$$

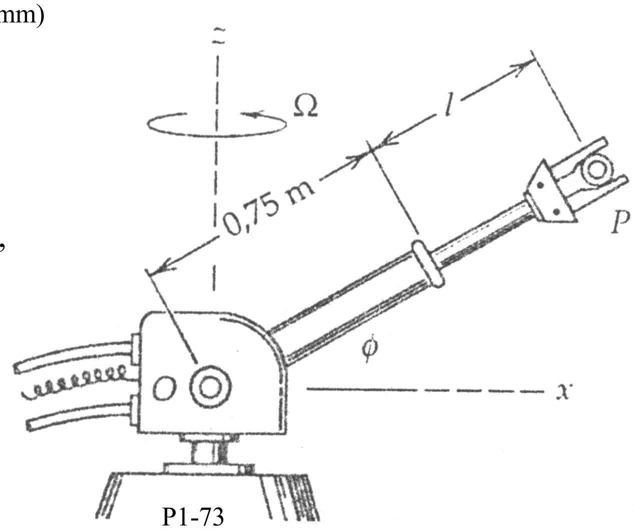
3).- Cálculo de la curvatura:

Si: $K = \dfrac{1}{\rho_C} = \dfrac{\left| \dot{X}\ddot{Y} - \dot{Y}\ddot{X} \right|}{\left| \left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 \right)^{3/2} \right|}$

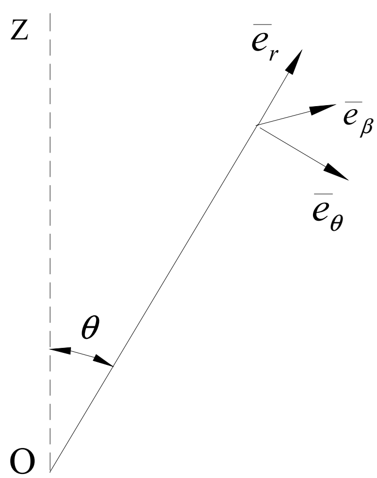
Para: t = 2 seg

$$K = \frac{\left| 1*(-2) - (-2)*\left(1/2\right) \right|}{\left| (1+4)^{3/2} \right|} = 0.0894 \text{ (1/mm)}$$

1-73.- El mecanismo robótico gira alrededor de un eje vertical fijo a la vez que el brazo se alarga y se eleva.- En el instante dado, $\phi = 30^o, \dot{\phi} = 10\ grd/seg(cte), l = 0.5\ m,$ $\dot{l} = 0.2\ m/seg, \ddot{l} = -0.3\ m/seg^2$ y $\Omega = 20\ grd/seg\ (cte)$. Usando coordenadas esféricas determine la velocidad y aceleración de la pieza P asida.



P1-73



P1-73a

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios e identificación de los parámetros que definen el movimiento en coordenadas esféricas (ver figura P1-73a):

$r = 0.75 + l = 1.25\ m$	$\theta = 90^o - \phi = 60^o$
$\dot{r} = \dot{l} = 0.2\ m/seg$	$\dot{\theta} = -\dot{\phi} = -10 * \dfrac{\pi}{180} = -0.175\ m/seg$
$\ddot{r} = \ddot{l} - 0.3\ m/seg$	$\ddot{\theta} = 0$

$$\dot{\beta} = \Omega = 20 * \frac{\pi}{10} = 0.349\ rad/seg$$

$$\ddot{\beta} = \dot{\Omega} = 0$$

2).- Cálculo de la velocidad y aceleración de P:

$$\overline{V}_P = \dot{r}\,\overline{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\overline{e}_\theta + r\,\dot{\beta}\,sen\theta\,\overline{e}_\beta = 0.2\,\overline{e}_r + 1.25*(-0.175)\,\overline{e}_\theta + 1.25*(0.349)\,sen\theta\,\overline{e}_\beta$$

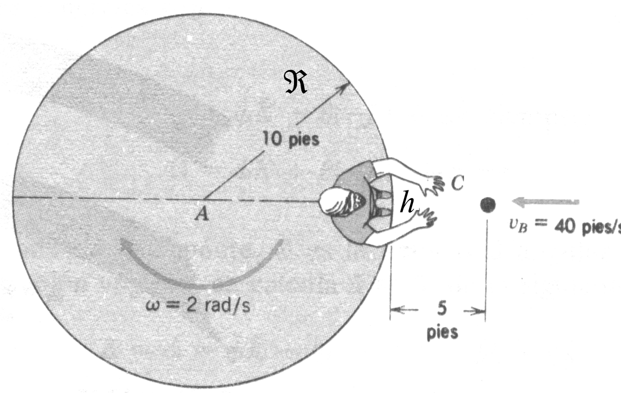
$$\overline{V}_P = 0.2\,\overline{e}_r - 0.219\,\overline{e}_\theta + 0.378\,\overline{e}_\beta \text{ (m/seg)} \quad \rightarrow \quad \left|\overline{V}_P\right| = 0.48 \text{ m/seg}$$

$$\overline{a}_P = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\,\dot{\beta}^2 sen^2\theta\right)\overline{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\beta}^2 sen\theta\cos\theta\right)\overline{e}_\theta + \left(2r\dot{\theta}\dot{\beta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\beta}\,sen\theta\right)\overline{e}_\beta$$

$$\overline{a}_P = \begin{pmatrix} -0.3 - 1.25*0.175^2 - \\ 1.25*0.349^2\,sen60^{\circ} \end{pmatrix}\overline{e}_r + \left[2*0.2*(-0.175) - 1.25*0.349^2\,sen60^{\circ}\cos 60^{\circ}\right]\overline{e}_\theta +$$
$$\left[2*1.25*(-0.175)*0.349\cos 60^{\circ} + 2*0.2*0.349\;sen\,*\right]\overline{e}_\beta$$

$$\overline{a}_P = -0.47\,\overline{e}_r - 0.136\,\overline{e}_\theta - 0.045\,\overline{e}_\beta \text{ (m/seg}^2\text{)} \quad \rightarrow \quad \left|\overline{a}_P\right| = 0.49 \text{ m/seg}^2$$

1-74.- Una persona que está parado en el punto *h* sobre el perímetro de una plataforma en rotación observa el vuelo libre de una pelota B de béisbol. Para el instante mostrado la pelota está en el punto C y se mueve horizontalmente con una rapidez constante de 40 pies/seg hacia el eje de la plataforma giratoria, que se mueve con velocidad angular constante de 2 rad/seg. Calcule, para ese instante: a) la velocidad y aceleración de la pelota desde la perspectiva de la persona, y b) el radio de curvatura en el *"plano horizontal"* de la trayectoria de la bola respecto a la persona.

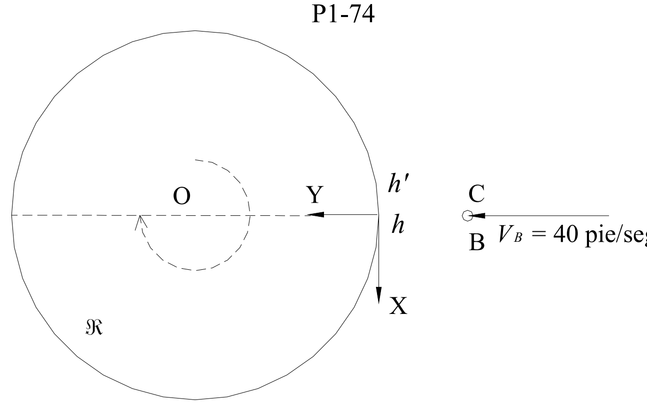


P1-74

Solución

Observando el movimiento en el plano horizontal (ver figura P1-74a).

1).- Cálculo del movimiento angular del marco móvil ℜ, y velocidad y aceleración del punto base *h*.



P1-74a

$$\overline{\omega}_{\Re} = 2\,\overline{k} \text{ (rad/seg)} \quad y \quad \dot{\overline{\omega}}_{\Re} = \overline{0}$$

$\bar{V}_{h/\Im} = \omega_{\Re} r_{Oh}\ \bar{i} = 2*10\ \bar{i} = 20\ \bar{i}$ (m/seg) y $\bar{a}_{h/\Im} = \omega_{\Re}^2 r\ \bar{j} = 4*10\ \bar{j} = 40\ \bar{j}$ (pie/seg^2)

2).- Movimiento de la bola B respecto al marco móvil $\Re$:

$\bar{r}_{hC} = -5\ \bar{j}$ (pies) , $\bar{V}_{B/\Re} = ?$ y $\bar{a}_{B/\Re} = ?$

3).- Cálculo de la velocidad y aceleración de la bola respecto al hombre.- De la velocidad y aceleración de la bola B respecto al marco inercial tierra:

a).- Si: $\bar{V}_{B/\Im} = \bar{V}_{B/\Re} + \bar{V}_{h/\Im} + \bar{\omega}_{\Re}\, x\ \bar{r}_{hC} \quad \rightarrow \quad \bar{V}_{B/\Re} = \bar{V}_{B/\Im} - \bar{V}_{h/\Im} - \bar{\omega}_{\Re}\, x\ \bar{r}_{hC}$ (1)

Donde:

$\bar{V}_{B/\Im} = 40\ \vec{j}$ (pie/seg) y $\bar{\omega}_{\Re}\, x\ \bar{r}_{hC} = 2\ \bar{k}\ x\ (-5\,\bar{j}) = 10\ \bar{i}$ (pie/seg)

En (1):

$\bar{V}_{B/\Re} = 40\ \bar{j} - 20\ \bar{i} - 10\ \bar{i} = -30\ \bar{i} + 40\ \bar{j}$ (pie/seg) $\rightarrow$ $\left|\bar{V}_{B/\Re}\right| = 50$ pie/seg

b).- Si: $\bar{a}_{B/\Im} = \bar{a}_{B/\Re} + \bar{a}_{h/\Im} - \omega_{\Re}^2\ \bar{r}_{hC} + 2\bar{\omega}_{\Re}\, x\ \bar{V}_{B/h} \ \rightarrow\ \bar{a}_{B/\Re} = \bar{a}_{B/\Im} - \bar{a}_{h/\Im} + \omega_{\Re}^2\ \bar{r}_{hC} - 2\bar{\omega}_{\Re}\, x\ \bar{V}_{B/h}$ (2)

Donde:

$\bar{a}_{B/\Im} = \bar{0}$, $\omega_{\Re}^2\ \bar{r}_{hC} = 4\,(-5\ \bar{j}) = -20\ \bar{j}$ (pie/seg^2) y

$2\ \bar{\omega}_{\Re}\, x\ \bar{V}_{B/h} = 4\ \bar{k}\ x\ (-30\ \bar{i} + 40\ \bar{j}) = -160\ \bar{i} - 120\ \bar{j}$ (pie/seg^2)

En (2):

$\bar{a}_{B/\Re} = -40\ \bar{j} - 20\ \bar{j} + 160\,\vec{i} + 120\ \bar{j} = 160\ \bar{i} + 60\ \bar{j}$ (pie/seg^2) $\rightarrow$ $\left|\bar{a}_{B/h}\right| = 170.88$ pie/seg^2

4).- Cálculo del radio de curvatura respecto a la persona en el plano horizontal:

Si: $$\frac{1}{\rho_C} = \frac{\left|\bar{V}_{B/\Re}\, x\ \bar{a}_{B/\Re}\right|}{\left|\bar{V}_{B/\Re}\right|^3}$$

Donde:

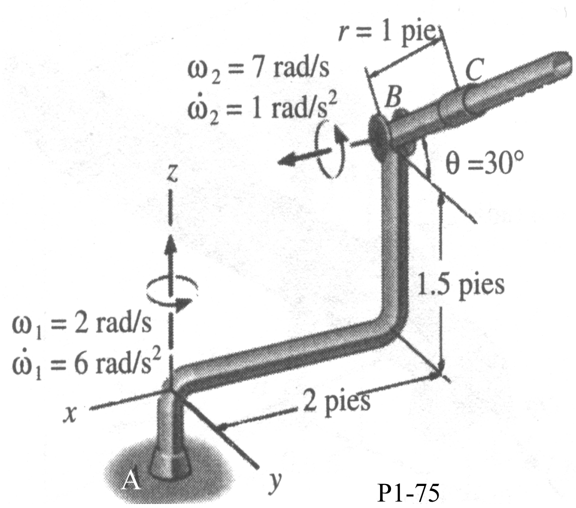
$\bar{V}_{B/\Re}\, x\ \bar{a}_{B/\Re} = (-30\ \bar{i} + 40\ \bar{j})\ x\ (160\ \bar{i} + 60\ \bar{j}) = -1800\ \bar{k} - 6400\ \bar{k} = -8200\ \bar{k}$

$$\left|\bar{V}_{B/\Re}\right|^3 = 125000$$

Luego:

$$\frac{1}{\rho_C} = \frac{8200}{125000} \quad \rightarrow \quad \rho_C = 15.24 \text{ pies}$$

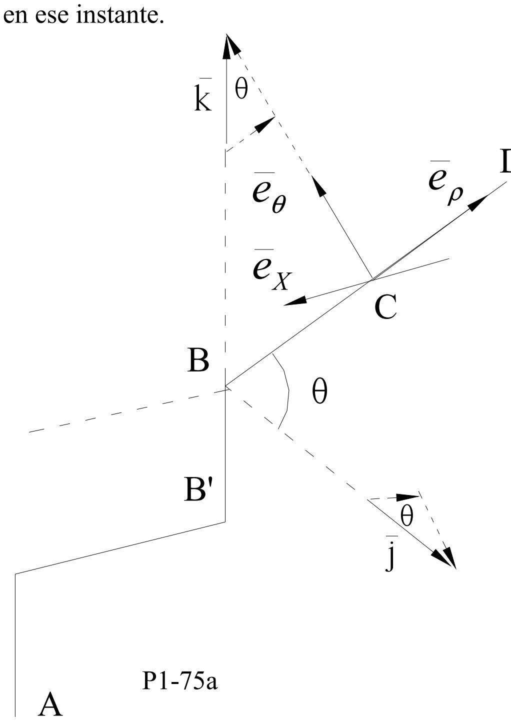
1-75.- En el instante que se ilustra, el brazo AB gira en torno del rodamiento fijo con una velocidad angular $\omega_1 = 2$ rad/seg y una aceleración angular $\dot{\omega}_1 = 6$ rad/seg^2. En el mismo instante, la varilla BD gira en relación con la varilla AB a $\omega_2 = 7$ rad/seg, que se incrementa a $\dot{\omega}_2 = 1$ rad/seg^2. Además, el collarín C se mueve sobre la varilla BD con una velocidad $\dot{r} = 2$ pie/seg y una desaceleración $\ddot{r} = 0.5$ pie/seg^2, ambas, medidas con relación con la varilla. Usando coordenadas cilíndricas en la varilla AB, determine la velocidad y aceleración del collarín en ese instante.



P1-75

Solución

1).- Orientación de los vectores unitarios de las coordenadas cilíndricas en AB (ver figura P1.75a):



P1-75a

2).- Cálculo del movimiento del marco móvil AB, de la velocidad y aceleración del punto base B:

$$\bar{\omega}_{AB} = \bar{\omega}_1 = 2\left(sen30^\circ\,\bar{e}_\rho + \cos 30^\circ\,\bar{e}_\theta\right)$$

$$\bar{\omega}_{AB} = \bar{e}_\rho + 1.732\,\dot{e}_\theta \quad \text{(rad/seg)}$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{AB} = \dot{\bar{\omega}}_1 = 6\left(sen30^\circ\,\bar{e}_\rho + \cos 30^\circ\,\bar{e}_\theta\right)$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{AB} = 3\,\bar{e}_\rho + 5.196\,\bar{e}_\theta \quad \text{(rad/seg}^2\text{)}$$

$$\overline{V}_B = \overline{\omega}_1 x\, \overline{r}_{B'} = \left(\overline{e}_\rho + 1.732\, \overline{e}_\theta\right) x \left(2\, \overline{e}_X\right) = -3.464\, \overline{e}_\rho + 2\, \overline{e}_\theta \text{ (pie/seg)}$$

$$\overline{a}_B = \dot{\overline{\omega}}_1\, x\, \overline{r}_{B'} - \omega_1^2\, \overline{r}_{B'} = \left(3\, \overline{e}_\rho + 5.196\, \overline{e}_\theta\right) x \left(-2\, \overline{e}_X\right) - 4\left(-2\, \overline{e}_X\right)$$

$$\overline{a}_B = -10.392\, \overline{e}_\rho + 6\, \overline{e}_\theta - 8\, \overline{e}_X \text{ (pie/seg}^2\text{)}$$

3).- Cálculo del movimiento de C respecto al marco móvil AB.-

a).- Identificación de los parámetros que definen el movimiento en AB:

$\rho = 1\ pie$	$\theta = 30^\circ$
$\dot{\rho} = \dot{r} = 2\ pie/seg$	$\dot{\theta} = 7\ rad/seg$
$\ddot{\rho} = \ddot{r} = -0.5\ pie/seg^2$	$\ddot{\theta} = 1\ rad/seg^2$

b).- Movimiento de C:

$$\overline{r}_{BC} = \overline{e}_\rho \text{ (pie)}$$

$$\overline{V}_{C/AB} = \dot{\rho}\, \overline{e}_\rho + \dot{\theta}\, \rho\, \overline{e}_\theta = 2\, \overline{e}_\rho + 7*1\, \overline{e}_\theta = 2\, \overline{e}_\rho + 7\, \overline{e}_\theta \text{ (pie/seg)}$$

$$\overline{a}_{C/AB} = \left(\ddot{\rho} - \rho\, \dot{\theta}^2\right)\overline{e}_\rho + \left(2\, \dot{\rho}\, \dot{\theta} + \rho\, \ddot{\theta}\right)\overline{e}_\theta$$

$$\overline{a}_{C/AB} = \left(-0.5 - 1*49\right)\overline{e}_\rho + \left(2*2*7 + 1*1\right)\overline{e}_\theta = -49.5\, \overline{e}_\rho + 29\, \overline{e}_\theta \text{ (pie/seg}^2\text{)}$$

4).- Cálculo de la velocidad y aceleración de C en el marco inercial tierra:

$$\overline{V}_C = \overline{V}_B + \overline{V}_{C/AB} + \overline{\omega}_{AB} x\, \overline{r}_{BC}$$

Donde:

$$\overline{\omega}_{AB} x\, \overline{r}_{BC} = \left(\overline{e}_\rho + 1.732\, \overline{e}_\theta\right) x\, \overline{e}_\rho = -1.732\, \overline{e}_X \text{ (pie/seg)}$$

Luego:

$$\overline{V}_C = \left(-3.464 + 2\right)\overline{e}_\rho + \left(2 + 7\right)\overline{e}_\theta - 1.732\, \overline{e}_X = -1.464\, \overline{e}_\rho + 9\, \overline{e}_\theta - 1.732\, \overline{e}_X \text{ (pie/seg)}$$

$$\left|\overline{V}_C\right| = 9.281 \text{ pie/seg}$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{C/AB} + \dot{\bar{\omega}}_{AB} x\, \bar{r}_{BC} + \bar{\omega}_{AB} x\, (\bar{\omega}_{AB} x\, \bar{r}_{BC}) + 2\, \bar{\omega}_{AB} x\, \bar{V}_{C/AB}$$

Donde:

$$\dot{\bar{\omega}}_{AB} x\, \bar{r}_{BC} = (3\, \bar{e}_\rho + 5.196\, \dot{e}_\theta)\, x\, \bar{e}_\rho = -5.196\, \bar{e}_X \quad \text{(pie/seg}^2\text{)}$$

$$\bar{\omega}_{AB} x\, (\bar{\omega}_{AB} x\, \bar{r}_{BC}) = (\bar{e}_\rho + 1.732\, \bar{e}_\theta)\, x\, (-1.732\, \bar{e}_X) = -3\, \bar{e}_\rho + 1.732\, \bar{e}_\theta \quad \text{(pie/seg}^2\text{)}$$

$$2\, \bar{\omega}_{AB} x\, \bar{V}_{C/AB} = (2\, \bar{e}_\rho + 3.464\, \bar{e}_\theta)\, x\, (2\, \bar{e}_\rho + 7\, \bar{e}_\theta) = -6.928\, \bar{e}_X + 14\, \bar{e}_X = 7.072\, \bar{e}_X \quad \text{(pie/seg}^2\text{)}$$

Luego:

$$\bar{a}_C = (-10.392 - 49.5 - 3)\, \bar{e}_\rho + (6 + 29 + 1.732)\, \bar{e}_\theta + (-8 - 5.196 + 7.072)\, \bar{e}_X$$

$$\bar{a}_C = -62.892\, \bar{e}_\rho + 36.732\, \bar{e}_\theta - 6.124\, \bar{e}_X \quad \text{(pie/seg}^2\text{)} \quad \rightarrow \quad |\bar{a}_C| = 73.09 \quad \text{pie/seg}^2$$